

أجب عن الأسئلة الآتية

س(١) : أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(أ) إذا كان $f : A \rightarrow B$ تطبيقاً فإن $f^{-1} : B \rightarrow A$ تطبيق.

(ب) إن $(\mathbb{Z}_{11}^*, \oplus)$ نظام مغلق.

(ج) إذا كانت كل من A و B مجموعة غير منتهية وقابلة للعد فإن $A \approx B$.

(د) إذا كان $f : (\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\mathbb{Z}_4, \oplus)$ تطبيقاً، حيث $f(x) = \bar{x}$ فإن f تشاكل.

س(٢) : (أ) إذا كان 3 عنصراً في النظام $(\mathbb{Z}_{12}, \boxplus)$ فاملأ الفراغات الآتية:-

$$(i) \quad 3^{-1} = \dots \quad (ii) \quad 3^5 = \dots \quad (iii) \quad 3^{-4} = \dots$$

$$(iv) \quad x \boxplus 4 = 2^{-1} \Rightarrow x = \dots$$

(ب) متى نقول إن S مجموعة غير منتهية؟

(ج) إذا كانت $S = \{1, 3, 5, 7, 9, \dots\}$ فأثبت أن S مجموعة غير منتهية (موظفاً الفقرة (ب)).

س(٣) : (أ) متى نقول إن النظام $(G, *)$ زمرة؟

(ب) إذا عرفنا عملية \otimes على \mathbb{R}^* كما يلي :-

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^* : a \otimes b = \frac{2}{3}ab$$

فادرس النظام (\mathbb{R}^*, \otimes) من حيث كونه :-

(١) مغلقاً (٢) إبدالياً (٣) تجميعياً (٤) يملك عنصراً محايداً (٥) يملك نظيراً لكل عنصر فيه.

(ج) هل النظام الوارد في الفقرة (ب) زمرة ابدالية؟ مع التبرير.