

الاختبار الفصلي الثاني في المقرر ١٣١ رياض
الفصل الدراسي الأول ١٤٢٩/١٤٣٠ هـ
الزمن : ساعة ونصف

جامعة الملك سعود
كلية العلوم
قسم الرياضيات

أجب عن الأسئلة الآتية

السؤال الأول :

أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي :

- (أ) إن $(\mathbb{R}, *)$ نظام مغلق ، حيث $a * b = a^b$ لكل $a, b \in \mathbb{R}$.
(ب) إذا كان العنصران $\bar{6}$ و $\bar{2}$ في النظام $(\bar{6}, \odot)$ فإن لكل منهما نظيراً ضربياً .
(ج) أي مجموعتين غير منتهيتين وقابلتين للعد تكونان متكافئتين .
(د) إن النظام $(P(S), \cup, -)$ ذو عمليتين فيه " - " تتوزع على " \cup " .

السؤال الثاني :

- (أ) أعط مثلاً واحداً فقط لزمرة ضربية رتبته 46 .
(ب) متى نقول عن مجموعة S إنها غير منتهية ؟
و إذا كانت $A = \{4, 6, 8, \dots\}$ فأثبت أن A مجموعة غير منتهية .
(ج) إذا كان $(\mathbb{Z}, +) \rightarrow (\bar{\mathbb{Z}}_8, \oplus)$ تطبيقاً ، حيث $f(x) = \bar{x}$ فأثبت أن f تشاكل (هومومورفيزم) غير متباين .

إجابة السؤال الأول :

(أ) : عبارة خاطئة ، فمثلا : $-1 \times 1/2 = -1^{1/2} = \sqrt{-1} \in \mathbb{R}$

(ب) : عبارة خاطئة ، لأن $\bar{2}$ في $\bar{\mathbb{Z}}$ له نظير ضربي هو $\bar{5}$ في حين أن $\bar{6}$ ليس له نظير ضربي في $\bar{\mathbb{Z}}$ ، لأن $(6, 9) \neq 1$.

(ج) : عبارة صائبة ، لأنه بفرض أن H و K مجموعتان غير منتهيتين وقابلتين للعد يكون لدينا :

$$\begin{aligned} H &\approx \mathbb{Z}^+ \wedge K \approx \mathbb{Z}^+ \quad (\text{تعريف}) \\ \Rightarrow H &\approx \mathbb{Z}^+ \wedge \mathbb{Z}^+ \approx K \quad (\text{لأن } \approx \text{ تناظرية}) \\ \Rightarrow H &\approx K \quad (\text{لأن } \approx \text{ متعينة}) \end{aligned}$$

(د) : عبارة خاطئة ، لأن " - " لا تتوزع من اليسار على " U " في النظام $(P(S), U, -)$ كما يلي :

$$\begin{aligned} A_1, A_2, A_3 \in P(S) \Rightarrow A_1 - (A_2 \cup A_3) &= A_1 \cap (A_2 \cup A_3)' \quad \text{----- (نظرية)} \\ &= A_1 \cap (A_2' \cap A_3') \quad \text{----- (قانونا دومورجان)} \\ &= (A_1 \cap A_2') \cap (A_1 \cap A_3') \quad \text{----- (خاصة التوزيع)} \\ &= (A_1 - A_2) \cap (A_1 - A_3) \quad \text{----- (نظرية)} \\ &\neq (A_1 - A_2) \cup (A_1 - A_3) \end{aligned}$$

إجابة السؤال الثاني :

(أ) : \mathbb{Z}_{47} .

(ب) : إذا كانت $S \approx D$ ، حيث $D \subset S$.

لتكن $B = \{6, 8, 10, \dots\} \subset A = \{4, 6, 8, 10, \dots\}$

ولنعرف التطبيق $f : A \rightarrow B$ بالقانون $f(x) = x + 2$

إن f غامر لأن :

$$y \in B \Rightarrow \exists x = y - 2 \in A \ni f(x) = x + 2 = (y - 2) + 2 = y$$

كما أن f متباين ، لأن :

$$x, y \in A \ni f(x) = f(y) \Rightarrow x + 2 = y + 2 \Rightarrow x = y$$

مما تقدم نجد أن f تقابل وبالتالي فإن $A \approx B$ ومنه تكون A غير منتهية .

(ج) : إذا كان $(\bar{\mathbb{Z}}_8, \oplus)$ ، حيث $f(x) = \bar{x}$ فإن f تشاكل لأنه :

$$\forall x, y \in \mathbb{Z} : f(x + y) = \overline{x + y} = \bar{x} \oplus \bar{y} = f(x) \oplus f(y)$$

كما أن f تطبيق غير متباين ، فمثلا :

$$f(0) = f(8) = \bar{0} \Rightarrow 0 = 8$$

مما سبق نجد أن f تشاكل غير متباين .