جامعة الملك سعود
كلية العلوم - قسم الرياضيات

الاختبار النهائي (نظرية الأعداد)
الفصل الدراسي الثاني ١٤٢٥ - ١٤٢٦ هـ

الزمن : ثلاث ساعات
أجب على خمسة أسئلة فقط .

السؤال الأول

(أ) جد جميع الحلول الصحيحة للمعادلة $1485x + 1745y = 15$.

(ب) (i) أثبت أن $(a, b) = (a, b - a)$.

(ii) إذا كان $(a, c) = 1$ فأثبت أن $(a, bc) = (a, b)$.

(iii) استخدم الفقرتين (i) و (ii) والاستقراء الرياضي على n لإثبات أن :
$(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{(m,n)} - 1$ لكل $m \leq n$.

السؤال الثاني

(أ) أثبت أن الأعداد $3, 5, 7$ هي جميع الأعداد الأولية التي على الصورة $P, P+2, P+4$ حيث P عدداً أولياً .

(ب) أثبت أن العبارتين التاليتين متكافئتين :

(i) كل عدد صحيح زوجي أكبر من 2 يمكن كتابته كمجموع عددين أوليين .

(ii) كل عدد صحيح أكبر من 5 يمكن كتابته كمجموع ثلاثة أعداد أولية .

السؤال الثالث

(أ) إذا كان $792 = 8 \times 9 \times 11$ يقسم العدد $13xy45z$ فجد كل من الأرقام x ، y ، z .

(ب) حل التطابق $729x \equiv 1 \pmod{8180}$.

السؤال الرابع

(أ) استخدم مبرهنة فيرما الصغرى لإثبات أن $3^{6n} - 2^{6n} \equiv 0 \pmod{35}$ لكل $n \geq 0$.

(ب) أثبت أن $18! \equiv -1 \pmod{437}$

السؤال الخامس

(أ) جد جميع ثلاثيات فيثاغورس x, y, z بحيث يكون $z = y + 1$.

(ب) إذا كان p عدداً أولياً لا يقسم a وكان $n \equiv m \pmod{p-1}$ فأثبت أن $a^n \equiv a^m \pmod{p}$.

(ج) استخدم الفقرة (ب) لحساب $2^{1000000} \pmod{7}$.

السؤال السادس

(أ) لتكن $G(n) = \sum_{d|n} f(d)$. أثبت أن G دالة ضربية إذا وفقط إذا كانت f دالة ضربية .

(ب) أثبت أن $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ لكل $n \geq 1$.

(ج) إذا كان $n = \sum_{d|n} g(d)$ فأثبت أن $g(n) = \varphi(n)$.