مع الإجابة الكاملة

Quiz N.1 M209 section 81750 second semester 1444(2022)

Name ______________________________ :

University number ______________________________ :

السؤال الأول(٣): اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{3n}+n}{n^2+3} \quad , \quad \lim_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{2}{n}\right) \quad , \quad \lim_{n\to\infty}\frac{1+\cos(2n)}{\ln(n+1)}$$

1 1 1

السؤال الثاني(٣): برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة وما هو مجموعها؟

$$\left(\frac{1}{(n-1)n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right). \quad \text{ارشاد ،} \quad \sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n}{3^n}+\frac{1}{(n-1)n}\right].$$

2 1

السؤال الثالث(٤): اختبر تقارب أو تباعد المتسلسلات التالية:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{n!}\,4^n \quad ، \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$$

2 2

الإجابة النموذجية للاختبار القصير ١ (Quiz 1)
للمقرر (١٠٥ ريض) الفصل الثاني ١٤٤٤هـ

السؤال الأول ①

1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\cos(2n)}{\ln(n+1)}$ ، $0 \le \left|\dfrac{1+\cos(2n)}{\ln(n+1)}\right| \le \dfrac{2}{\ln(n+1)} \to 0$

ومنه

1 $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{1+\cos(2n)}{\ln(n+1)}\right| = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\cos(2n)}{\ln(n+1)} = 0$

2) $f(x) = x\tan\left(\frac{2}{x}\right)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\tan(2/x)}{1/x} \; \frac{0}{0}$

1 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\sec^2(2/x)(-2/x^2)}{-1/x^2}$

$= 2\lim \sec^2(2/x) = 2(1) = 2$

ومنه

$\lim\limits_{n\to\infty} n\tan\left(\frac{2}{n}\right) = 2$

بالتالي $\left(n\tan\left(\frac{2}{n}\right)\right) \to 2$ متقاربة

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x}+x}{x^2+3} \; \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3e^{3x}+1}{2x} \; \frac{\infty}{\infty}$

1 $= \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{9e^{3x}}{2} = \infty$

إذاً $\left(\dfrac{e^{3n}+n}{n^2+3}\right)$ متباعدة

السؤال الثاني:

، $\sum\limits_{2}^{\infty} \left(\dfrac{(-1)^n}{3^n} + \dfrac{1}{(n-1)n}\right)$

متقاربة $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3^n} = \dfrac{(-1)^2}{3^2} + \dfrac{(-1)^3}{3^3} \cdots$ $\quad a = \dfrac{1}{9}$ (هندسية)

$|r| = \left|\frac{-1}{3}\right| < 1$

1½ $\sum\limits_{2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{3^n} = \dfrac{\frac{1}{9}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{1}{9}/\frac{4}{3}$

$= \dfrac{1}{\frac{9}{3}} \cdot \dfrac{3}{4} = \dfrac{1}{12}$

$\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n} = \sum_{2}^{\infty} \left(\overbrace{\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}}^{a_n} \right)$ متقاربة

$S_n = a_2 + a_3 + \dots + a_n$

$= (1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + (\frac{1}{3}-\frac{1}{4}) - \dots + (\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}) + (\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n})$

$1\frac{1}{2}$

$S_n = 1 - \frac{1}{n}, \quad S_n \to 1$

$\sum_{2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^n}{3^n} + \frac{1}{(n-1)n} \right) = \sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} + \sum_{2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n}$ متقاربة ومن

$= \frac{1}{12} + 1 = \frac{13}{12}$

السؤال الثالث:

1) $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}, \quad f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}; \quad x \geq 2$

f متصل على $[2,\infty)$ و $f(x) > 0$ لكل $x \geq 2$

$f'(x) = \frac{0 - [(\ln x)^2 - 2(\ln x)]}{x^2(\ln x)^4} < 0$ اذن f متناقص على $[2,\infty)$

(2)

$\int_{2}^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^2} dx = \lim_{\ell \to \infty} \int_{2}^{\ell} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$ متقاربة ومنه

$= \lim_{\ell \to \infty} \left[\frac{-1}{\ln x} \right]_2^{\ell} =$

$= \lim_{\ell \to \infty} \left[\frac{-1}{\ln \ell} + \frac{1}{\ln 2} \right] = \frac{1}{\ln 2}$

ومنه $\sum_{2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$ متقاربة

---

2) $\sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} 4^n, \quad a_n = \frac{n+1}{n!} 4^n$ متقاربة

$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n+2}{(n+1)!} 4^{n+1}}{\frac{n+1}{n!} 4^n} = 4 \lim_{n \to \infty} \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n!}{(n+1)n!}$

(2)

$= 4 \lim \frac{(n+2)}{(n+1)^2} = 0 < 1$

مع الإجابة الصحيحة

جامعة الملك سعود قسم الرياضيات   الاختبار القصير رقم ٢ للمقرر ٢٠٩ ريض   شعبة ٨١٧٥٠ الفصل الثاني ١٤٤٤ هـ.

الإسم ___________________________ :

الرقم الجامعي ___________________________ :

السؤال الأول:

استخدم متسلسلة القوى في u : $e^u = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{n!}$ ، حيث $u \in \mathbb{R}$ في إيجاد متسلسلة القوى في x للدالة:

$cosh(2x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + e^{-2x})$ وماهي فترة تقاربها؟

السؤال الثاني: أوجد الحدود الأربعة الأولى لمتسلسلة تايلور للدالة $f(x) = \ln(x+3)$ ، حيث $c = 1$

1) $e^{2x} = \sum_{0}^{\infty} \frac{2^n x^n}{n!} = 1 + \frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} + \cdots$ (2)

$e^{-2x} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{n!} = 1 - \frac{(2x)}{1!} + \frac{(2x)^2}{2!} - \frac{(2x)^3}{3!} - \cdots$ (2)

$\frac{1}{2}[e^{2x} + e^{-2x}] = 1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \cdots = \sum_{0}^{\infty} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \cosh(2x)$ (1)

(1)

2) $f(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n = f(c) + \frac{f'(c)}{1!}(x-c) + \frac{f''(c)}{2!}(x-c)^2 - \cdots$

$c = 1$ $\quad f(x) = \ln(x+3) \quad f(1) = \ln 4$

$f'(x) = \frac{1}{x+3}, \quad f'(1) = \frac{1}{4}$

$f'' = \frac{-1}{(x+3)^2}, \quad f''(1) = \frac{-1}{16}$

$f''' = \frac{2}{(x+3)^3} \quad f'''(1) = \frac{2}{64} = \frac{1}{32}$

$\ln(x+3) = \ln 4 + \frac{1}{4}(x-1) - \frac{1}{16}\frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{1}{32}\frac{(x-1)^3}{3!} + \cdots$

$\ln(x+3) = \ln(4 \ldots (x-1) \ldots (x-1)^2 \ldots (x-1)^3$

مع الإجابة الصحيحة

جامعة الملك سعود
King Saud University

الاختبار الفصلي للمقرر 209 ريض   يوم الأربعاء 1444/6/18 هـ

الفصل الثاني للعام الدراسي 1444هـ   الزمن ساعتان (30 درجة).

السؤال الأول (10):

أ) اختبر تقارب أو تباعد المتتاليات التالية:

$$2\ \left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty} ،\quad 2\ \left\{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right\}_{n=1}^{\infty} ,\quad 2\ \left\{\frac{ln(n^2+1)}{n^2+1}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

ب) برهن أن المتسلسلة التالية متقاربة وما هو مجموعها؟

$$4\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{3^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right].$$

السؤال الثاني (10):

بين فيما إذا كانت المتسلسلات التالية متقاربة، متباعدة، متقاربة مطلقا" أو متقاربة شرطيا".

$$4\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^3+4} ،\quad 2\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+1}$$

$$2\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{\sqrt{n}\,n!} ،\quad 2\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+n}+\frac{4}{3^n}\right).$$

السؤال الثالث (5):

أ) أوجد متسلسلة القوى في x للدالة التالية: $f(x)=\frac{3}{2-3x}$ وماهي فترة تقاربها؟ 3

ب) استنتج من الفقرة أ) متسلسلة القوى في x للدالة $g(x)=\frac{1}{(2-3x)^2}$. 2

السؤال الرابع (5):

أوجد فترة ونصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى في $(x-2)$ التالية:

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{n}\,3^n}(x-2)^n.$$

3 + 1 + 1

الإجابة الكاملة للإختبار الفصلي لمقرر (٢٠٩) رصف

الفصل الثاني ١٨/٦/١٤٤٢هـ

السؤال الأول :

(أ)

1) $f(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}, \quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}, \quad x \geq 1,$ عدم تعيين 1^{∞}

$$y = \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}, \quad \ln y = x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

2 $$\lim_{x\to\infty} \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(1+1/x)}{1/x}, \quad \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-1/x^2}{1+1/x}}{\frac{-1/x^2}{1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+1/x} = 1$$

$$\ln y \to 1 \Rightarrow e^{\ln y} \to e^{1} = e \Rightarrow y \to e \text{ as } x\to\infty$$

ومنه $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e$$

---

2) $\lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ عدم تعيين $\infty - \infty$

1 $$= \lim_{n\to\infty} \frac{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0$$

---

3) $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1}, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} \quad \frac{\infty}{\infty}$

2 $$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{2x}{1}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(2x)(1)}{(2x)(x^2+1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2+1} = 0$$

ومنه $$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n^2+1)}{n^2+1} = 0$$

---

4 $$\sum_{1}^{\infty} \left[\frac{1}{3^n} + \frac{2}{n(n+1)}\right]$$ (ب)

1) $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \ldots \quad |r| = \frac{1}{3} < 1$ الهندسية

2 $$= \frac{1/3}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{1}{2}$$

2) $\sum_1^\infty \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_1^\infty \underbrace{\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)}_{a_n}$, $a_n = \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

$S_n = a_1+a_2+\dots+a_n = \left(1-\cancel{\tfrac{1}{2}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{3}}\right)+\dots+\left(\cancel{\tfrac{1}{n-1}}-\cancel{\tfrac{1}{n}}\right)+\left(\cancel{\tfrac{1}{n}}-\frac{1}{n+1}\right)$

$S_n = 1-\frac{1}{n+1} \longrightarrow 1$

2

اي ان المتسلسلة متقاربة وان

$$\sum_1^\infty \frac{2}{n(n+1)} = 2\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)} = 2(1) = 2$$

ومنه

$\sum_1^\infty \left[\frac{1}{3^n}+\frac{2}{n(n+1)}\right] = \sum_1^\infty \frac{1}{3^n} + 2\sum_1^\infty \frac{1}{n(n+1)}$ متقاربة

$$= \frac{1}{2}+2 = \frac{5}{2}$$

السؤال الثاني :

4 1) $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$, $a_n = \frac{n+1}{n^2+1} \longrightarrow 0$

$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, $x\geq 1$, $f'(x) = \frac{x^2+1-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} < 0$

اذا كانت $1-x^2<0$ او $x^2>1$ وهذا صحيح اذا كانت $x\geq 2$

اذاً $\sum_2^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ متقاربة حسب اختبار المتناوبة 2

وبالتالي $\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1} = -1 + \sum_2^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$ متقاربة

ولكن

2 $\sum_1^\infty \left|(-1)^n\right| \frac{n+1}{n^2+1} = \sum_1^\infty \underbrace{\frac{n+1}{n^2+1}}_{a_n} \approx \sum_1^\infty \underbrace{\frac{1}{n}}_{b_n}$

$\lim \frac{a_n}{b_n} = \lim \frac{n^2+n}{n^2+n} = 1 > 0$

اي ان $\sum_1^\infty \left|(-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}\right|$ متباعدة

ومنه $\boxed{\sum_1^\infty (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1} \text{ متقاربة شرطياً}}$

2) $\sum_{1}^{\infty}\left|(-1)^n \frac{n+1}{n^3+4}\right| = \sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3+4} \le \sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n^3} \le \sum \frac{2n}{n^3} = 2\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

متقاربة

متقاربة حسب اختبار المقارنة مع العام

متقاربة $p = 2 > 1$

2

$\boxed{\text{مطلقاً متقاربة } \sum_{1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^3+4}}$

اذاً

---

3) $\sum_{1}^{\infty} \frac{4^n}{\sqrt{n}\, n!}$ ، a_n متقاربة

$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{4^{n+1}}{\sqrt{n+1}\cdot(n+1)!}}{\dfrac{4^n}{\sqrt{n}\, n!}}$

2

$= \lim \frac{\sqrt{n}\, n!\, 4^n \cdot 4}{\sqrt{n+1}\cdot(n+1)\, n!\, 4^n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}} \left(\frac{4}{n+1}\right)$

$= (1)(0) = 0 < 1$

اذاً المتسلسلة متقاربة

2

4) $\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+n} + \frac{4}{3^n}\right)$

1 $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n} \simeq \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ، a_n ، b_n ، $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n}+n} = 1 > 0$

حسب اختبار المقارنة مع النهاية فإن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}+n}$ متباعدة لأن $\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n}$ متباعدة

1 $4\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{3^n}$ متقاربة هندسية

$|r| = \frac{1}{3} < 1$

اذاً المتسلسلة $\boxed{\sum_{1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n}+n} + \frac{4}{3^n}\right) \text{ متباعدة}}$

السؤال الثالث:

3) 1) $f(x) = \frac{3}{2-3x} = \frac{3}{2} \frac{1}{1-\frac{3x}{2}}$

3 $f(x) = \left(\frac{3}{2}\right) \sum_{1}^{\infty} \frac{3^n}{2^n} x^n$ ، 1/2 $\left|\frac{3x}{2}\right| < 1$ or $|x| < \frac{2}{3}$

فترة التقارب

$f'(x) = \frac{3(3)}{(2-3x)^2} = \frac{3}{2} \sum_{1}^{\infty} \frac{n\, 3^n}{2^n} x^{n-1}$

2

$g(x) = \frac{1}{(2-3x)^2} = \frac{1}{2\cdot 3^2} \sum_{1}^{\infty} \frac{n\, 3^n}{2^n} x^{n-1} = \sum_{1}^{\infty} \frac{n\, 3^{n-2}}{2^{n+1}} x^{n-1}$, $|x| < \frac{2}{3}$

السؤال الرابع:

(5) $$\sum_{1}^{\infty} \overbrace{(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}\,3^n}(x-2)^n}^{u_n}$$

المتسلسلة متقاربة عندما $x=2$. لنفرض ان $x\neq 2$ ،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}(x-2)^{n+1}}{\sqrt{n+1}\,3^{n+1}}\right|}{\left|\frac{(-1)^n(x-2)^n}{\sqrt{n}\,3^n}\right|}$$

(3) $$= \lim_{n\to\infty} |x-2| \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}\cdot\frac{1}{3} = |x-2|\frac{1}{3}$$

المتسلسلة متقاربة لكل x تحقق $|x-2|\frac{1}{3}<1$ او $|x-2|<3$

يعني $-3<x-2<3$ او $-1<x<5$ او $\boxed{x\in(-1,5)}$

نصف قطر التقارب $(r=3)$ (1/2)

عندما $x=5$ لدينا $\sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ متقاربة حسب المتناوبة (1)

عندما $x=-1$ لدينا $= \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^n(-1)^n3^n}{\sqrt{n}\,3^n} = \sum_{1}^{\infty}\frac{(-1)^{2n}}{\sqrt{n}} = \sum_{1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ متباعدة (1)

$p=\frac{1}{2}<1$

(1/2) $\boxed{\text{اذا فترة التقارب هي } I=(-1,5]}$