الاختبار النهائي 243 ريض الفصل الاول 1435-36

ملاحظة : رتب أجوبتك في الدفتر بحسب ترتيب ورود الاسئلة.

1- جد جميع الثلاثيات الفيثاغورسية (x,y,z) التي فيها $x=42$.

2- أثبت تفصيلاً أن دالة أويلر φ ضربية.

3- لتكن $g(n)=\sum_{d|n}\tau(d)\mu(d)$ ، حيث τ دالة عدد القواسم و μ دالة موبياس. بيِّن أن g ضربية. احسب صيغة لها ، ثم أثبت $g(m)=g(n)$ اذا كان للعددين m و n نفس العدد من القواسم الاولية المختلفة.

4- لتكن $f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1x+a_0$ كثيرة حدود معاملاتها أعداد صحيحة. أثبت أن أي جذر حقيقي لها ، إما أن يكون عدداً صحيحاً أو غير نسبي.

5- أثبت أن $2^{2n}\equiv 3n+1 \mod 9$ لكل $n\geq 1$.

6- لأي عدد صحيح n، أثبت أن المقدار $\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}$ هو عدد صحيح دائماً.

7- برهن أن $(n-1)!\equiv -1 \mod n$ إذا و فقط إذا كان n أولياً.

8- إذا كان n زوجياً ، فأثبت أنه تام ، إذا و فقط إذا كان $n=2^{p-1}(2^p-1)$ ، حيث p أولي و 2^p-1 أولي ايضا.

[redacted]

لا يكتب في
هذا الهامش

إجابة السؤال الأول:

لنفرض أن m,n,t أعداد حقيقية موجبة $m>n$ و $(m,n)=1$ و $m \not\equiv n \mod 2$

$$42 = x = t(m^2-n^2)$$

بما أن $42=(2)(21)$ و m^2-n^2 عدد فردي لأن $m \not\equiv n \mod 2$

فإن $2|t$ لأن $2 \nmid m^2-n^2$.

إذاً $t=2k$ فيكون $42 = 2k(m^2-n^2)$

$$\Leftrightarrow 21 = k(m^2-n^2)$$

إذاً، $k \mid 21 = 3\times 7$

الحالة الأولى: $k=1$ فيكون لدينا ~~$21 = m^2-n^2 = (m-n)(m+n)$~~

$$(3)(7) = 21 = m^2-n^2 = (m-n)(m+n)$$

فلدينا حالتان هنا:

الأولى: $m-n=1$, $m+n=21$

$\Longrightarrow m=11$, $n=10$

$\Longrightarrow y=(2)((2)(11)(10)) = 440$

و $z=(2)(11^2+10^2) = 442$

والثلاثي الذي حصلنا عليه في هذه الحالة هو: $(42,440,442)$

الثانية: $m-n=3$, $m+n=7$

$\Longrightarrow m=5$, $n=2$

$\Longrightarrow y=(2)((2)(5)(2)) = 40$

و $z=(2)(5^2+2^2) = 58$

والثلاثي في هذه الحالة هو $(42,40,58)$

الحالة الثانية: $k=3$ فيكون

$$7 = m^2-n^2 = (m-n)(m+n)$$

بما أن 7 عدد أولي فليس لدينا سوى الحالة

$$m+n=7\ ,\quad m-n=1$$
$$\Longrightarrow\ m=4\ ,\ n=3$$
$$\Longrightarrow\ y=((2)(3))((2)(4)(3))=144$$
و $z=((2)(3))(4^2+3^2)=150$

إذاً، الثلاثي في هذه الحالة هو $(42, 144, 150)$

• الحالة الثالثة:

$k=7$، ~~ومنه~~ فيكون،

$$3=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$$
بما أن 3 أولي، فليس لدينا سوى

$$m+n=3\ ,\quad m-n=1$$
$$\Longrightarrow\ m=2\ ,\ n=1$$
$$\Longrightarrow\ y=((2)(7))((2)(2)(1))=56$$
و $z=((2)(7))(2^2+1^2)=70$

والثلاثي هنا هو $(42, 56, 70)$

نلاحظ أنه لا يمكن $k=21$؛ لأنه لو كان كذلك لحصلنا على

$$1=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$$
$$\Longrightarrow\ m+n=m-n=1$$
$$\Longrightarrow\ m=1\ ,\ n=0$$
ولكن هذا يناقض فرضنا وهو أن m,n أعداد موجبة.

إذاً، الثلاثيات المطلوبة هي،

$(42,440,442)$, $(42,40,58)$, $(42,144,150)$,
$(42,56,70)$.

لا يكتب في
هذا الهامش

إجابة السؤال الثاني:
ليكن m, n عددان موجبان أوليين ~~...~~ نسبياً.
لنعتبر المجموعة:
~~$\{i+jm \mid 0\le i\le n-1, ...\}$~~

$$S=\{i+jm \mid 0\le i\le m-1,\ 0\le j\le n-1,\ (i,j)\ne(0,0)\}.$$

~~...~~

نلاحظ أن عدد عناصر المجموعة هو: $mn-1$

كما أن لكل $0\le i\le n-1$ و $0\le j\le n-1$ لدينا

لتثبيت ذلك

$$0\le i+jm\le (m-1)+(n-1)m = mn-1$$

كذلك جميع عناصر المجموعة مختلفة (وموجبة)، لنفرض العكس، أي أنه يوجد ~~...~~ i_1, j_1, i_2, j_2 بحيث

~~...~~: $0\le i_1, i_2\le m-1$ و $0\le j_1, j_2\le n-1$

$$i_1+j_1m=i_2+j_2m$$

$$\Longleftrightarrow (i_1-i_2)=(j_2-j_1)m$$

إذاً: $m \mid i_1-i_2$

ولكن:

$$0-(m-1)\le i_1-i_2\le (m-1)-0$$

أي:

$$|i_1-i_2|\le m-1<m$$

إذاً لابد أن يكون $i_1-i_2=0$ وإلا $|i_1-i_2|\ge m$

إذاً: $i_1-i_2=0 \Longleftrightarrow \boxed{i_1=i_2}$

إذاً: $0=(j_2-j_1)m$

لأن $m\ne 0$ $\Longrightarrow j_2-j_1=0 \Longleftrightarrow \boxed{j_1=j_2}$

[redacted]

إذاً، S هي مجموعة جميع الأعداد ~~الصحيحة~~ الموجبة الأولية مع mn.

سنبرهن التمهيدية التالية:

• تمهيدية: ليكن a عدداً صحيحاً موجباً،

$$(mn,a)=1 \iff (m,a)=1 \text{ و } (n,a)=1$$

البرهان:

إثبات الاتجاه ($\Rightarrow$):

بما أن $(mn,a)=1$، فإن معادلة بيزو، يوجد x,y بحيث:

$$mnx+ay=1$$
$$\iff m(nx)+ay=1$$

أي أن 1 تركيب خطي لـ a, m

إذاً، $(m,a)=1$

وبالمثل $(n,a)=1$

إثبات الاتجاه ($\Leftarrow$):

بفرض أن $(m,a)=1$ و $(n,a)=1$

فإن معادلة بيزو، يوجد x,y,s,t بحيث

$$mx+ay=1$$
و
$$ns+at=1$$

بضرب المعادلتين:

$$(mx+ay)(ns+at)=1$$
$$\Rightarrow mn(xs)+a(aty+nsy+mxt)=1$$

إذاً، $(mn,a)=1$

لنعد الآن إلى برهان أن ϕ دالة ضربية.

عدد الأعداد الأولية نسبياً في المجموعة S هو $\phi(nm)$

ومن ناحية أخرى، ليكن العدد $i+jm$ أولياً

لا يكتب في
هذا الهامش

نسبياً مع nm يجب أن يكون أولياً نسبياً مع كل من m, n.

$i+jm$ يكون أولياً نسبياً مع m إذا وفقط إذا كان $(i,m)=1$

~~[illegible]~~

إذاً لدينا $\phi(m)$ قيمة ممكنة لـ i

وفي كل متتابعة من النوع

$$i,\ i+m,\ i+2m, \ldots, i+(n-1)m$$

~~[illegible] $\phi(n)$ [illegible]~~

لدينا $\phi(n)$ عدد أولي نسبياً مع n، وذلك لأن عناصر هذه المتتابعة
تشكل نظام رواسب تام قياس n.
لأن ~~[illegible]~~ $0, 1, 2, \ldots, n-1$ هي نظام رواسب تام

~~[illegible]~~

قياس n، وبالتالي ~~[illegible]~~

$$i,\ i+m, \ldots, i+(n-1)m$$

أيضاً نظام رواسب تام قياس n لأن $(m,n)=1$

إذاً لدينا $\phi(m)$ من هذه المتتابعات، وفي كل منها

$\phi(n)$ عدد أولي نسبياً مع n

إذاً، باستعمال النظرية المبرهنة سابقاً،
لدينا $\phi(m)\phi(n)$ عدد أولي نسبياً مع mn

إذاً: $\phi(nm)=\phi(n)\phi(m)$ ، $(m,n)=1$.

إجابة السؤال الثالث:

بما أن μ و τ دالتان ضربيتان فإن $\tau\mu$ دالة ضربية، ومنه $g(n)=\sum_{d|n}(\tau\mu)(d)$ دالة ضربية

ليكن p عدداً أولياً و α عدداً موجباً، فلدينا:

$$g(p^\alpha)=\sum_{d|p^\alpha}\tau(d)\mu(d)$$

$$=\sum_{i=0}^{\alpha}\tau(p^i)\mu(p^i)$$

$$=\tau(1)\mu(1)+\tau(p)\mu(p)$$

لأن: $\mu(p^i)=0$ لكل $i\geq 2$

إذاً:

$$g(p^\alpha)=\tau(1)\mu(1)+\tau(p)\mu(p)$$
$$=1+(2)(-1)$$
$$=-1$$

ليكن $n=\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}$ تمثيل n كحاصل ضرب أعداد أولية

فلدينا:

$$g(n)=g\left(\prod_{i=1}^{s}p_i^{\alpha_i}\right)=\prod_{i=1}^{s}g(p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{s}(-1)$$
$$=(-1)^s.$$

~~إذا كان لـ m, n نفس العدد~~

لنفرض أن n, m عددان موجبان لهما نفس العدد من القواسم الأولية المختلفة ولكن s

فمن الصيغة ~~المحسوبة~~ التي تم حسابها قبل قليل لدينا:

$$g(n) = (-1)^s = g(m)$$

إجابة السؤال الرابع:

غير صحيح.

لنفرض أن α جذر نسبي لكثيرة الحدود المعطاة

إذاً $\alpha = \frac{p}{q}$ و $(p,q)=1$ و $q \neq 0$ و 1 و $|q|>1$.

فلدينا:

$$\left(\frac{p}{q}\right)^n + \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} a_{n-1} + \cdots + \left(\frac{p}{q}\right) a_1 + a_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^n = -\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} a_{n-1} + \cdots + \frac{p}{q} a_1 + a_0\right)$$

$$\Leftrightarrow p^n = -q^n\left(\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} a_{n-1} + \cdots + \frac{p}{q} a_1 + a_0\right)$$

$$= -q\left(p^{n-1} a_{n-1} + \cdots + p q^{n-1} a_1 + q^{n-1} a_0\right)$$

بما أن $p^{n-1} a_{n-1} + \cdots + q^{n-1} a_0$ عدد صحيح فإن $q \mid p^n$

[redacted]

لا يكتب في هذا الهامش

لكن r قاسماً أولياً لـ q .

إذاً $\cancel{r\mid p^n}$ $r\mid p^n = \overbrace{(p)(p)\cdots(p)}^{n\text{ مرة}}$

لأن r أولي $\Longrightarrow r\mid p$

ولكن هذا يناقض كون $(q,p)=1$

إذاً: جذور كثيرة الحدود المعطاة إما أن تكون غير نسبية أو أعداد صحيحة.

إجابة السؤال الخامس:

ليكن $n\geq 1$.

من ذات الحدين لدينا:

$$2^{2n} = (3-1)^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (3^i)(-1)^{2n-i}$$

بما أن $9\mid 3^i$ لكل $i\geq 2$ فلدينا:

$$2^{2n} = \sum_{i=0}^{2n} \binom{2n}{i} (3^i)(-1)^{2n-i}$$

$$\equiv \binom{2n}{0}(3^0)(-1)^{2n-0} + \binom{2n}{1}(3^1)(-1)^{2n-1} \mod 9$$

$$\equiv 1 + (2n)(3)(-1) \mod 9$$

$$\equiv 1 - 6n \mod 9$$

$$\equiv 1 - 6n + 9n \mod 9$$

$$\equiv 1 + 3n \mod 9 .$$

إجابة السؤال السادس :

$$\frac{n^5}{5}+\frac{n^3}{3}+\frac{7n}{15}=\frac{n}{15}\left(3n^4+5n^2+7\right)$$

سنثبت أولاً أن $3 \mid n(3n^4+5n^2+7)$

إذا كان $3 \nmid n$

فمن نظرية فيرما الصغرى لدينا :

$$n^2=n^{3-1}\equiv 1 \mod 3$$

إذاً :

$$3n^4+5n^2+7\equiv 0+5(1)+7 \mod 3$$

$$\equiv 12 \mod 3$$

$$\equiv 0 \mod 3$$

وإذا كان $3 \mid n$ ، فإن $3 \mid n(3n^4+5n^2+7)$.

إذاً لأي قيمة لـ n ، لدينا $3 \mid n(3n^4+5n^2+7)$.

الآن سنبرهن أن $5 \mid n(3n^4+5n^2+7)$

إذا كان $5 \mid n$ ، فيكون $5 \mid n(3n^4+5n^2+7)$

وإذا كان $5 \nmid n$ ، فمن نظرية فيرما الصغرى لدينا :

$$n^4=n^{5-1}\equiv 1 \mod 5$$

ويكون : $3n^4+5n^2+7\equiv 3(1)+0+7\equiv 10\equiv 0 \mod 5$

[redacted]

إذاً، دائماً لدينا $5 \mid n(3n^4+5n^2+7)$ لكل n.

بما أن $(3,5)=1$، يكون لدينا

$$15 \mid n(3n^4+5n^2+7)$$

وهو ما يكافئ أن

$$\frac{n(3n^4+5n^2+7)}{15}$$

عدد صحيح.

وهو المطلوب.

إجابة السؤال السابع:

لنفرض أن $(n-1)! \equiv -1 \mod n$

لنفرض أن n مؤلف، أي $n=ab$ ، $1<a,b<n$

نلاحظ أن $1<a<n \iff 2\le a\le n-1$

وإذاً $a \mid (n-1)!$

ولكن هذا يعني أن $a \mid ((n-1)!, n)$ ونحصل على $((n-1)!, n)>1$

ولكن $(n-1)! \equiv -1 \mod n \iff$ يوجد k بحيث $(n-1)! = kn-1$

ولكن $(n-1)! = kn-1 \iff kn-(n-1)! = 1$

أي أن 1 تركيب خطي لـ $(n-1)!$ و n، ومنه $((n-1)!, n)=1$

تناقض!! إذاً n يجب أن يكون أولياً!!

لنفرض الآن أن n أولي.

بما أن n أولي، فهو أولي نسبياً مع جميع الأعداد الموجبة الأصغر منه، وإذاً، لكل عدد من الأعداد $1,2,\dots,n-1$ يوجد نظير ضربي. نلاحظ أن هذا النظير وحيد، وأنه لا يوجد عددان يشتركان في نفس النظير الضربي، [illegible] مختلفة [illegible] النظير الضربي [illegible]

لا يكتب في هذا الهامش

العددان هما a, b والنظيرهو c يكون لدينا

$$ac \equiv 1 \mod n$$
$$bc \equiv 1 \mod n$$
$$\Longrightarrow ac \equiv bc \mod n$$
$$\Longleftrightarrow n \mid c(a-b)$$

بما أن $1 \le c \le n-1$ و n أولي فإن $(n,c)=1$
ومن تمهيدية إقليدس $n \mid a-b$

ولكن $1 \le a, b \le n-1$
أي $-(n-2) = 1-(n-1) \le a-b \le (n-1)-1 = n-2$
أي $|a-b| \le n-2 < n$
وإذاً $\boxed{a=b}$.

ونلاحظ أن ~~...~~
$$x^2 \equiv 1 \mod n$$
$$\Longleftrightarrow n \mid x^2-1 = (x-1)(x+1)$$
وبما أن n أولي، فإن
$n \mid x+1$ أو $n \mid x-1$

أي $x \equiv -1 \mod n$ أو $x \equiv 1 \mod n$
أي أن العددين $1, n-1$ هما الوحيدان في المجموعة
$\{1, \ldots, n-1\}$ اللذان هما معكوسا نفسيهما.

مما سبق نستنتج أنه يمكننا تقسيم المجموعة $\{2, \ldots, n-2\}$ إلى
أزواج من النوع $\{k, k'\}$ حيث k' معكوس k و $k \ne k'$،

ولتكن هذه الأزواج هي $\{k_1, k_1'\}$، $\{k_2, k_2'\}$، ...، $\{k_t, k_t'\}$

حيث $t = \frac{n-3}{2}$.

وإذاً بإعادة ترتيب الحدود لدينا

$$\prod_{i=2}^{n-2} i = \prod_{i=1}^{t} k_i \cdot k_i' \equiv \prod_{i=1}^{t} (1) \equiv 1 \mod n$$

وإذاً $(n-1)! = (1)\left(\prod_{i=2}^{n-2} i\right)(n-1) \equiv (1)(1)(-1) \equiv -1 \mod n$

إجابة السؤال الثامن :

لنفرض أن $n = 2^{p-1}(2^p-1)$ حيث p أولي، و 2^p-1 أولي أيضاً.

سنثبت أن n تام.

لدينا:

$$\sigma(n) = \cancel{\sigma(2^{p-1})(} \; \sigma(2^{p-1}(2^p-1))$$

$$= \sigma(2^{p-1})\,\sigma(2^p-1)$$ لأن $(2^{p-1}, 2^p-1)=1$

$$= \frac{2^{(p-1)+1}-1}{2-1}\,(2^p-1+1)$$ لأن 2^p-1 أولي

$$= (2^p-1)(2^p)$$

$$= 2\left(2^{p-1}(2^p-1)\right)$$

$$= 2n$$

إذاً n عدد تام !

لنضع $l+1=p$ فيكون

$$n = 2^l(2^{l+1}-1) = 2^{p-1}(2^p-1)$$

حيث p أولي و 2^p-1 أولي.

لنفرض الآن أن n عدد زوجي تام.

ولنكتب: $n = 2^l k$ ، و $1 \le l$ ، و $2 \nmid k$.

لدينا:

$$2^{l+1}k = 2n = \sigma(n) = \sigma(2^l)\,\sigma(k)$$
$$= (2^{l+1}-1)\,\sigma(k)$$

بما أن $(2^{l+1}-1) \mid 2^{l+1}k$ و $(2^{l+1}-1, 2^{l+1})=1$ ، فيكون لدينا: $(2^{l+1}-1) \mid k$ ، لنضع $k = (2^{l+1}-1)k'$.

فيكون:

$$2^{l+1}k' = \sigma((2^{l+1}-1)k')$$

لنفرض لغرض التناقض أن $k' > 1$ ، ولدينا $2^{l+1}-1 \ge 3$ ، فيكون

$$2^{l+1}k' = \sigma((2^{l+1}-1)k') \geq (2^{l+1}-1)k' + k' + 1 = 2^{l+1}k' + 1 > 2^{l+1}k'$$

لأن 1 و k' و $(2^{l+1}-1)k'$ قواسم مختلفة لـ $(2^{l+1}-1)k'$.

وهو تناقض!! إذاً $k'=1$. أخيراً لدينا $\sigma(2^{l+1}-1) = 2^{l+1} = (2^{l+1}-1)+1$

[redacted]

$n = 2^{\ell}k$ | $\sigma(k) = 2^{2}k = 4k$

$= 2^{\ell-1}\sigma(k)$

$\tau(d)\mu(n) = \sum_{d|n} g(d)\mu(\frac{n}{d})$

حاملش!

$2 \cdot 21 = 42 = t(m^2 - n^2)$

$\Rightarrow t = 2,$

$3 \cdot 7$

$21 = (m-n)(m+n)$

$m+n = 7$ $m-n = 3$ $\Downarrow$ $m = 5, n = 2$ $\Downarrow$ $y = 40$ $z = 58$

$m+n = 21$ $m-n = 1$ $\Downarrow$ $m = 11, n = 10$ $\Downarrow$ $y = 440$ $z = 442$

$g(1)\mu(p)$ $+$ $g(p)\mu(1)$

$2^{\ell+1}k = (2^{\ell+1}-1)\sigma(k)$

$g(1)\mu(p^2)$
$g(p)\mu(p)$
$g(p^2)\mu(1)$

$3n^5 + 5n^3 + 7n$
$= n(3n^4 + 5n^2 + 8)$

$i + jm$

(nm)

$\phi(nm)$.

$0 \leq j \leq n-1$, $0 \leq i \leq m-1$ $(i, j) \neq (0, 0)$.

$(3n+8)(n-1)$

$2, 2 \times 3 \times 5$

$n(n^2-1)(3n^2+8)$

$\underbrace{\tau(2)\mu(2)}_{-2} + \underbrace{\tau(1)\mu(1)}_{1} = -1$

$\tau(1)\mu(1) + \underbrace{\tau(2)\mu(2)}_{-2} + \underbrace{\tau(3)\mu(3)}_{-2} + \underbrace{\tau(5)\mu(5)}_{-2}$

$+ \underbrace{\tau(6)\mu(6)}_{4} + \underbrace{\tau(10)\mu(10)}_{4} + \underbrace{\tau(15)\mu(15)}_{4}$

$+ \mu(30)\tau(30)$

$k = (2^{\ell+1}-1)k'$