جامعة الملك سعود
كلية العلوم - قسم الرياضيات

الاختبار النهائي - لمقرر ٢٤٣ريض
الفصل الثاني ١٤٢٦ / ١٤٢٧هـ

الزمن / ثلاث ساعات

السؤال(١):

(أ) أثبت أن $(n!+1,(n+1)!+1)=1$.

(ب) إذا كان $a,b\in\mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفرا فأثبت أنه يوجد $x_0,y_0\in\mathbb{Z}$ بحيث يكون $(a,b)=ax_0+by_0$.

(ج) إذا كان $a^3\mid b^2$ فأثبت أن $a\mid b$. وإذا كان $a^2\mid b^3$ فهل صحيح أن $a\mid b$ ؟

(د) جد جميع الأعداد الأولية p بحيث يكون $7p+4$ مربعا كاملا.

السؤال(٢):

(أ) أثبت أن $\tau(n)$ عددا فرديا إذا وفقط إذا كان n مربعا كاملا.

(ب) أثبت أن $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3\equiv 0 \pmod 9$.

(ج) استخدم مبرهنة الباقي الصينية لإيجاد جميع الأعداد بين 3000 و 5000 التي بقسمتها على 7، 11، 13 يكون الباقي 1، 3، 5 على التوالي.

(د) إذا كان العدد $n=72x20y2$ يقبل القسمة على 72 فاحسب قيمة كل من الرقمين x و y .

السؤال(٣):

(أ) ليكن p أوليا فرديا. أثبت أن التطابق $x^2\equiv -1 \pmod p$ له حل إذا وفقط إذا كان $p\equiv 1 \pmod 4$.

(ب) ليكن p أوليا فرديا. إذا كان q قاسما أوليا للعدد $M_p=2^p-1$ فأثبت أن $q=2kp+1$ حيث $k\in\mathbb{Z}^+$.

(ج) استخدم الفقرة (ب) لمعرفة فيما إذا كان العدد $M_{23}=2^{23}-1$ عددا أوليا أم مؤلفا.

(د) لنفرض أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي $n>2$ كمجموع عددين أوليين. استخدم هذا الحدس لإثبات أنه يمكن كتابة أي عدد فردي أكبر من 7 كمجموع ثلاثة أعداد أولية فردية.

السؤال(٤):

(أ) أثبت أن $6601=7\cdot 23\cdot 41$ عدد كارمايكل.

(ب) أثبت أن $\varphi(2n)=\varphi(n)$ إذا وفقط إذا كان n فرديا.

(ج) أثبت أن $\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n$.

(د) جد جميع ثلاثيات فيثاغورس البدائية حيث $y=12$.