الاختبار النهائي ٢٤٣ ربض الفصل الثاني ١٤٣٢-٣٣

ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

١- إذا كان $d=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ ، حيث $n\geq 2$ ، فأثبت تفصيلاً وجود أعداد صحيحة $x_1,x_2,\ldots,x_n$ بحيث $d=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$.

٢- جد جميع ثلاثيات فيثاغورس البدائية وغير البدائية (x,y,z) التي فيها $x=55$.

٣- برهن على وجود نظير ضربي للعدد a قياس n إذا و فقط إذا كان $(a,n)=1$.

٤- إذا كان $r_1,r_2,\ldots,r_{\varphi(n)}$ نظام رواسب مختزل قياس n ، حيث $n\geq 2$ ، فبرهن أن $\sum_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \equiv \frac{n\varphi(n)}{2} \bmod n$ ، حيث φ هي دالة أويلر .

٥- عرِّف دالة موبياس μ . أثبت أن μ ضربية ثم أثبت $\sum_{d|n}\mu(d)=0$ لكل $n>1$.

٦- (أ) أثبت أن $\sum_{d|n}\frac{1}{d}=\frac{\sigma(n)}{n}$ ، حيث $\sigma(n)$ تعني مجموع قواسم n .

(ب) استخدم (أ) لإثبات أن $H(n)$ ضربية ، حيث $1/H(n)=(1/\tau(n))\sum_{d|n}\frac{1}{d}$ و $\tau(n)$ تعني عدد قواسم n .

٧- برهن أن n عدد أولي إذا و فقط إذا كان $(n-1)!\equiv -1 \bmod n$.

٨- جد العددين a و b اللذين يحققان $a+b=202$ و $[a,b]=3240$.

$1 \mid a-n$

$1=(a-n)k$

$ka-kn=1$

$ka=n$

n

ka

$\frac{1}{k}a=n$ $a\frac{1}{k}=n$

$a \mid a, n$ $n=ka$

الاختبار النهائي ٢٤٣ ريض الفصل الأول ١٤٣٢-٣٣

ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

١. جد جميع ثلاثيات فيثاغورس البدائية و غير البدائية التي فيها x أو y يساوي 20 .

٢. جد جميع قيم n التي تحقق $\varphi(n)=12$.

٣. لتكن $g(n)=\sum_{d|n} f(d)$. أثبت أن g ضربية إذا وفقط إذا كانت f ضربية.

٤. إذا كانت $\sum_{d|n} f(d)=\frac{\tau(n)}{n}$ ، فأحسب $f(12)$.

٥. ليكن n عدداً زوجياً. أثبت أن n عدد تام إذا و فقط إذا كان على الصورة $n=2^{p-1}(2^p-1)$ ، حيث p أولي و 2^p-1 أولي أيضا.

٦. جد جميع الحلول غير المتطابقة للمعادلة $117x\equiv 141 \bmod 150$.

٧. أثبت وجود ما لانهاية من الأوليات p على الصورة $p=4k+1$ ، حيث $k\in\mathbb{Z}$.

٨. لكل عدد $n\geq 2$ أثبت وجود أوليين متتاليين p_k ، p_{k+1} بحيث $p_{k+1}-p_k\geq n$.

الاختبار النهائي ٢٤٣ ريض الفصل الثاني ١٤٣١-٣٢

تنبيه: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة

١. جد جميع الثلاثيات الفيثاغورسية (x,y,z) التي فيها قيمة x أو y يساوي 34 .

٢. لكل عدد صحيح $n \geq 1$ اجعل $\alpha(n)$ الوسط الحسابي لقيم قواسم n.

(أ) أكتب صيغة للدالة α بدلالة σ و τ.

(ب) أثبت أن α ضربية

(ت) احسب $\alpha(1000)$

٣. أثبت أن $n = \sum_{d|n} \varphi(d)$ ، حيث φ دالة أويلر، ثم بيّن أن φ يجب أن تكون ضربية.

٤. ليكن n عدداً زوجياً تاماً. أثبت أن $n = 2^{p-1}(2^p - 1)$ حيث p أولي و $2^p - 1$ أولي أيضا.

٥. إذا كان $n \geq 3$ عدداً فردياً، و $r_1, r_2, \ldots, r_{\varphi(n)}$ نظام رواسب مختزل قياس n ، فأثبت أن $\sum_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \equiv 0 \bmod n$ ، حيث φ دالة أويلر.

٦. لأي عدد أولي p و لأي عدد صحيح $n \geq 2$ أثبت أن $\sqrt[n]{p}$ عدد غير نسبي.

٧. جد طريقة لفحص قابلية القسمة على الأعداد 7,11,13 مع الإثبات.

٨. لكل عدد صحيح $n \geq 2$ ، أثبت أن $(n-1)! \equiv -1 \bmod n$ إذا وفقط إذا كان n عدداً أولياً.

الاختبار النهائي   ٢٤٣ ريض   الفصل الأول ١٤٣١-٣٢

ملحوظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

١. أثبت أن $\sqrt{2}+\sqrt{5}$ عدد غي نسبي.

٢. ما المقصود بشبه الأولي للأساس b ؟ أعطِ مثالاً على شبه أولي للأساس 2 مع الإثبات.

٣. جد جميع الأعداد الأولية p بحيث يكون العدد $17p+1$ مربعاً كاملاً.

٤. إذا كان n عدداً زوجياً تاماً، فأثبت وجود أولي p بحيث $n=2^{p-1}(2^p-1)$ و 2^p-1 أولي.

٥. جد جميع ثلاثيات فيثاغورس البدائية (x,y,z) التي فيها $x=33$.

٦. أثبت أن $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$ ، ثم استنتج أن دالة أويلر φ ضربية.

٧. إذا كان $n\geq 3$ و كان $r_1,r_2,\dots,r_{\varphi(n)}$ نظام رواسب مختزل قياس n، فأثبت أن $\sum_{i=1}^{\varphi(n)} r_i \equiv 0 \bmod n$.

٨. إذا كان $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\cdots p_r^{a_r}$ هو تحليل n إلى قواه الأولية و كانت τ دالة عدد قواسم n، فأثبت أن $\sum_{d|n}\mu(d)\tau(d)=(-1)^r$ ،حيث μ دالة موبياس.

ملحوظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة

١- جد جميع الأعداد n بحيث $\varphi(n)=18$ مع توضيح خطوات الحل.

٢- إذا كان (x,y,z) ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً، فأثبت أن z دائماً عدد فردي و أن z لا يمكن أن يساوي 23 .

٣- لتكن τ دالة عدد القواسم. أثبت أن $\tau(n)$ عدد فردي إذا و فقط إذا كان n مربعاً كاملاً.

٤- أثبت أن $n=\sum_{d|n}\varphi(d)$ ، ثم استخدم هذه المساواة لبيان أن φ ضربية.

٥- برهن وجود مالانهاية من الأوليات p على الصيغة $p\equiv 1 \bmod 4$.

٦- أكتب نص مبرهنة أويلر ثم برهنها.

٧- اذا كان $\sum_{d|n}f(d)=n^2$ ، حيث f دالة عددية، فأحسب قيمة $f(24)$.

٨- ليكن $F_n=2^{2^n}+1$ عدد فرما، حيث $n\geq 0$. أثبت أن $F_0F_1\cdots F_{n-1}=F_n-2$ لكل $n\geq 1$

ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة

١- جد جميع الثلاثيات البدائية (x, y, z) التي فيها $x = 33$.

٢- إذا كان $a_1, a_2, \cdots, a_{\varphi(n)}$ نظام رواسب مختزل قياس n حيث $n > 1$ ، فأثبت أن
$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)} a_i \equiv \frac{n\varphi(n)}{2} \bmod n .$$

٣- عرِّف دالة موبياس μ ، ثم أثبت أنها ضربية. هل هي ضربية تماماً ؟ برر إجابتك.

٤- جد جميع الأعداد n التي تحقق $\varphi(n) = 8$, مع الشرح.

٥- إذا كان $(a,b) = 1$ و $c \mid (a+b)$ ، فاثبت أن $(a,c) = (b,c) = 1$.

٦- لتكن $a_{1,}, a_2, \cdots, a_n$ اعداداً أولية نسبياً مثنى مثنى. أثبت أن $[a_1, a_2, \cdots, a_n] = a_1 a_2 \cdots a_n$.

٧- برهن على وجود مالانهاية من الأوليات p على الصورة $p \equiv 1 \bmod 4$.

٨- إذا كان n عدداً تاماً زوجياً و كان $d \mid n$ ،حيث $1 < d < n$ ، فأثبت أن d عدد ناقص.

جامعة الملك سعود

كلية العلوم - قسم الرياضيات

الاختبار النهائي - لمقرر ٢٤٣ريض

الفصل الثاني ١٤٢٦ / ١٤٢٧هـ

الزمن/ ثلاث ساعات

السؤال(١):

(أ) أثبت أن $(n!+1,(n+1)!+1)=1$.

(ب) إذا كان $a,b \in \mathbb{Z}$ ليس كلاهما صفرا فأثبت أنه يوجد $x_0,y_0 \in \mathbb{Z}$ بحيث يكون $(a,b)=ax_0+by_0$.

(ج) إذا كان $a^3 \mid b^2$ فأثبت أن $a \mid b$. وإذا كان $b^3 \mid a^2$ فهل صحيح أن $a \mid b$؟

(د) جد جميع الأعداد الأولية p بحيث يكون $7p+4$ مربعا كاملا.

السؤال(٢):

(أ) أثبت أن $\tau(n)$ عددا فرديا إذا وفقط إذا كان n مربعا كاملا.

(ب) أثبت أن $(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 \equiv 0 \pmod 9$.

(ج) استخدم مبرهنة الباقي الصينية لإيجاد جميع الأعداد بين 3000 و 5000 التي بقسمتها على 7، 11، 13 يكون الباقي 1، 3، 5 على التوالي.

(د) إذا كان العدد $n=72x20y2$ يقبل القسمة على 72 فاحسب قيمة كل من الرقمين x و y.

السؤال(٣):

(أ) ليكن p أوليا فرديا. أثبت أن التطابق $x^2 \equiv -1 \pmod p$ له حل إذا وفقط إذا كان $p \equiv 1 \pmod 4$.

(ب) ليكن p أوليا فرديا. إذا كان q قاسما أوليا للعدد $M_p=2^p-1$ فأثبت أن $q=2kp+1$ حيث $k \in \mathbb{Z}^+$.

(ج) استخدم الفقرة (ب) لمعرفة فيما إذا كان العدد $M_{23}=2^{23}-1$ عددا أوليا أم مؤلفا.

(د) لنفرض أنه يمكن كتابة أي عدد زوجي $n>2$ كمجموع عددين أوليين. استخدم هذا الحدس لإثبات أنه يمكن كتابة أي عدد فردي أكبر من 7 كمجموع ثلاثة أعداد أولية فردية.

السؤال(٤):

(أ) أثبت أن $6601=7\cdot 23\cdot 41$ عدد كارمايكل.

(ب) أثبت أن $\varphi(2n)=\varphi(n)$ إذا وفقط إذا كان n فرديا.

(ج) أثبت أن $\sum_{d\mid n}\varphi(d)=n$.

(د) جد جميع ثلاثيات فيثاغورس البدائية حيث $y=12$.

الاختبار النهائي | ٢٤٢ ريض | الفصل الاول

نظرية الاعداد | ١٤٤٤ - ١٤٤٥

ملاحظة : (١) رتب اجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الاسئلة

(٢) عليك الاعتناء بوضوح الخط وعرض الاجابة .

١- (أ) لكل عدد اولي $p \geq 3$ اثبت وجود ثلاثي فيثاغورسي (x, y, z) بحيث $x = p$.

(ب) اثبت وجود ما لانهاية من الثلاثيات الفيثاغورسية البدائية (x, y, z) بحيث $z = y+1$.

٢- (أ) عرّف دالة موبياس μ ثم اثبت انها ضربية .

(ب) برهن أن $\sum_{d|n} \mu(d)\phi(d) = \prod_{\substack{p|n \\ \text{اولي } p}} (2-p)$ ، حيث ϕ هي دالة أويلر .

٣- (أ) احسب جميع قيم n التي تحقق $\phi(n) = 28$

(ب) اذا كان p ، q عددين اوليين فرديين بحيث $q \mid M_p$ ، حيث M_p هو عدد مرسين ، فأثبت أن $q = 2kp+1$ ، حيث $k \geq 1$.

٤- (أ) جد مرتبتي الآحاد والعشرات للعدد 7^{4444}

(ب) جد تمثيل العدد 125 للأساس 7 .

٥- (أ) برهن على وجود ما لانهاية من الاوليات p ، حيث $p \equiv 1 \bmod 4$.

(ب) اذا كان $a^2 \mid b^3$ ، فهل صحيح أن $a \mid b$ ؟ علل اجابتك .

جامعة الملك سعود - كلية العلوم - قسم الرياضيات - الفصل الثاني ١٤٢٤/١٤٢٣

الاختبار النهائي لمقرر ٢٤٣ريض الزمن ١٨٠ دقيقة الأثنين ١٧-١١-١٤٢٣

السؤال الأول:

(أ) **حل التطابق** $64x \equiv 897 (\mathrm{mod}\, 1001)$.

(ب) **ليكن** $F(n) = \sum_{d|n} g(d)$ **. أثبت أن** g **ضربية إذا وفقط إذا كانت** F **ضربية.**

(ج) إذا كان p عدداً أولياً بحيث $p \equiv 3 \ (\mathrm{mod}\, 4)$ فأثبت أن $\frac{p-1}{2}$ عدداً فردياً. ثم استخدم مبرهنة ويلسن لإثبات أن $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, p)$.

السؤال الثاني:

(أ) إذا كان (x, y, z) ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً فأثبت أن $(x, z) = 1$.

(ب) جد جميع الثلاثيات الفيثاغورسية التي فيها $y = 16$.

(ج) جد ثلاثياً فيثاغورسياً بدائياً (x, y, z) إذا كان $x = p > 2$ عدداً أولياً.

السؤال الثالث:

(أ) إذا كان $x^2 + y^2 = p^2$ حيث p عدد أولي فردي و كان x, y عددين صحيحين، فأثبت أن $p \equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, 4)$.

(ب) إذا كان $n \geq 1$ عدداً صحيحاً و وجد عدد صحيح a يحقق: $a^{\frac{n-1}{p}} \not\equiv 1 \ (\mathrm{mod}\, n)$ و $a^{n-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, n)$ لكل قاسم أولي p للعدد $n-1$ فبرهن أن n عدد أولي.

(ج) **إذا كان** p **عدداً أولياً، فأثبت أن** $\binom{2p}{p} \equiv 2 (\mathrm{mod}\, p)$.

السؤال الرابع:

(أ) حل النظام

$$x \equiv 8 (\mathrm{mod}\, 15)$$
$$x \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 10)$$
$$x \equiv 5 (\mathrm{mod}\, 6)$$

(ب) إذا كان a, b عددين ليس كلاهما صفراً، فأثبت أن القاسم المشترك الأعظم لهما يمكن كتابته كتركيب خطيا منهما.

(ج) هل عكس الفقرة (ب) صحيحاً؟ ماذا لو كان العددان أوليين نسبياً؟