بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الثاني ١٤٤١ — ١٤٤٢هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١: أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:

(أ) إن $\mathbb{Z}_{25} \cong \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_5$ (ب) إن $Z(G) \neq \{e\}$ ، حيث $|G| = 64$

(ج) إذا كان التمثيل الدوري لـ σ هو $\{1,3,5,6\}$ فإن $\sigma \in A_{16}$

(د) إذا كانت $G = \mathbb{Z}_8$ فإن $Aut\, G$ زمرة غير دائرية رتبتها 4.

س٢: (أ) متى نقول إن G زمرة أولية (p-group)؟

(ب) إذا كانت G زمرة أولية فأثبت أن مركزها غير تافه أي أن $|Z(G)| > 1$

س٣: (أ) متى نقول إن $G|_S$ أي أن G تؤثر على S؟

(ب) إذا كانت $G|_S$ فأجب عما يأتي:

(i) عبّر عن كل من G_α و S_G على هيئة مجموعة، حيث $\alpha \in S$.

(ii) أثبت أن: $G_\alpha \leq G$.

س٤: إذا كان $\Phi : G \to \bar{G}$ ايمورفزماً نواته K و $H \leq G$ حيث $K \subseteq H$ فأجب عما يأتي:

(أ) أكمل: $\bar{H} = \Phi(H) = \{ \ldots \}$

(ب) أثبت أن $\bar{H} \leq \bar{G}$.

س٥: إذا كانت $G = S_4$ فأجب عما يأتي:

(أ) كم عدد زمر سيلو الجزئية الأولية في G من النوع 3؟

(ب) إذا كانت H احدى زمر سيلو الجزئية الأولية في G من النوع 2 فأجب عما يأتي:

(i) أكمل: $|H| = \ldots$

(ii) أوجد $x, y \in G$ حيث $H = \langle x, y \rangle$

(iii) كم عدد مرافقات H في G؟

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — الرياضيات التطبيقية في الطب — ٣٤٣ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الأول ١٤٢٦-١٤٢٧هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : (١٠)

(أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:

$N(a) = G \Leftrightarrow a \in Z(G)$ إن

(ب) إذا كانت G زمرة رتبتها p^n فإنها غير بسيطة، حيث $n \in \mathbb{Z}^+$.

(ج) إذا كانت $G = \langle x, y \rangle$ حيث $x = (1,7)(2,6)(3,5)$ و $y = (1,2,3,4,5,6,7)$

فإن G زمرة زوجية رتبتها 14.

س٢ : (١٢)

(أ) اذكر نص كل من (i) تعميم برنسايد لكيلي (ii) مبرهنة سيلو الأولى.

(ب) إذا كانت G زمرة رتبتها $2 \cdot 2 \cdot 7$ فاستفد من فقرة (أ) في إثبات ما يلي:

(i) توجد زمرة جزئية في G رتبتها t من أجل $t = 1,2,3,4,5$

(ii) إن G زمرة غير بسيطة.

س٣ : (١٣)

(أ) متى نقول عن زمرتين H و K إنهما متماثلتان (أي $H \cong K$).

(ب) إذا كانت $T = \{G \mid G$ زمرة $\}$ وعرفنا على T العلاقة "$\cong$"

على T برهن أن "$\cong$" علاقة تكافؤ على T.

(ج) إذا كانت $L = \{G \mid |G| = 12\}$ وعرفنا على L العلاقة "$\cong$"

فأوجد عشرة أصناف التكافؤ في L.

س٤ : (١٥)

(أ) إذا كانت $\alpha, \beta \in S_{14}$ حيث $\alpha = (1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)(9,14)$

و $\beta = (1,11,12,13)(2,10,8,6,4)$ فأجب عما يأتي:

(1) أكمل الفراغات الآتية:

(i) $\alpha^5 = \cdots$ (ii) $\sigma = \beta\alpha^5 = \cdots$ (iii) $|\sigma| = \cdots$

(iv) $|N(\sigma)| = \cdots$

(2) هل $\sigma \in A_{14}$ ؟ ولماذا؟

(ب) إذا كان $\bar{G} \longrightarrow G : \varphi$ تشاكلاً غامراً نواته K وكانت $K \subseteq N \trianglelefteq G$ فأجب عما يلي:

(i) أكمل: $G/K \cong \cdots$ (ii) $\varphi(N) = \{\cdots\} = \bar{N}$ أوجد

تلميح: أثبت أن $\bar{N} \trianglelefteq \bar{G}$.

(ج) إذا كانت $G = G_1 \times G_2 \times \cdots \times G_n$ حيث G_i زمرة منتهية لكل i

فأكمل الفراغات الآتية:

(i) $g \in G \Rightarrow g = (\quad\quad) \wedge g^{-1} = (\quad\quad)$

(ii) $|G| = \cdots$

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الأول ١٤٢٧/١٤٢٨هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

١) ليكن $G = \mathbb{Z}_{15} \times U_9 \times S_7$ وليكن $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ حيث $g_1 = 3$ و $g_2 = 4$ و $g_3 = (1,3,5,7)(2,6)(3,4)$. فأجب عما يأتي:

(أ) اكتب g_3^2 كحاصل ضرب دورات منفصلة (استفد من ذلك كلما أمكن).

(ب) املأ الفراغات الآتية: $|G| = |\mathbb{Z}_{15}| \times |U_9| \times |S_7|$

[1] $|g_1| =$ [5] [2] $|g_2| =$ [3] [3] $|g_3| =$ [4] [4] $|g| =$ [3] [5] $g_1^{-1} =$ [12]

[6] $g_2^{-1} =$ [7] [7] $|G| =$ [8] [8] $e = (e_1, e_2, e_3) = (\quad, \quad, \quad) \in G$

[9] $|N(g_3)| =$ [10] [10] $|[g_3]| = C_{g_3} =$ [11] [11] $g_3 \sim$ [12] [12] $\simeq U_9 \simeq$ [13]

(ج) أثبت أن $\mathbb{Z}_{15}$ و U_9 و S_7 أبدية من نفس الرتبة (لا حاجة لإثبات أن U_9 دورية).

(د) أثبت أن S_7 تحوي زمرة جزئية دائرية رتبتها 7.

(هـ) أثبت أن S_7 تحوي زمرة جزئية دائرية رتبتها 10.

٢) (أ) متى نقول عن زمرة G أنها غير بسيطة؟

(ب) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي مع تبرير إجابتك:

(1) كل زمرة بسيطة G رتبتها 272 هي زمرة أبدية.

(2) كل زمرة بسيطة G رتبتها 224 هي زمرة أبدية.

(3) $U_{12} \simeq U_8$ (4) $\mathbb{Z}_{p^3} \simeq \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$

٣) (أ) متى نقول إن H هي زمرة سيلو جزئية في G من النوع p؟

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $A, B \in L$ حيث L مجموعة زمر سيلو الجزئية من النوع p فأثبت أن A و B متوافقتان في G.

إرشاد: ابدأ برهانك بجعل $R = \{ Bx \mid x \in G \}$ حيث $A|_R$

٤) (أ) متى نقول إن G هي زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $G_1, \ldots, G_n$؟

(ب) إذا كانت G هي زمرة حاصل الضرب المباشر الخارجي للزمر $G_1, \ldots, G_n$ وعرفنا $\bar{G}_i$ بالصورة $\bar{G}_i = \{(e, \ldots, g_i, \ldots, e) \mid g_i \in G_i\}$ فأجب عما يأتي:

(1) أكمل الفراغات: (i) $\bar{G}_i \leq$ [ ] (ii) e_i هو العدد في [ ]

(2) تقول إن $G = \bar{G}_1 \bar{G}_2 \cdots \bar{G}_n$ هي زمرة [ ]

(ج) أثبت أن $G_i \simeq \bar{G}_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$ للزمرة G و $\bar{G}_i$ المعرفة في الفقرة السابقة.

إرشاد: ابدأ برهانك بتعريف تطبيق ϕ من G_i إلى $\bar{G}_i$.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — اختبار الفصل الثاني ٣٤٣ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الثاني ١٤٢٨/١٤٢٧هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١: (أ) متى نقول إن G هي زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $N_1, \ldots, N_m$؟

(ب) إذا كانت G هي زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $N_1, \ldots, N_m$ وكانت $K = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_m$ فأثبت أن: $G \cong K$.

س٢: (أ) اكتب نص مبرهنة سيلو الثالثة.

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية وكان p عدد زمر سيلو الجزئية في G من النوع P فأثبت أن:

(١) $p \mid |G|$ (٢) $G_H = N_G(H)$، حيث H إحدى زمر سيلو الجزئية من النوع P في G.

(جـ) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 304.

$304 = 16 \cdot 19$

س٣: أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي، بحيث لا تزيد البرهانة عن سطور فقط:

(أ) لا توجد تشاكل غير التشاكل التافه من Z_{12} إلى Z_7.

(ب) توجد زمرة بسيطة G رتبتها 448.

(جـ) لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها p^n لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(د) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها n فإن عدد أصناف (فصول) الترافق في G يساوي n.

$n \geq |G| = \sum_{i=1}^{n} a_i = 1 + 1 + \cdots + 1 = n$ (n مرة)

س٤: إذا كانت $g = (g_1, g_2, g_3) \in G = S_{12} \times U_{14} \times Z_{15}$ حيث:

$g_1 = (1,3,5,7,9,10,11,12)(2,4,6,8,11,10,9,7,5,3)$

و $g_2 = g^2$ و $g_3 = 3$ فأجب عما يأتي:

(أ) اكتب g_1 كحاصل ضرب دورات منفصلة مستقلة مع ذكر سبب كل أمر.

(ب) أمرئ الفراغات الآتية:

1. $|g_1| =$ ... 2. $|g_2| =$ ... 3. $|g_3| =$ ...
4. $|g| =$ ... 5. $e = (e_1, e_2, e_3) =$ ... 6. $g^{-1} =$ ...
7. $U_{14} =$ ... 8. $\langle g_3 \rangle \cong$ ... 9. $Aut(Z_{15}) \cong$ ...
10. $|N_{S_{12}}(g_1)| =$ ... 11. عدد مرافقات $g_1 = C_{g_1} =$ ...

(جـ) هل $Z_7 \cong \langle g_1 \rangle$؟ ولماذا؟

(د) جد عنصراً في S_{12} يولد زمرة دائرية رتبتها 30.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — اختبار النهائي في المقرر ٣٤٣ ريض

قسم الرياضيات — الفصل الثاني ٤٣٧/٤٣٦هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

٩ س١: أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي مما يرد عدها أربعة سطور:

(أ) إن مبرهنة كوشي تعتبر حالة خاصة من مبرهنة سيلو الأولى.

(ب) إن G زمرة بسيطة، حيث $|G| = 2p$ و p عدد أولي.

(ج) إن G زمرة إبدالية، حيث $G = Z_7^* \times S_3$.

١٠ س٢: (أ) متى نقول عن زمرة G إنها غير بسيطة؟

(ب) اذكر نص «تعميم مبرهنة كيلي».

(ج) إذا كانت G منتهية و $H < G$ بحيث $|G| \nmid [G:H]!$ فأثبت بالتفصيل أن G زمرة غير بسيطة.

(د) إذا كان $\sigma \in S_{10}$ حيث $\sigma = (1,2,3)(4,5)(6,10,7)$ فأوجد المراتب:

(١) $o(\sigma) = |\langle \sigma \rangle| =$ ... (٢) $|N(\sigma)| =$ ... (٣) $C_\sigma =$ ...

(٤) التفريق الرموزي لـ $\sigma^2 =$ ...

(٥) إن $\sigma \notin A_{10}$، لأن ...

١٦ س٣: (أ) متى نقول عن زمرتين G و H إنهما متماثلتان $(G \cong H)$؟

(ب) إذا كانت $G = \langle a : a^n = e \rangle$ فأثبت أن $G \cong Z_n$.

(ج) استفد من النظرية (أ) و(ب) في إثبات ما يلي:

إذا كانت G_1 و G_2 زمرتين دائريتين منتهيتين فإن:

$$G_1 \cong G_2 \iff |G_1| = |G_2|$$

(د) عرّف التماثل الذاتي لزمرة G.

(هـ) إذا كانت $G = \langle a : a^9 = e \rangle$ وكان $G \xrightarrow{\Phi} G$ تطبيقاً حيث $\Phi(a^i) = a^{2i}$ فأثبت أن:

(١) $\Phi \in Aut(G)$ (٢) $Aut(G) = \langle \Phi \rangle$

١٠ س٤: (أ) إذا كانت G زمرة منتهية و $H \leq G$، فمتى نقول إن H زمرة سيلوجزئية من النوع P؟

(ب) إذا كانت G منتهية و $p \mid |G|$ و A_p عدد زمر سيلو الجزئية من النوع P فأثبت أن: $A_p \mid |G|$.

(ج) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة رتبتها 72.

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود ... الرياضيات التطبيقية في الطور ٣٤٣ ... رياض

قسم الرياضيات ... الفصل الدراسي الأول ١٤٢٦-١٤٢٧هـ ... الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأربع مسائل الآتية

س١: (أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي:

(١) $N(a) = G \iff a \in Z(G)$ إذا كان

(٢) إذا كانت G زمرة رتبتها p^n فإنها غير بسيطة، حيث $n \in Z^+$

(٣) إذا كانت $G = \langle x, y \rangle$ حيث $x = (1,7)(2,6)(3,5)$ و $y = (1,2,3,4,5,6,7)$ فإن G زمرة زوجية رتبتها 14.

س٢: (أ) اذكر نص كل من (i) تعريف مرفقة كيلي (ii) مبرهنة سيلو الأولى.

(ب) إذا كانت G زمرة رتبتها $2^2 z$ فاستفد من فقرة (أ) في إثبات ما يلي:

(i) توجد زمرة جزئية في G رتبتها 2^t حيث $t = 1,2,3,4,5$

(ii) إن G زمرة غير بسيطة.

س٣: (أ) متى نقول عن زمرتين H و K أنهما متماثلتان (أي $H \cong K$)؟

(ب) إذا كانت G زمرة $T = \{G \mid$ ... $\}$ وعرفنا عليها العلاقة $\cong$ "... على T" فبرهن أن $\cong$ علاقة تكافؤ على T.

(ج) إذا كانت $L = \{G \mid |G| = 12\}$ وعرفنا على L العلاقة $\cong$ "... " فأوجد عشرات أصناف التكافؤ في L.

س٤: (أ) إذا كانت $\alpha, \beta \in S_{14}$ حيث $\alpha = (1,3,5,7,9)(2,4,6,8,10)(9,14)$ و $\beta = (1,11,12,13)(2,10,8,6,4)$ فأوجد عما يأتي:

(١) أطول المهمات الآتية:

(i) $\alpha^5 = \dots$ (ii) $\sigma = \beta\alpha^5 = \dots$ (iii) $|\sigma| = \dots$

(iv) $|N(\sigma)| = \dots$

(٢) هل $\sigma \in A_{14}$ ؟ ولماذا؟

(ب) إذا كانت $\bar{G} \to G$: φ تماثلاً غامراً نواته K وكانت $K \subseteq N \trianglelefteq G$ فأوجد عما يلي: $\bar{N} = \varphi(N) = \{\dots\}$ (ii) $G/K \cong \dots$ (i) أكمل: $\bar{N} \trianglelefteq \bar{G}$ ؛ لماذا؟ أثبت أن

إذا كانت ... فأكمل المهمات الآتية:

(i) $g \in G \Rightarrow g = (\dots) \wedge g^{-1} = (\dots)$

(ii) $|G| = \dots$

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — مختار الزاوي في المحرم ١٤٣٧هـ

قسم الرياضيات — الفصل الثاني ١٤٣٧/١٤٣٦هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١: (أ) متى نقول إن G هي زمرة حاصل الضرب الداخلي للزمر $N_1, \dots, N_m$؟

(ب) إذا كانت G هي زمرة حاصل الضرب الداخلي للزمر $N_1, \dots, N_m$، وكانت $K = N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_m$ فأثبت أن: $G \cong K$.

س٢: (أ) اكتب نص مبرهنة سيلو الثالثة.

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية وكان n_p عدد زمر سيلو الجزئية في G من النوع P فأثبت أن:

(١) $n_p \mid |G|$ (٢) $G_H = N_G(H)$ حيث H إحدى زمر سيلو الجزئية من النوع P في G.

(جـ) أثبت أنه لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 30.4.

س٣: أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي، بحيث لا تزيد البرهنة عن سطر فقط:

(أ) لا توجد تشاكل غير التشاكل التافه من $\mathbb{Z}_{12}$ إلى $\mathbb{Z}_7$.

(ب) توجد زمرة بسيطة G رتبتها 448.

(جـ) لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها p^n لكل $n \in \mathbb{Z}^+$.

(د) إذا كانت G زمرة إبدالية رتبتها n فإن عدد أصناف (فصول) التماثل غير الساوي n.

س٤: إذا كانت $G = S_{12} \times U_{14} \times \mathbb{Z}_{15}$ حيث: $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$

$g_1 = (1,3,5,7,9,10,11,12)(2,4,6,8,11,10,9,7,5,3)$

و $g_2 = g$ و $g_3 = 3$ فأجب عما يأتي:

(أ) اكتب g_1 كحاصل ضرب دورات منفصلة، ثم استنتج مما سبق أن:

(ب) أوجد القيم الآتية:

1. $|g_1| =$ [ ] 2. $|g_2| =$ [ ] 3. $|g_3| =$ [ ]
4. $|g| =$ [ ] 5. $e = (e_1, e_2, e_3) =$ [ ] 6. $g^{-1} =$ [ ]
7. $U_{14} =$ [ ] 8. $\langle g_1 \rangle \cong$ [ ] 9. $Aut(\mathbb{Z}_{15}) \cong$ [ ]
10. $|N_{S_{12}}(g_1)| =$ [ ] 11. عدد مرافقات $g_1 = C_{g_1} =$ [ ]

(جـ) حلل $\mathbb{Z} \cong \langle g_1 \rangle$ إلى جداء زمر دائرية رتبة كل منها عنصر.

(د) جد عنصراً في S_{12} يولد زمرة دائرية رتبتها 30.

(2)

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود — السجل الأكاديمي الفصلي — العام الجامعي ٢٠٢٣ هـ

قسم الرياضيات — الفصل الأول ٢٠٢٣/١٤٤٤ هـ — الزمن: ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

١) إذا كانت $G = \mathbb{Z}_{15} \times \mathbb{U}_9 \times S_7$ و $g = (g_1, g_2, g_3) \in G$ بحيث $g_1 = 3$ و $g_2 = 4$ و $g_3 = (1,3,5,7)(2,6)(3,4)$ فأوجد ما يأتي:

(أ) اكتب g_3 كحاصل ضرب دورات منفصلة ثم استخدم ذلك لإيجاد $|g_3|$.

(ب) املأ الفراغات الآتية:

1) $|g_1| = \boxed{\quad}$ 2) $|g_2| = \boxed{\quad}$ 3) $|g_3| = \boxed{\quad}$ 4) $|g| = \boxed{\quad}$ 5) $g_1^{-1} = \boxed{\quad}$

6) $g_2^{-1} = \boxed{\quad}$ 7) $|G| = \boxed{\quad}$ 8) $e = (e_1, e_2, e_3) = (\boxed{\quad}, \boxed{\quad}, \boxed{\quad}) \in G$

9) $|N(g_3)| = \boxed{\quad}$ 10) $|[g_3]| = C_{g_3} = \boxed{\quad}$ 11) $g_3 \equiv \boxed{\quad} \pmod 7$ 12) $\mathbb{U}_9 \cong \boxed{\quad}$

(ج) أثبت أن $\mathbb{Z}_{15}$ و $\mathbb{U}_9$ غير متماثلتين.

(د) أثبت أنه لا توجد زمرة جزئية ناظمية في S_7 مرتبتها 7.

(هـ) أثبت أنه توجد زمرة جزئية حاصرية في S_7 مرتبتها 10.

٢) (أ) متى تقول عن زمرة G أنها غير بسيطة؟

(ب) أثبت دون أن تقوم بالقسمة أن كل زمرة G رتبتها 272 هي زمرة غير بسيطة.

(ج) لماذا لا توجد زمرة بسيطة G رتبتها 224؟

(د) $\mathbb{U}_{12} \cong \mathbb{U}_8$ (هـ) $\mathbb{Z}_{p^3} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$

٣) (أ) متى تقول إن H هي زمرة جزئية سيلو من النوع p في G؟

(ب) إذا كانت G زمرة منتهية وكانت $A, B \in L$ حيث L مجموعة زمر سيلو الجزئية من النوع p في G فأثبت أن A و B مترافقتان في G.

إرشاد: أثبت أن $|R| = |A|$ حيث $R = \{ BxA \mid x \in G \}$

٤) (أ) متى تقول إن G هي زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $G_1, G_2, \ldots, G_n$؟

(ب) إذا كانت G هي زمرة حاصل الضرب المباشر الداخلي للزمر $G_1, \ldots, G_n$ وعرفنا $\overline{G}_i$ بالصورة $\overline{G}_i = \{(e, \ldots, g_i, \ldots, e) \mid g_i \in G_i\}$ فأوجد ما يأتي:

(i) $\overline{G}_1 \cap \overline{G}_2 = \boxed{\quad}$ (ii) $|\overline{G}_1| = \boxed{\quad}$ في المثال

(iii) نقول إن $G = \overline{G}_1 \overline{G}_2 \cdots \overline{G}_n$ هي زمرة $\boxed{\quad}$

(ج) أثبت أن $G_i \cong \overline{G}_i$ لكل $i = 1, 2, \ldots, n$.

إرشاد: إبدأ بإعطاء تعريف تطبيق ϕ من G_i إلى $\overline{G}_i$