(21) التصحيح — نموذج الإجابة العام

جامعة الملك سعود-كلية العلوم قسم الرياضيات	الإ متحان الفصلي الثاني للمقرر (209) ريض الفصل الأول 1437/1436 هـ	يوم الخميس 1437/2/26 هـ الزمن : ساعة ونصف

السؤال الأول : أ) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة : $f(x)=\dfrac{1}{2+x}$ وما هي فترة تقاربها؟. (2)

(6)

ب) استفد من الفقرة أ) في إيجاد متسلسلة القوى في x للدالة $g(x)=\ln(x+2)$ (2)

ج) أوجد القيمة التقريبية للتكامل $\int_0^1 e^{-x^2}dx$ وذلك بمكاملة الحدود الثلاثة الأولى (2)

لمتسلسلة القوى في x للدالة $h(x)=e^{-x^2}$.

السؤال الثاني : أ) أوجد فترة ونصف قطر التقارب للمتسلسلة القوى التالية :

(11)

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(x-5)^n}{n\,5^n} .$$ (4)

(5)

ب) ارسم الدالة $f(x)=\begin{cases}x+\pi; -\pi<x<0\\ 0; 0\le x<\pi\end{cases}$ ، حيث $f(x+2\pi)=f(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}$. أوجد متسلسلة فوريه للدالة f على الفترة $(-\pi,\pi)$ واستنتج صحة العلاقة التالية :

(2+2) (4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8} .$$ (2)

السؤال الثالث : أ) أوجد تكامل فوريه للدالة $f(x)=\begin{cases}0; x<0\\ 1; 0\le x<2\\ 0; x\ge 2\end{cases}$ واستنتج صحة العلاقة التالية :

(9) + (1) / (10)

(4) = (1 1/2) + (1 1/2) + 1 قانونه

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin(2\alpha)}{\alpha}d\alpha=\frac{\pi}{2} .$$ (1)

ب) برهن أن الدالة التالية : $f(x,y)=e^{\frac{y}{2x}}\cos(xy)$ تحقق العلاقة التالية :

$$x^2\frac{\partial f}{\partial x}-xy\frac{\partial f}{\partial y}+yf=0 .$$ (4)

السؤال الأول: (6)

أ) $f(x) = \frac{1}{2+x} = \frac{1}{2(1+x/2)} = \frac{1}{2}\sum_0^{\infty}\left(\frac{-x}{2}\right)^n$

$f(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{2^{n+1}}$; $\left|\frac{-x}{2}\right|<1 \Leftrightarrow |x|<2$

2/

ب) $x<(-2,2)$ $\int_0^x \frac{dt}{2+t} = [\ln(2+t)]_0^x = \ln(x+2) - \ln 2$

$= \sum_0^{\infty} \int \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} t^n dt$

$= \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} \frac{x^{n+1}}{n+1}$

2/

$\ln(x+2) = \ln 2 + \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}(n+1)} x^{n+1}$; $|x|<2$

ج) $e^{-x^2} = \sum_0^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$

$= 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \dots$

2/

$\int_0^1 e^{-x^2} dx \# \int_0^1 \left(1 - \frac{x^2}{1} + \frac{x^4}{2}\right) dx$

$= \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10}\right]_0^1 = (1 - 1/3 + 1/10)$

$= \frac{30-10+3}{30} = \frac{23}{30} \# 0.77$

السؤال الثاني: (11)

أ) $\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n (x-5)^n}{n\, 5^n}$

$x \neq 5$ $\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x-5|^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}}{\frac{|x-5|^n}{n\,5^n}}$

$= |x-5| \lim_{n\to\infty} \frac{n}{5(n+1)} = \frac{|x-5|}{5} < 1 \Rightarrow |x-5|<5$ (3)

إذاً المتسلسلة متقاربة لكل $x \in \mathbb{R}$ وتحقق $|x-5|<5$

نصف قطر التقارب $r=5$

$-5 < x-5 < 5$ $x \in (0,10)$

(1/2) عندما $x=0$ لدينا

$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n(-1)^n 5^n}{n\, 5^n} = \sum \frac{1}{n}$ متباعدة $p=1$

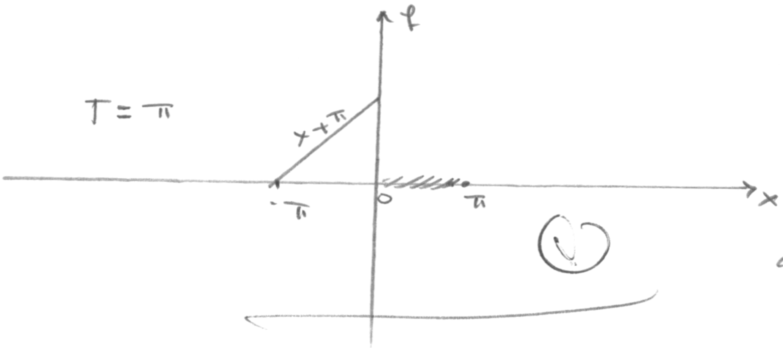
(1/2) عندما $x=10$ لدينا

$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ متقاربة حسب اختبار التناوب

إذاً فترة التقارب هي $I_1 = (0, 10]$

ب)

$T = \pi$



7

$\cos(\frac{n\pi x}{\pi})$

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f + \int_{0}^{\pi} f\right)$$

1

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} + \pi x\right]_{-\pi}^{0}$$

$$= -\frac{1}{\pi}\left[0 - \left(\frac{\pi^2}{2} - \pi^2\right)\right] = \frac{\pi}{2}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\cos(nx)\,dx$$

2

$$= \frac{1}{\pi}\left[(x+\pi)\cancel{\frac{\sin(nx)}{n}}\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\sin nx}{n}\,dx$$

$$= \left[\frac{\cos(nx)}{\pi n^2}\right]_{-\pi}^{0} = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x+\pi)\sin nx\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[(x+\pi)\frac{-\cos nx}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}\frac{\cos nx}{n}\,dx$$

2

$$= \frac{1}{\pi}\left(\pi \cdot \frac{-1}{n}\right) - 0 + \frac{1}{\pi n^2}(\sin nx)_{-\pi}^{0}$$

$$b_n = \frac{-1}{n}$$

1

$$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{1}^{\infty}\left[\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}\cos nx + \left(\frac{-1}{n}\right)\sin nx\right]$$

[illegible]

$-\pi < x < \pi$

$$\frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} + \sum_{1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$$ بوضع $x=0$ نجد

2

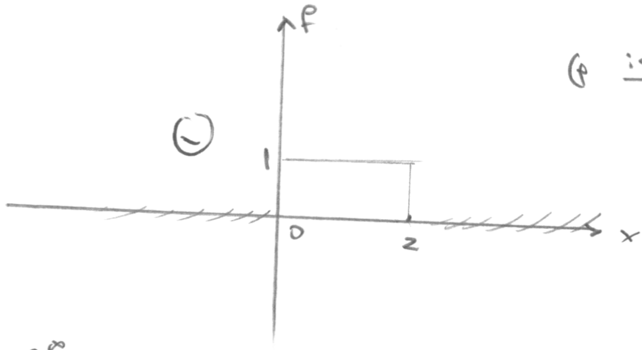
$$\frac{\pi}{4} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1-(-1)^n}{\pi n^2} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1-(-1)^{2n-1}}{\pi(2n-1)^2}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{2}{\pi}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} \Rightarrow \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

السؤال الثالث: أ)

(6)

(ب)



$\alpha > 0 \qquad A(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\alpha x)\,dx = \int_{0}^{2} \cos(\alpha x)\,dx$ (1/2)

$= \left[\frac{\sin \alpha x}{\alpha}\right]_0^2 = \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}$

$B(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin \alpha x\,dx = \int_0^2 \sin \alpha x\,dx = \left[-\frac{\cos \alpha x}{\alpha}\right]_0^2$ (1/2)

$= \frac{-\cos 2\alpha + 1}{\alpha}$

$\frac{f(x^+) + f(x^-)}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \left(A(\alpha)\cos(\alpha x) + B(\alpha)\sin \alpha x\right) d\alpha$ (1)

$-\pi < x < \pi$ لكل $= \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\left(\frac{\sin 2\alpha}{\alpha}\cos \alpha x + \frac{1 - \cos 2\alpha}{\alpha}\sin \alpha x\right) d\alpha$

حالة خاصة عندما $x = 0$ لدينا

$\frac{1+0}{2} = \frac{f(0^+) + f(0^-)}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}\,d\alpha$ (1)

$\frac{\pi}{2} = \int_0^{\infty} \frac{\sin 2\alpha}{\alpha}\,d\alpha = \int_0^{\infty} \frac{\sin \beta}{\beta}\,d\beta$ أو

$f(x, y) = e^{y/2x}\cos(xy)$ (4) ب

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{2x^2} e^{y/2x}\cos(xy) - e^{y/2x}\sin(xy)\,y$ (1/2)

$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{2x} e^{y/2x}\cos(xy) - e^{y/2x}\sin(xy)\,x$ (1/2)

$x^2\frac{\partial f}{\partial x} - xy\frac{\partial f}{\partial y} + yf = -\frac{y}{2} e^{y/2x}\cos(xy) - e^{y/2x}\sin(xy)\,x^2 y$

$- \frac{1}{2} y\, e^{y/2x}\cos(xy) + e^{y/2x}\sin(xy)\,x^2 y$

$+ y\, e^{y/2x}\cos(xy)$

$= 0$ (1)