الاختبار الفصلي الثاني ٢٤٣ ريض الفصل الثاني ١٤٣٢-٣٣

ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة

١- أثبت أن $ab \equiv ac \bmod n$ إذا و فقط إذا كان $b \equiv c \bmod \frac{n}{d}$ ، حيث $d=(a,n)$.

٢- إذا كان p أولياً و $0 \le n < p$ ، فبرهن أن $N = \binom{n+p}{p} \equiv 1 \bmod p$.

٣- ليكن $r_1, r_2, \ldots, r_n$ نظام رواسب تام قياس n . أثبت أنه لأي عددين صحيحين a و b ،
حيث $(a,n)=1$ تكوّن الأعداد $ar_1+b, ar_2+b, \ldots, ar_n+b$ نظام رواسب تام قياس n .

٤- جد أصغر عدد صحيح موجب يحقق:

$$\begin{aligned} x &\equiv 8 \bmod 20 \\ x &\equiv 3 \bmod 25 \\ x &\equiv 20 \bmod 36 \end{aligned}$$

٥. باستخدام الاستقراء الرياضي، أثبت أن $(s-1)!(p-s)! \equiv (-1)^s \bmod p$ ، حيث $p \ge 3$
عدد أولي و $1 \le s \le p-1$.

الاختبار الفصلي الثاني　　　243 ريض　　　الفصل الأول 1432-33

ملاحظة: رتب أجوبتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

1. أثبت وجود نظير ضربي للعدد a قياس n إذا و فقط إذا كان $(a,n)=1$. ثم أحسب نظير العدد 14 قياس 27 .

2. إذا كان $r_1, r_2, \ldots, r_n$ نظام رواسب تام قياس n ، فأثبت أن $ar_1+b, ar_2+b, \ldots, ar_n+b$ هو نظام رواسب تام أيضا ، حيث $(a,n)=1$.

3. عرّف المقصود بشبه الأولي للأساس b ، ثم أثبت أن 341 شبه أولي للأساس 2 .

4. جد أصغر عدد صحيح موجب ، إن وُجِد، يحقق النظام التالي:

$$x \equiv 2 \bmod 6$$
$$x \equiv 2 \bmod 8$$
$$x \equiv 8 \bmod 21$$

5. باستخدام التطابق، أثبت أن الأعداد $4^{10n} - 3^{10n}$ تقبل القسمة على 77 لكل $n \geq 0$.

الاختبار الفصلي الثاني/2   243 ريض   الفصل الثاني 1431-32

ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

1. إذا كان $(c,n)=d$ ، فأثبت أن $ca \equiv cb \mod n$ إذا و فقط إذا كان $a \equiv b \mod \frac{n}{d}$.

2. جد حلاً للنظام

$$\begin{aligned} 10x &\equiv 6 \mod 12 \\ 8x &\equiv 12 \mod 20 \end{aligned}$$

3. ما المقصود بعدد كارمايكل؟ أعطِ مثالاً على هذه الأعداد مع الإثبات.

4. اذا كان q,p عددين أوليين مختلفين، فاثبت ما يلي لكل a في $\mathbb{Z}^+$.

$$a^{pq} - a^p - a^q + a \equiv 0 \mod pq$$

5. أثبت وجود ما لانهاية من الأوليات p التي على الصيغة $p \equiv 1 \mod 4$.

الاختبار الفصلي الثاني ٢٤٣ ريض الفصل الاول ١٤٣٣-٣٤

ملاحظة: رتب أجوبتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

١- ليكن T_1 و T_2 نظامي رواسب مختزلين قياس n . أثبت تفصيلاً أن $|T_1|=|T_2|$.

٢- باستخدام أنظمة التطابقات ، أوجد أصغر عدد صحيح موجب x بحيث:

إذا قُسم على 6 يبقى 5 ، إذا قُسم على 7 يبقى 6 ، إذا قُسم على 8 يبقى 7 و إذا قُسم على 9 يبقى 8 .

٣- اذكر طريقة لفحص قابلية القسمة على كل من الأعداد 7 ، 11 ، 13 ثم برهن على صحتها.

٤- إذا كان $p>2$ عدداً أولياً ، فأثبت وجود حل للمعادلة $x^2 \equiv -1 \bmod p$ إذا و فقط إذا كان $p \equiv 1 \bmod 4$.

٥- ما هو عدد فرما F_n ؟ أثبت أن:

(أ) مرتبة الآحاد في F_n تساوي 7 لكل $n \geq 2$.

(ب) $F_n + 4$ عدد مؤلف لكل $n \geq 1$.

الاختبار الفصلي الثاني ٢٤٣ ريض الفصل الثاني ١٤٣١-٣٢

ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

١. أثبت أن كل عددين مختلفين من أعداد فرما أوليان نسبياً. هل هذا صحيح لأعداد مرسين؟ برر إجابتك.

٢. إذا كان $r_1, r_2, \cdots, r_n$ نظام رواسب تام قياس n ، فأثبت أن

$$ar_1 + b, ar_2 + b, \cdots, ar_n + b$$

هو أيضا نظام رواسب تام قياس n بشرط $(a,n)=1$. بيِّن أن العبارة خاطئة في حالة فقدان الشرط $(a,n)=1$.

٣. جد حلاً للنظام

$$\begin{aligned} 3x &\equiv 4 \mod 5 \\ x &\equiv 1 \mod 7 \\ x &\equiv 5 \mod 8 \end{aligned}$$

٤. جد عدداً مؤلفاً n بحيث $2^n \equiv 2 \mod n$ مع البرهان.

٥. استخدم مبرهنة أويلر لحساب مرتبتي الآحاد و العشرات للعدد 7^{2011} .

ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة

١. جد اختبار لقابلية القسمة على الأعداد 13,11,7 مع الإثبات. طبّق الاختبار على العدد 1126371524 .

٢. ما هي طريقة فرما في التحليل؟ اذكر الخوارزمية و المبرهنة التي تستند عليها مع البرهان.

٣. ليكن p عدداً أولياً و $0 \le n < p$. أثبت أن $\binom{n+p}{p} \equiv 1 \bmod p$.

٤. جد أصغر عدد صحيح يحقق النظام التالي، إن وُجد

$$x \equiv 3 \bmod 6$$
$$x \equiv 1 \bmod 8$$
$$x \equiv 12 \bmod 15$$

٥. أثبت وجود مالانهاية من الأوليات التي على الصيغة $4k+1$.

الاختبار الفصلي الثاني　　　نظرية الأعداد ٢٤٣ ريض　　　الفصل الثاني ٣٠-١٤٣١

ملحوظة : رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

١- أثبت أن $x^2+y^2 \equiv 0 \bmod 3$ إذا و فقط إذا كان $x \equiv 0 \bmod 3$ و $y \equiv 0 \bmod 3$.

٢- جد أقل عدد موجب x يحقق نظام التطابقات:

$$x \equiv 5 \bmod 9$$
$$x \equiv 7 \bmod 10$$
$$x \equiv 2 \bmod 15$$

٣- إذا كان S و T نظامي رواسب مختزلين قياس n ، فأثبت تفصيلاً أن $|S|=|T|$.

٤- لأي عدد أولي $p \geq 3$ ، أثبت أن $2^{p-1}.(p-2)! \equiv 1 \bmod p$.

الاختبار الفصلي الثاني ٢٤٣ ريض نظرية الأعداد الفصل الأول ٣٠-١٤٣١

ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة

١- جد جميع حلول المعادلة الدايوفانتينية $7x + 3y - 20z = 23$.

٢- إذا كان $n \equiv 3 \bmod 4$ ، فأثبت استحالة كتابة n كحاصل جمع مربعين كاملين.

٣- إذا كان S_1 , S_2 نظامي رواسب مختزلين قياس n ، فاثبت مفصلا أن $|S_1| = |S_2|$.

٤- جد حلا للنظام التالي (إن وُجد):

$$x \equiv 13 \bmod 15$$
$$x \equiv 18 \bmod 35$$
$$x \equiv 4 \bmod 21$$

٥- إذا كان p عدداً أولياً فردياً ، فأثبت أن $2(p-3)! \equiv -1 \bmod p$.

الاختبار الفصلي الثاني ٢٤٣ ريض الفصل الأول ١٤٢٩-١٤٣٠

نظرية الأعداد

١- بين صحة أو خطأ العبارات التالية مع البرهان:

i. إذا كان $a \equiv b \bmod n$، فإن $(a,n) = (b,n)$.

ii. إذا كان $ab \equiv ac \bmod n$، فإن $b \equiv c \bmod n$.

iii. لبكن S نظام رواسب مختزل قياس n. المجموعة $T = \{x : x = y + 2, y \in S\}$ هي نظام رواسب مختزل قياس n.

iv. إذا كان x_1, x_2 حلين للتطابق الخطي $ax \equiv b \bmod n$، فإن $n \mid (x_1 - x_2)$.

v. لأي عدد فردي n لدينا $2^{n-1} \equiv 1 \bmod n$.

٢- (أ) أكتب نص مبرهنة الباقي الصينية ثم برهنها.

(ب) عرّف المقصود بعدد كارمايكل، ثم أعطِ مثالا على هذا العدد مع البرهان.

٣- (أ) أثبت استحالة وجود عدد صحيح n بحيث $n^2 + 1$ يقبل القسمة على 11.

(ب) إذا كان $p \equiv 3 \bmod 4$، حيث p عدد أولي، فأثبت أن $[(\frac{p-1}{2})!]^2 \equiv 1 \bmod p$.

الاختبار الفصلي الثاني

نظرية الاعداد ٤٣ ريض

الفصل الثاني ١٤٢٧ - ١٤٢٨

ملاحظة هامة: ① رتب اجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الاسئلة
② يجب الاعتناء بوضوح خطك وطريقة عرض اجابتك مع تخصيص هامش اذا لزم الامر.

(١) (أ) اذا كان n فرديا، فاثبت ان $n = ab$ اذا وفقط اذا كان n هو فرق بين مربعين.

(ب) جد جميع الحلول غير المتطابقة للمعادلة التطابقية:

$$51x \equiv 33 \mod 60$$

(٢) (أ) جد طريقة لفحص قابلية قسمة عدد n على 7 مع الاثبات

(ب) اذا كان A و B نظامي رواسب مختزلين قياس n، فاثبت تفصيلاً أن $|A| = |B|$.

(٣) (أ) جد اصغر عدد موجب n يقبل القسمة على 11 بحيث اذا قسم على 7 بقي 5 واذا قسم على 9 بقي 2.

(ب) عرّف المقصود بعدد كارمايكل مع اعطاء مثال على ذلك تفصيلاً.

الاختبار الفصلي الثاني — ٢٤٣ ريض نظرية الاعداد — الفصل الاول ١٤٢٧ - ١٤٢٨

ملاحظة : ① رتب اجابتك في الدفتر حسب ترتيب الاسئلة
② اعتن بوضوح خطك وعرض اجابتك .

(١) (أ) اذا كان $a \equiv b \mod n$ فاثبت أن
$a^m \equiv b^m \mod n$ لكل $m \geq 1$

(ب) اذا كان n عدداً فردياً وكان $a_1, a_2, \ldots, a_n$
نظام رواسب تام قياس n فاثبت ان

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0 \mod n$$

(٢) (أ) جد حلاً للنظام

$$x \equiv 1 \mod 7$$
$$x \equiv 2 \mod 8$$
$$x \equiv 3 \mod 9$$

على أن يكون $|x|$ (القيمة المطلقة للعدد x) أصغر ما يمكن .

(ب) احسب باقي قسمة العدد 11^{2006} على 12

(٣) (أ) أثبت أن العدد n أولي اذا وفقط اذا كان $(n-1)! \equiv -1 \mod n$

(ب) اذا كان p ، q اوليين مختلفين فاثبت أنه لاي عدد صحيح a
$$a^{pq} - a^p - a^q + a \equiv 0 \mod pq \ .$$

الاختبار الفصلي الثاني لمقرر نظرية الأعداد الفصل الأول ١٤٢٦-١٤٢٧هـ

السؤال الأول :

حل نظام التطابقات الخطية :

$x \equiv 19 \pmod{21}$ ، $x \equiv 5 \pmod{14}$ ، $x \equiv 1 \pmod{6}$

السؤال الثاني

(أ) أثبت أنه يوجد نظير ضربي للعدد الصحيح a قياس n إذا وفقط إذا كان $(a, n) = 1$.

(ب) احسب نظير 5 قياس 26 .

السؤال الثالث :

إذا كان p عدداً أولياً فردياً فأثبت أن للتطابق $x^2 \equiv -1 \pmod{p}$ حل إذا وفقط إذا كان $p \equiv 1 \pmod{4}$.

السؤال الرابع :

إذا كان $p \equiv 3 \pmod{4}$ عدداً أولياً وكان $a^2 + b^2 \equiv 0 \pmod{p}$ فأثبت أن $a \equiv b \equiv 0 \pmod{p}$.

السؤال الخامس :

(أ) إذا كان p عدداً أولياً لا يقسم a وكان $n \equiv m \pmod{p-1}$ فأثبت أن $a^n \equiv a^m \pmod{p}$.

(ب) استخدم الفقرة (أ) لحساب $2222^{5555} + 5555^{2222}$ قياس العدد 7 .

د. ع

بسم الله الرحمن الرحيم

الأختبار الفصلي الثاني الفصل الدراسي الثاني

243 ريض 1425\1424

السؤال الأول:

(أ) أثبت أن الأعداد $a_1, a_2, \ldots, a_n$ تمثل نظام رواسب تام قياس n إذا و فقط إذا كان $a_i \not\equiv a_j \pmod n$ لكل $i \neq j$ ، $1 \leq i, j \leq n$.

(ب) حل النظام :

$$x \equiv 19 \pmod{21} \quad , \quad x \equiv 5 \pmod{14} \quad , \quad x \equiv 1 \pmod 6$$

السؤال الثاني:

(أ) إذا كان $n \in Z^+$, $a \in Z$ حيث $(n, a) = 1$ وكان $ord_n(a) = k$ فأثبت أنه إذا كان $m \in Z^+$ فإن $ord_n(a^m) = \dfrac{k}{(k, m)}$.

(ب) إذا كان p عدداً أولياً فردياً و كانت $ord_p(a) = 3$ فأثبت أن $ord_p(a+1) = 6$.

السؤال الثالث:

(أ) أثبت أن $\sum\limits_{d \mid n} \varphi(d) = n$ لكل $n \geq 1$.

(ب) أثبت أن $\tau(n)$ عدد فردي إذا وفقط إذا كان n مربعاً كاملاً .

(جـ) أثبت أنه إذا كان $a, b \in Z^+$ و $(a, b) = 1$ فإن $a^{\varphi(b)} + b^{\varphi(a)} \equiv 1 \bmod (ab)$.

الاختبار الفصلي الثاني

٢٤٢ ريض

مقدمة في نظرية الاعداد

الفصل الدراسي الاول

١٤٤٤ - ١٤٤٥

ملاحظة: عليك الاعتناء بوضوح خطك مع ترتيب اجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الاسئلة

١- ليكن $1 < n$ عدداً فردياً و $a_1, a_2, \dots, a_n$ نظام رواسب تام قياس n. اثبت ان

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \equiv 0 \mod n$$

٢- نعتبر نظام التطابقات

$$x \equiv 12 \mod 15$$
$$x \equiv 9 \mod 21$$
$$x \equiv 2 \mod 35$$

(أ) هل النظام متسق؟ برر اجابتك

(ب) هل يوجد حل للنظام؟ في حالة وجود حل: احسب جميع الحلول الموجبة.

٣- (أ) عرّف المقصود بعدد كارمايكل

(ب) أثبت ان العدد $1729 = 7 \times 13 \times 19$ هو عدد كارمايكل باستخدام التعريف في الفقرة (أ)

٤- (أ) اذا كانت g دالة ضربية وكانت

$$F(n) = \sum_{d \mid n} g(d)$$

فاثبت ان F ضربية.

(ب) اثبت ان الدالة σ ضربية ثم جد صيغة لها بدلالة قوى الاوليات.

الاختبار الفصلي الثاني	٤٤٣ ريض	الفصل الثاني
	نظرية الأعداد	١٤٢٢ - ١٤٢٣

ملاحظة: ① رتب اجاباتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة
② اعتن بوضوح خطك مع تخصيص هوامش اذا احتجت الى ذلك

① (أ) جد جميع الحلول الموجبة (إن وجدت) للمعادلة الدايوفانتية

$$14x - 56y = 42$$

(ب) جد جميع الحلول غير المتطابقة (إن وجدت) للنظام

$x \equiv 7 \mod 8$ ، $x \equiv 3 \mod 12$ ، $x \equiv 9 \mod 18$

② (أ) اذا كان $a \equiv 3 \mod 4$ فأثبت استحالة كتابة a على الصورة $a = x^2 + y^2$

(ب) اذا كان $r_1, r_2, \dots, r_n$ نظام رواسب تام قياس n فهل صحيح أن $cr_1, cr_2, \dots, cr_n$ نظام رواسب تام قياس n لأي عدد صحيح $c \geq 1$ ؟ برر اجابتك

③ (أ) ليكن p ، q عددين اوليين مختلفين بحيث أن

$a^p \equiv a \mod q$ ، $a^q \equiv a \mod p$

فأثبت أن $a^{pq} \equiv a \mod pq$

(ب) اكتب نص مبرهنة ولسن ثم برهنها .