ملاحظة: رتب إجابتك في الدفتر حسب ترتيب ورود الأسئلة.

١- (أ) إذا كان (x,y,z) ثلاثيا بدائيا، فأثبت أن z فردي و أن $12|xy$.

(ب) لكل عدد أولي $p>2$ أثبت وجود ثلاثي بدائي (x,y,z) فيه $x=p$.

٢- (أ) إذا كانت φ دالة أويلر و μ دالة موبياس، فأثبت أن

$$\frac{\varphi(n)}{n}=\sum_{d|n}\frac{\mu(d)}{d}$$

(ب) إذا كان $n>1$ و كان $\{a_1,a_2,...,a_{\varphi(n)}\}$ نظام رواسب مختزل قياس n ، فأثبت أن:

$$\sum_{i=1}^{\varphi(n)}a_i\equiv\frac{1}{2}n\varphi(n) \bmod n \ .$$

٣- ليكن n عددا زوجيا. أثبت أن n عدد تام إذا و فقط إذا كان $n=2^{p-1}(2^p-1)$، حيث 2^p-1 عدد أولي.

٤- (أ) إذا كان $p>2$ أوليا، فأثبت وجود حل للتطابق $x^2\equiv -1 \bmod p$ إذا و فقط إذا كان $p\equiv 1 \bmod 4$.

(ب) إذا كان $(n-1)!\equiv -1 \bmod n$ ، فبرهن أن n عدد أولي.

٥- (أ) أثبت أن مرتبة الآحاد لعدد فرما F_n هي 7 لكل $n\geq 2$.

(ب) جد جميع الأعداد الأولية p بحيث $5p+1$ مربع كامل .