بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة الملك سعود / الرياض
كلية العلوم / قسم الرياضيات

الاختبار النهائي في المقرر ١٣١ ريض
الفصل الدراسي الثاني ١٤٣٦/ ١٤٣٧ هـ الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س١ : (أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي :-

(١) توجد مجموعة S بحيث يكون: $|P(S)|=256$.

(٢) لا يوجد حقل F بحيث يكون: $|F|<3$.

(٣) إن $\mathbb{Z}_4$ ليست حلقة جزئية من الحلقة $\mathbb{Z}$.

(٤) إذا كان $f: A \to B$ تطبيقاً فإن : $f^{-1}(B) \subset A$.

(ب) إذا كانت C و D مجموعتين بحيث $C \neq \phi$ و $D=\phi$ فأثبت أن $C \times D = \phi$.

س٢ : (أ) متى نقول إن R علاقة تكافؤ على مجموعة A ؟

(ب) إذا عرفنا علاقة R على $\mathbb{Q}^*$ كما يلي

$$\forall a,b \in \mathbb{Q}^* : aRb \Leftrightarrow ab>0$$

فأجب عما يأتي :-

(١) أثبت أن R علاقة تكافؤ في $\mathbb{Q}^*$.

(٢) أوجد أصناف التكافؤ المرافقة لـ R .

س٣ : (أ) أعط مثالاً واحداً فقط لكل مما يأتي :-

(١) زمرة ضربية دائرية رتبتها 60 . (٢) زمرة غير إبدالية رتبتها 120 .

(٣) تطبيق $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ بحيث يكون f متبايناً وليس غامراً .

(٤) عنصراً x في النظام $(\mathbb{Z}_{16}, +)$ بحيث يكون : $|x|=|\langle x\rangle|=8$.

(ب) املأ الفراغات الآتية :-

(١) إذا كان $\sigma \in S_6$ ، حيث : $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ فإن : $|\sigma| = \cdots$.

(٢) إذا كان 6 عنصراً في الزمرة الضربية $\mathbb{Z}_{13}^*$ فإن : $6^4 = \cdots$.

(٣) إذا كان 2 عنصراً في الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ فإن : $(2^{-1})^{10} = \cdots$.

س٤ : (أ) إذا عرفنا عملية ثنائية $*$ ، على $\mathbb{R}$ كما يلي :

$$\forall a,b \in \mathbb{R} : a*b = a+5b$$

فادرس النظام $(\mathbb{R}, *)$ من حيث كونه :

(١) إبدالياً (٢) يملك عنصراً محايداً أيمن (٣) يملك نظيراً أيمن لكل عنصر فيه .

(ب) إذا كانت $S=\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ وكانت $D=\{2^{n+1} \mid n \in \mathbb{Z}^+\}$ وكان :

$f: S \to D$ تطبيقاً ، حيث : $f(2^i) = 2^{i+1}$ ، فأجب عما يأتي :

(١) أثبت أن f تقابل (٢) وظف فقرة (١) في إثبات أن S مجموعة غير منتهية .

(٣) هل S قابلة للعد ؟ ولماذا ؟

يجب ... في
هذا الهامش

س (٢) ⑥

١) صائبة لأن $256 = 2^8$
وبالتالي $|P(S)| = 256 = 2^8 = 2^{|S|}$
أي أن $|S| = 8$ ١/٢

٢) خاطئة لأن: $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ حقل، وهو أصغر حقل
بحيث $|F| = 2$ ١/٢

~~٣) خاطئة وذلك لا يختلف ... العملية ... العملية هنا هي القياس~~
٣) صائبة وذلك لا يختلف ... العملية (العملية هنا هي القياس) ١/٢
٤) خاطئة لأن
لو فرضنا جدلاً أن $\bar{f}(B) \subset A$ صائبة

$$\Rightarrow \exists x \in A \ni f(x) \notin B$$

وهذا يناقض كون f تطبيقاً ولا مفر إلا بالتسليم بأن الفرض
~~خاطئ ونقيضه الصواب أي أن $\bar{f}(B) \subseteq A$ صائب~~ ١/٢

٥) نفرض جدلاً أن $C \times D \neq \emptyset$
⑥ ~~تعريف الجداء~~
$C \times D \neq \emptyset \Rightarrow \exists (x, y) \in C \times D$
$\Rightarrow (x \in C) \wedge (y \in D)$ تعريف الجداء الديكارتي
$\Rightarrow y \in \emptyset$ لأن $D = \emptyset$
وهذا مستحيل لأن $\emptyset$ مجموعة خالية
ولذلك فإن الفرض خاطئ ونقيضه هو الصواب أي أن $C \times D = \emptyset$ صائب

س ٢)

أ) لتكن R ... انعكاسية و متناظرة و متعدية
1) $\forall x \in A : aRa$. 2) $\forall x, y \in A / xRy \Rightarrow yRx$. 3) $\forall x, y, z \in A / xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$
ب) ⑥
١) العلاقة R انعكاسية على $\mathbb{Q}^*$ لأن
$\forall a \in \mathbb{Q}^* : aRa = aa > 0$ لأن حاصل ضرب عددين موجبين عدد موجب
ولكن لأن حاصل ضرب عددين سالبين عدد موجب
• العلاقة R متناظرة على $\mathbb{Q}^*$ لأن
$\forall a, b \in \mathbb{Q}^* : aRb \Leftrightarrow ab > 0 \Rightarrow ba > 0 \Rightarrow bRa$ (لأن الضرب إبدالي على $\mathbb{Q}^*$)
• العلاقة R متعدية على $\mathbb{Q}^*$ لأن
$\forall a, b, c \in \mathbb{Q}^* : ab > 0 \wedge bc > 0$
$\Rightarrow (ab)(bc) > 0$ (لأن حاصل ضرب عددين موجبين عدد موجب)
$\Rightarrow ab^2c > 0$ لأن $b^2 = (bb)$

لا يكتب في هذا الهامش

$ab^2c > 0 \Rightarrow ac > 0$ (بقسمة طرفي المتراجحة على b^2)

$\Rightarrow aRc$

بما أن العلاقة R انعكاسية ومتناظرة ومتعدية فهي علاقة تكافؤ على $\mathbb{Q}^*$

$$\bar{1} = \{x \in \mathbb{Q}^* \mid xR1\}$$

$$\bar{1} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}^* \quad x > 0\}$$

$$\bar{1} = \mathbb{Q}^+$$

$$\overline{-1} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}^* \wedge xR-1\}$$

$$\overline{-1} = \{x \mid x \in \mathbb{Q}^* \wedge -x > 0\} = \ldots \qquad x < 0$$

$$\overline{-1} = \mathbb{Q}^-$$

أصناف التكافؤ هي $\overline{-1} = \mathbb{Q}^-$ و $\bar{1} = \mathbb{Q}^+$

حيث أن $\mathbb{Q}^- \cup \mathbb{Q}^+ = \mathbb{Q}^*$

أي أن أصناف التكافؤ تشكل تجزئة لـ $\mathbb{Q}^*$ وهي $\{\mathbb{Q}^-, \mathbb{Q}^+\}$

هذا الهامش

س ١) زمرة ضربية دائرية رتبتها 60 هي $(\mathbb{Z}^*_{61}, \cdot)$

2.0

٢) زمرة غير ابيلية رتبتها 120 هي $(S_5, \circ)$

1.0

٣) تطبيق $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ، f متباين وليس غامر

1.0

نفرض تطبيق $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

بالتعريف $f(x) = 2x$

اذا f متباين لان $\forall x_1, x_2 \in \mathbb{Z} : f(x_1) = f(x_2)$

تعريف f $\Rightarrow 2x_1 = 2x_2$

بالقسمة على 2 $\Rightarrow x_1 = x_2$

اذن f ليس غامر لان صور المنطلق هي الاعداد الزوجية فقط من المستقر $\mathbb{Z}$ أي ان جميع الاعداد الفردية من $\mathbb{Z}$ لم ترتبط بها اي عنصر من $\mathbb{Z}$ (المنطلق) مثلاً $f^{-1}(1) \notin \mathbb{Z}$

٤) العنصر 2 من $\mathbb{Z}$ يحقق أن $|2| = |\langle 2 \rangle| = 8$

1.0

ب) ١) مرتبة التبديلة σ في S_6 حيث $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ هي $|\sigma| = 3$

٢) اذا كان 6 عنصر في الزمرة الضربية $\mathbb{Z}^*_{13}$ فان $(6)^4 = 9$

1

٣) اذا كان 2 عنصر في الزمرة $(\mathbb{Z}, +)$ فان $(2^{-1})^{10} = -20$

1

س ٣) A) $\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = a + 5b$

١) ان النظام $(\mathbb{R}, *)$ ليس ابدالي لان

$\forall a, b \in \mathbb{R} : a * b = a + 5b$

$b * a = b + 5a$

ولكن $b + 5a \neq a + 5b$

1

لاثبات ذلك نفرض أن $a = 1$ و $b = 2$ فان $a + 5b = 1 + 10 = 11$

ونلاحظ أن $11 \neq 7$ ، $b + 5a = 2 + 5 = 7$

٢) نفرض أن $e \in \mathbb{R}$ هو العنصر المحايد الايمن للنظام $(\mathbb{R}, *)$ عندئذ

① بتعريف المحايد $\forall a \in \mathbb{R} : a * e = a$

② تعريف $(*)$ $a * e = a + 5e$

هذا الهامش

من ① و ② ينتج أن

$a + 5e = a$ (لأن * تطبيق)

$\Rightarrow 5e = 0 \Rightarrow e = 0$

∴ $e = 0$ هو العنصر الحيادي الأيمن للنظام $(\mathbb{R}, *)$

٣) ليكن $\acute{a}$ هو النظير الأيمن ~~للنظام $(\mathbb{R}, *)$~~ لـ $a \in \mathbb{R}$

فيكون

① $\forall a \in \mathbb{R} : a * \acute{a} = e = 0$ (تعريف $\acute{a}$ النظير)

② $a * \acute{a} = a + 5\acute{a}$ (تعريف *)

من ① و ② ينتج أن

$a + 5\acute{a} = 0$ (لأن * تطبيق)

$\Rightarrow 5\acute{a} = -a$ (بطرح a من الطرفين)

$\Rightarrow \acute{a} = \frac{-a}{5}$ (بالقسمة على 5)

إذن لما أن $\acute{a} \in \mathbb{R}$ هو نظير لـ $a \in \mathbb{R}$

إذن $\acute{a} = \frac{-a}{5}$ هو النظير الأيمن للنظام $(\mathbb{R}, *)$ لكل عنصر فيه.

ب)

١) لأن f متباين لأن

$\forall z^{i_1}, z^{i_2} \in S : f(z^{i_1}) = f(z^{i_2})$

$\Rightarrow z^{i_1+1} = z^{i_2+1}$ (تعريف f)

$\Rightarrow z^{i_1} \cdot z = z^{i_2} \cdot z$ ($z^n \cdot z = z^{n+1}$ لأن)

$\Rightarrow z^{i_1} = z^{i_2}$ (بالقسمة على z)

~~$\Rightarrow i_1 = i_2$~~

② لأن f شامل لأن:

$y = z^{i+1} \Rightarrow y = z^i \cdot z \Rightarrow z^i = \frac{y}{z}$

$\forall y \in D \Rightarrow \exists z^i = \frac{y}{z} \in S \ni f(z^i) = z^{i+1} = z^i \cdot z = \frac{y}{z} \cdot z = y$

من ① و ② ينتج أن f تطبيقاً تقابلياً

٣) بما أن $f : S \to D$ تطبيقاً تقابلياً فإن $S \sim D$

وبما أن $D \subsetneq S$ (حسب تعريف كل من D و S)

فإن S مجموعة غير منتهية لأنها تكافئ مجموعة جزئية منها مختلفة عنها.

هذا الهامش

٢) إن S قابلة للعد لأن يبرهن تطبيق $f: \mathbb{N} \to S$

بحيث $f(n) = 2^n$

١) إن f متباين لأن $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} : f(n_1) = f(n_2)$

تعريف f $\Rightarrow 2^{n_1} = 2^{n_2}$

وهذا يعني أن f متباين $\Rightarrow n_1 = n_2$

٢) إن f غامر لأن

$y = 2^n \Rightarrow n = \log_2 y$

$\forall y \in S \Rightarrow \exists n = \log_2 y \in \mathbb{N} \ni f(n) = 2^n = 2^{\log_2 y} = y$.

ومنه f متباين وغامر فإنه تقابلي،

ومنه يوجد تقابل بين S و $\mathbb{N}$

ومنه S قابلة للعد (تعريف المجموعة القابلة للعد)

هذا الهامش

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\4&3&5&6&2&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6\\1&2&3&4&5&6\end{pmatrix}$$

2	256
2	128
2	64
2	32
2	16
2	8
2	4
2	2
	1

$$\begin{array}{r}36\\ \times\ 6\\ \hline 216\\ \times\ 6\\ \hline 1296\end{array}$$