جامعة الملك سعود — الاختبار الثاني — الفصل الأول
كلية العلوم — ٤٣٣ ريض — ١٤٢٦ - ١٤٢٧هـ
قسم الرياضيات — نظرية الأعداد — الزمن: ٣ ساعات

السؤال الأول :

(أ) إذا كان $b = 9a + 3$ فأثبت أن $(a,b) = (a,3)$.

(ب) إذا كان $(b,4) = (a,4) = 2$ فأثبت أن $(a+b,4) = 4$

السؤال الثاني :

(أ) إذا كان a و b عددين صحيحين ليس كلاهما صفراً حيث $ax + by = 1$ فأثبت أن $(a,b) = 1$.

(ب) إذا كان $(a,b) = (a,c) = 1$ فأثبت أن $(a,bc) = 1$.

السؤال الثالث :

(أ) أثبت أن عدد الأعداد الأولية التي على الصورة $3k+2$ عدد غير منته.

(ب) إذا كان p عدداً أولياً وكان $0 \le n < p$ فأثبت أن $\binom{n+p}{p} \equiv 1 \pmod{p}$.

السؤال الرابع :

(أ) أكتب معكوس ضربي وليس وأثبت صحة العبارة.

(ب) أكتب معكوس ضربي فيما سبق وبين أنها غير صحيحة.

(جـ) أكتب معكوس ضربي أويلر وأثبت صحة العبارة.

السؤال الخامس

(أ) حل النظام

$$x \equiv 4 \pmod{30}$$
$$6x \equiv 22 \pmod{40}$$
$$15x \equiv 5 \pmod{50}$$

(ب) أثبت أن $\varphi(n^2) + \varphi((n+1)^2) < 2n^2$

[إرشاد: لاحظ أن $\varphi(n^2) = n\varphi(n)$].

السؤال السادس

(أ) أثبت أن $\sum_{d|n} \mu(d) = 0$ لكل $n > 1$.

(ب) إذا كان $G(n) = \sum_{d|n} f(d)$ وكانت G دالة ضربية فأثبت أن f دالة ضربية.