جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

الاختبار النهائي ٤٣٠ رياضيات
نظرية الأعداد

الفصل الثاني ١٤٢٦/١٤٢٥هـ
المدة: ساعتان

السؤال الأول:

(أ) ليكن $a,b\in\mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفراً. إذا كان $d=(a,b)$ فأثبت أن $d=ax+by$ حيث $x,y\in\mathbb{Z}$.

(ب) إذا كان $(a,b)=(a,c)=1$ فأثبت أن $(a,bc)=1$.

السؤال الثاني:

(أ) إذا كان كل من p و $8p-1$ عدداً أولياً فأثبت أن $8p+1$ عدداً مؤلفاً [ارشاد: استخدم خوارزمية القسمة لقسمة p على 3]

(ب) إذا كان $a_i\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$ لكل $1\le i\le k$ فأثبت أن $a_1a_2...a_k\equiv 1(\mathrm{mod}\ 3)$.

(ج) أثبت أن عدد الأعداد الأولية التي على الصورة $3k+2$ عدداً غير منته.

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان p عدداً أولياً وكان $0\le n<p$ فأثبت أن $\binom{n+p}{p}\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$.

(ب) إذا كان $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$ و $c\equiv d(\mathrm{mod}\ m)$ وكان $(c,m)=(d,m)=1$ فأثبت أن $ac^{-1}\equiv bd^{-1}(\mathrm{mod}\ m)$.

السؤال الرابع:

(أ) إذا كان $a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}$ نظام رواسب مختزل قياس n وكان $(a,n)=1$ فأثبت أن $aa_1,aa_2,...,aa_{\varphi(n)}$ نظام رواسب مختزل قياس n.

(ب) إذا كان $a,n\in\mathbb{Z}^+$ فأثبت أن $a^{\varphi(n)}\equiv 1(\mathrm{mod}\ n)$ إذا وفقط إذا كان $(a,n)=1$

(ج) إذا كان $n\in\mathbb{Z}$ فأثبت أن $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}\in\mathbb{Z}$.