جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الفيزياء والفلك

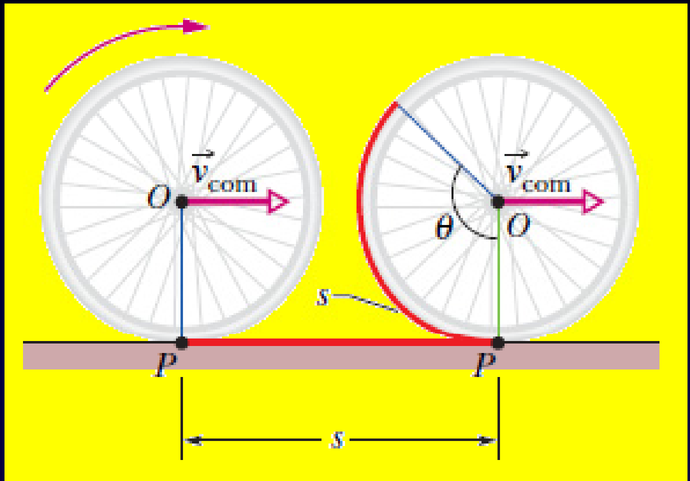
مقرر 210 فيز

د. ناصر بن صالح الزايد

nalzayed@ksu.edu.sa

المحاضرة رقم: 18

11.2 التدحرج يجمع الحركة الخطية والدورانية في نفس الوقت



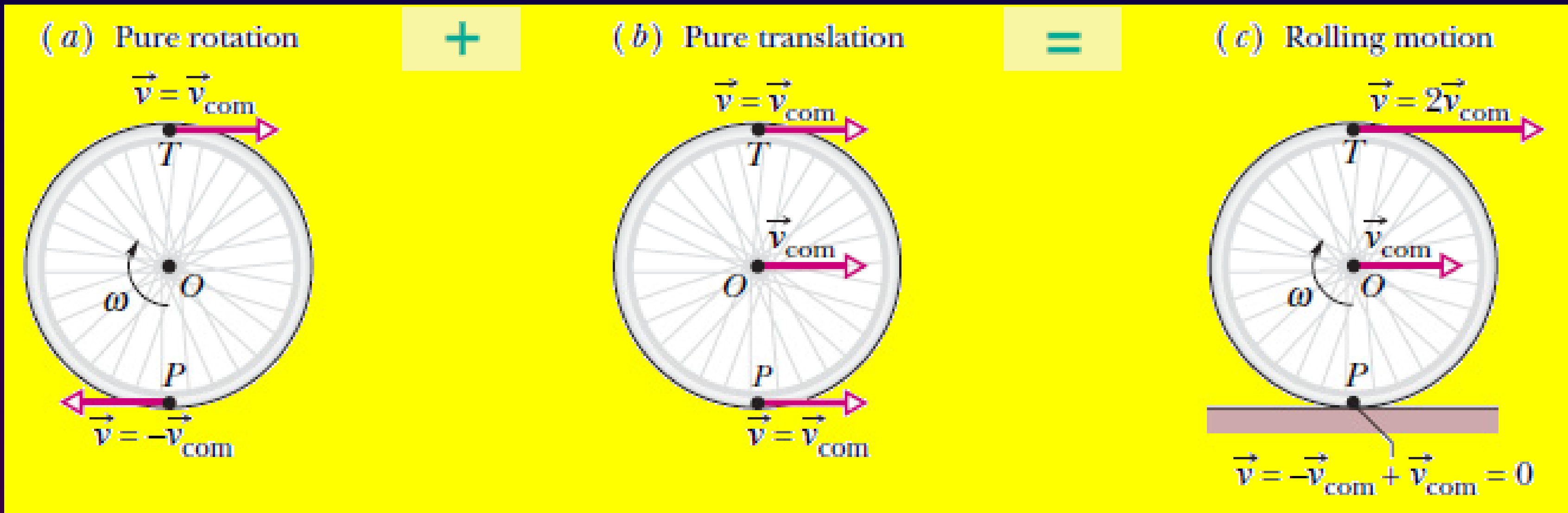
• كما نلاحظ في الشكل: عندما تتحرك العجلة مسافة S فأن النقطة P الواقعة على محيطها تتحرك على محيط العجلة نفس المسافة قاطعة زاوية مقدارها θ .

$$S = R\theta \qquad (11.1)$$

بتفاضل الطرفين:

$$\frac{dS}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow V_{com} = R\omega \qquad (11.2)$$



الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي .Rolling, Turque, and Ang. Mom

11.3 الطاقة الحركية للتدحرج Kinetic Energy of Rolling

- سوف نبين أن الطاقة الحركية للتدحرج تحوي قسمين: قسم بسبب الحركة الخطية والآخر بسبب الحركة الدورانية.
- أخذنا سابقا تعريف الطاقة الحركية الدورانية كما يلي:

$$k = \frac{1}{2} I \omega^2$$

- ويمكن كتابتها بالنسبة للنقطة P الموجودة على طرف العجل كما يلي:

$$k = \frac{1}{2} I_P \omega^2 \qquad (11.3)$$

- باستخدام نظرية المحاور المتوازية: يمكن أن نعبر عن عزم القصور عند النقطة المذكورة كما يلي:

$$I_P = \mathrm{I}_{com} + \mathrm{MR}^2 \qquad (11.4)$$

- إذن تصبح الطاقة الحركية الكلية للعجلة كما يلي:

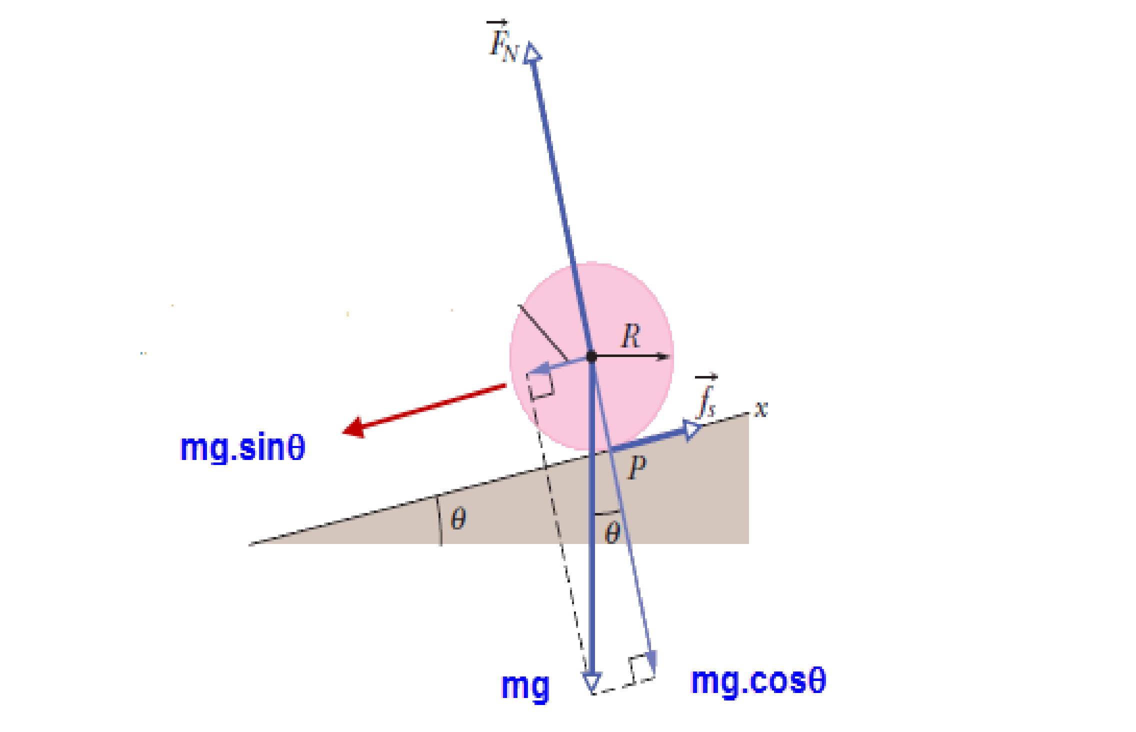
$$K = \frac{1}{2} \mathrm{I}_{com} \omega^2 + \frac{1}{2} \mathrm{MR}^2 \omega^2 \qquad (11.5)$$

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Turque, and Ang. Mom.
11.3 مثال على التدحرج Example: Rolling of a ball from a ramp

- نستخدم العلاقة بين السرعة الخطية والدورانية لأعادة كتابة المعادلة بالشكل التالي:

$$K = \frac{1}{2} I_{com} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{com}{}^2 \qquad (11.5)$$

- إذن تتكون الطاقة الحركية الكلية من حدين: الطاقة الدورانية + الطاقة الحركية الخطية



- مثال: كرة تنحدر من قمة سطح مائل بزاوية معينة:
- إذا كانت M = 6 kg ، θ = 30º ، h = 1.2 m فاحسب:
- سرعة الكرة في اسفل المنحدر.
- ما مقدار واتجاه قوة الاحتكاك على الكرة أثناء نزولها إلى الأسفل؟

- لاحظ الفرق الكبير بين انزلاق الكرة وبين نزولها وهي تتدحرج (تدور).

- الحل: سوف نطبق مبدأ حفظ الطاقة حيث أن الطاقة الكلية في أعلى المنحدر = الطاقة الكلية أسفله

$$K_f + U_f = K_i + U_i$$

$$\therefore \left[\frac{1}{2}\mathrm{I}_{com}\omega^2 + \frac{1}{2}\mathrm{M}v_{com}^{\ 2}\right] + 0 = 0 + \mathrm{M}gh$$

$$\because \mathrm{v}_{com} = \omega R \Rightarrow \omega = \mathrm{v}_{com}/R$$

$$\because \mathrm{I}_{com} = \frac{2}{5}MR^2$$

$$\therefore \left[\frac{1}{\cancel{2}}\left(\frac{\cancel{2}}{5}\cancel{M}\cancel{R}^2\right)\left(\frac{\mathrm{v}_{com}}{\cancel{R}}\right)^2 + \frac{1}{2}\cancel{M}v_{com}^{\ 2}\right] = \cancel{M}gh$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5}v_{com}^{\ 2} + \frac{1}{2}v_{com}^{\ 2} = gh$$

$$\Rightarrow \frac{7}{10}v_{com}^{\ 2} = gh \Rightarrow v_{com} = \sqrt{\frac{10}{7}gh}$$

$$\Rightarrow v_{com} = \sqrt{\frac{10}{7}(9.8)(1.2)} = 4.10\ m/s$$

• الحل: لحساب قوة الاحتكاك مقدارا واتجاها:

$$\because Rf_s = I\alpha$$

$$\Rightarrow f_s = -\frac{I\alpha}{R} = -\frac{Ia}{R^2} = \frac{\frac{2}{5}MR^2(a)}{R^2} = -\frac{2}{5}Ma$$

$$\because f_s - Mg\sin\theta = Ma$$

$$\therefore f_s - Mg\sin\theta = -\frac{5}{2}f_s$$

$$\Rightarrow f_s\left[1+\frac{5}{2}\right] = Mg\sin\theta \Rightarrow f_s = \frac{2}{7}Mg\sin\theta$$

$$= \frac{2}{7}(6)(9.8)(\sin 30) = 8.4\,N$$

• لاحظ أن الحل لم يعتمد على مقدار نصف القطر R وأنما فقط على مقدار الكتلة.
• إذن قوة الاحتكاك المحسوبة أعلاه صحيحه بغض النظر عن نصف القطر ولكن فقط يشترك أن تكون الكتلة تساوي 6 kg .

11.7 الاندفاع الزاوي Angular Momentum

- يعرف الاندفاع الزاوي رياضيا كما يلي (وبالتالي فهو كمية متجهه):

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{p} = m\,(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad (11.18)$$

- يعبر عن قانون نيوتن الثاني في حالة الحركة الخطية و الد ورانية كما يلي:

$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \dot{\vec{p}} \qquad (11\text{-}22)$$

$$\vec{\tau}_{net} = \frac{d\,\vec{\ell}}{dt} = \dot{\vec{\ell}} \qquad (11\text{-}23)$$

Proof:

$$\because\ \vec{\ell} = m\,(\vec{r} \times \vec{v}) \qquad (11.18)$$

$$\therefore\ \frac{d\,\vec{\ell}}{dt} = m\left(\vec{r} \times \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{v}\right) = m\,(\vec{r} \times \vec{a} + \vec{v} \times \vec{v}) = m\,(\vec{r} \times \vec{a}) = \vec{r} \times m\,\vec{a}$$

$$\therefore\ \frac{d\,\vec{\ell}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F}_{net} = \vec{\tau}_{net}$$

$$\Rightarrow\ \vec{\tau}_{net} = \frac{d\,\vec{\ell}}{dt} \qquad (11.25)$$

11.9 الاندفاع الزاوي لعدد من الأجسام Angular Mom. For a system of particles

- بكل بساطة، عندما يكون هناك نظام مكون من عدد من الأجسام المختلفة، فأن الاندفاع الزاوي الكلية هو عبارة عن مجموع الاندفاعات الزاوية لجميع الأجسام، تماما مثل ما فعلنا في الاندفاع الخطي:

$$\vec{L} = \vec{\ell}_1 + \vec{\ell}_2 + \vec{\ell}_3 + \ldots \vec{\ell}_n = \sum_{i=1}^{n} \vec{\ell}_i \qquad (11.26)$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{d\vec{\ell}_i}{dt} \qquad (11.27)$$

$$\therefore \frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_{net,i} \qquad (11.28)$$

$$\therefore \vec{\tau}_{net} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad \text{(system of particles)} \qquad (11.29)$$

- الاندفاع الزاوي للجسم الصلب حول محور معين:

$$L = I\omega \qquad (11.31)$$

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي .Rolling, Torque, and Ang. Mom
جدول مقارنة بين الحركتين الخطية والدورانية

- جدول يبين مزيدا من المقارنة بين الحركتين الخطية (الانتقالية) والدورانية.
- يضاف هذا الجدول إلى الكميات السابقة حيث أن هناك تشابها كبيرا في القوانين، ولكن مع اختلاف رموز ودلالات الكميات الفيزيائية المستخدمة:

Table 11-1

More Corresponding Variables and Relations for Translational and Rotational Motion[a]

Translational		Rotational	
Force	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}\ (= \vec{r} \times \vec{F})$
Linear momentum	$\vec{p}$	Angular momentum	$\vec{\ell}\ (= \vec{r} \times \vec{p})$
Linear momentum[b]	$\vec{P}\ (= \Sigma \vec{p}_i)$	Angular momentum[b]	$\vec{L}\ (= \Sigma \vec{\ell}_i)$
Linear momentum[b]	$\vec{P} = M\vec{v}_{com}$	Angular momentum[c]	$L = I\omega$
Newton's second law[b]	$\vec{F}_{net} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	Newton's second law[b]	$\vec{\tau}_{net} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Conservation law[d]	$\vec{P} =$ a constant	Conservation law[d]	$\vec{L} =$ a constant

مقارنة الرموز بين الحركتين الخطية والدورانية

- الرموز المستخدمة في الحركة الخطية وما يقابلها في الحركة الدورانية: صور القوانين تكاد تكون متطابقة ولكن فقط مع تغيير في الرموز:

$$x \rightarrow \theta$$

$$v \rightarrow \omega$$

$$a \rightarrow \alpha$$

$$m \rightarrow I$$

$$p \rightarrow \ell$$

$$F \rightarrow \tau$$

الباب 11: التدحرج، وعزم اللي، والاندفاع الزاوي Rolling, Torque, and Ang. Mom.

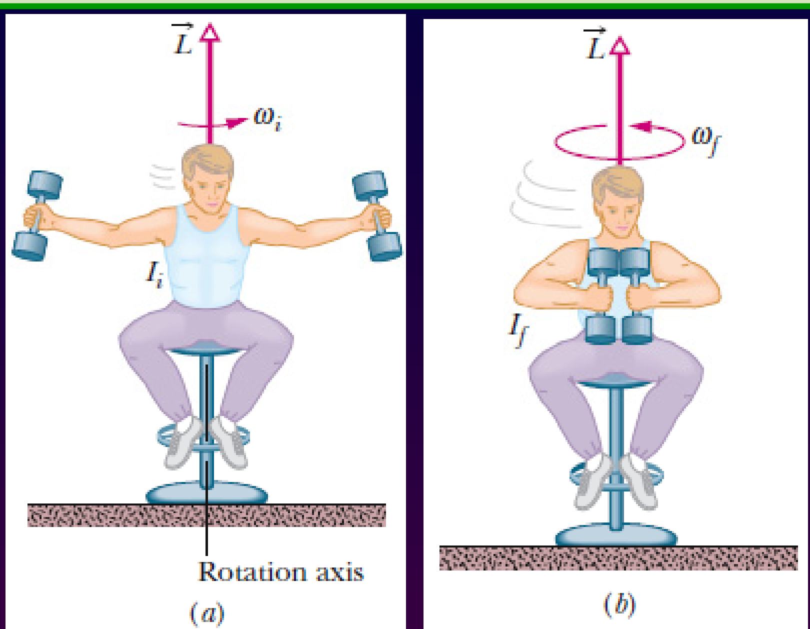
11.11 حفظ الاندفاع الزاوي Conservation of Ang. Momentum

- سبق مناقشة حفظ الاندفاع الخطي، وقلنا بأن الاندفاع الخطي لنظام معزول محفوظ دائما بغض النظر عن ما يحصل للجسم، مثلا تصادمات مرنة أو غير مرنه، انفجار إلى عدة قطع، وهكذا.
- نفس ما ينطبق على الاندفاع الخطي يمكن إيجاده في الاندفاع الزاوي.
- إذن توجد صيغة تقول بان الاندفاع الزاوي = كمية ثابتة (أي محفوظ)

$$L = \text{constant} \tag{11.32}$$

$$L_i = L_f \tag{11.33}$$

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f \tag{11.34}$$



- في الشكل على اليسار، بسبب حفظ الاندفاع الزاوي الكلي للنظام، وحيث أن ضم اليدين فجأة سوف يؤدي إلى تقليل قيمة عزم القصور I فحتى نحافظ على الكميتين في معادلة (11.34) متساوين، فأذن لابد أن يؤدي ذلك إلى زيادة مماثلة في سرعة الدوران، والعكس بالعكس.
- لاحظ أن عزم القصور يعتمد على كل من الكتلة + طول الذراع.
- إذن حتى لو كانت الكتلة نفسها لم تتغير، ولكن مد اليدين أو ضمهما يؤدي إلى تغيير في قيمة عزم القصور