جامعة الملك سعود — الاختبار النهائي — الفصل الدراسي الثاني ١٤٣٤/١٤٣٥هـ

كلية العلوم- قسم الرياضيات — في المقرر ١٣١ريض — الزمن : ٣ ساعات

أجب عن الأسئلة الآتية

س(١) : (أ) أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يأتي: -

(١) إن التقريرين $\sim q \to \sim p$ و $p \to q$ متكافئان.

(٢) إن $\left(\sqrt{4},-1,\frac{2}{3},1\right) \notin \mathbb{Q}^4$.

(٣) إن $\mathbb{R}$ مجموعة قابلة للعد، علماً بأن $S=\{x|0<x<1\}$ غير قابلة للعد.

(ب)استخدم الاستقراء الرياضي في إثبات صحة ما يلي:-

$$P(n) \equiv \frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \forall n \in \mathbb{Z}^+$$

(جـ) املأ الفراغات الآتية:-

(١) إن $|S_n| = \cdots\cdots$ (٢) إذا كانت $|S_n|=120$ فإن $n=\cdots\cdots$.

(٣) إذا كان $-\frac{2}{3}$ عنصراً في $(\mathbb{Q},+)$ فإن $\left(-\frac{2}{3}\right)^5=\cdots\cdots$ (٤) إن $\mathbb{R}^m=\mathbb{R}^n \Leftrightarrow \cdots\cdots$.

س(٢) : (أ) متى نقول إن النظام $(R,+,\cdot)$ حلقة ؟

(ب) إذا كان c و d عنصرين في حلقة R فأثبت أن : $(-c)d=-(cd)$، علماً بأن $0d=0$.

(جـ) إذا كان $f:(\mathbb{R}^*,\cdot)\to(\mathbb{R}^*,\cdot)$ تطبيقاً، حيث $f(x)=\frac{1}{x}$ ،

فأثبت أن f تماثل، وعين نواة f = $\ker f$.

(د) املأ الفراغين الآتيين :-

(١) إذا كان $4\in\mathbb{Z}^*_{17}$ فإن $4^3=\cdots\cdots$.

(٢) إذا كان $\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7\\3&5&7&1&2&6&4\end{pmatrix}\in S_7$ فإن $|\sigma|=\cdots\cdots$.

س(٣) : (أ) متى نقول إن $h:D\to E$ تطبيق محايد ؟

(ب) إذا كان $f:A\to B$ تطبيق تقابل فأثبت أن :

(١) $f^{-1}:B\to A$ تطبيق (٢) f^{-1} متباين (٣) f^{-1} غامر .

(جـ) إذا كان a و b عنصرين في زمرة G فأثبت أن : $ab^{-1}=e\Rightarrow b=a$.

(د) أعطِ مثالاً واحداً **فقط** لكل مما يأتي :-

(١) زمرة غير إبدالية رتبتها 24 (٢) حلقة جزئية فعلية غير منتهية من الحلقة $\mathbb{Q}$

(٣) حقل منتهٍ F ، حيث $|F|>50$.

إجابة السؤال الأول

ب/ أثبت صحة أو خطأ كل عبارة فيما يلي:

(1) إن التقريرين $p \Rightarrow q$ و $\sim q \Rightarrow \sim p$ متكافئان.

إن التقرير صائب لأنه: وذلك باستخدام جداول الصدق (الصواب)

1	2	3	4	5	6
p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	T	T

من العمودين 5، 6 نجد أن: $p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

(2) إن $(\sqrt{4}, -1, \frac{2}{3}, 1) \notin \mathbb{Q}^4$:

إن التقرير خاطئ لأنه:

$\sqrt{4} = 2,\ -1,\ \frac{2}{3},\ 1 \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow (\sqrt{4}, -1, \frac{2}{3}, 1) \in \mathbb{Q}^4$

(3) إن $\mathbb{R}$ مجموعة قابلة للعد علماً بأن $S = \{x \mid 0 < x < 1\}$ غير قابلة للعد.

إن التقرير خاطئ لأنه: لنفرض جدلاً أن $\mathbb{R}$ قابلة للعد

من الواضح أن $S \subset \mathbb{R}$ ~~و~~

فإن S قابلة للعد (نظرية)

وهذا تناقض مع كون S ~~قابلة~~ غير قابلة للعد

إذن الفرض الجدلي خاطئ ونفيه صائب

إذن $\mathbb{R}$ مجموعة غير قابلة للعد.

إجابة السؤال الاول

لا يكتب في هذا الهامش

(ب) استخدم الاستقراء الرياضي في إثبات صحة ما يلي:

(٤) $P(n) = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$ ، $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

(أ) الخطوة الاساسية: إثبات $P(1)$ صائب، أي:

الطرف الأيمن $= \frac{1}{1(2)} = \frac{1}{2}$

الطرف الايسر $= \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$

(ب) خطوة الاستقراء: نفرض صحة التقرير $P(K)$ أي:

$P(K) \equiv \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{K(K+1)} = \frac{K}{K+1} \longrightarrow (1)$

صائب ومحقق

وعلينا الآن إثبات صحة $P(K+1)$ أي:

$P(K+1) \equiv \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{K(K+1)} + \frac{1}{(K+1)(K+2)} \stackrel{?}{=} \frac{K+1}{K+2}$

الطرف الأيمن $= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{K(K+1)} + \frac{1}{(K+1)(K+2)}$

$= \frac{K}{K+1} + \frac{1}{(K+1)(K+2)}$ من رقم (1)

$= \frac{K(K+2)+1}{(K+1)(K+2)}$ بتوحيد المقامات

$= \frac{K^2+2K+1}{(K+1)(K+2)}$ تبسيط

$= \frac{(K+1)(K+1)}{(K+1)(K+2)}$ بتحليل البسط $(K+1)(K+1) = K^2+2K+1$

$= \frac{K+1}{K+2}$ تبسيط

$=$ الطرف الايسر

إذن $P(K+1)$ صائب

إذن التقرير $P(n)$ صائب لجميع قيم n: $\forall n \in \mathbb{Z}^+$

٤

ممتاز

إجابة السؤال الأول

لا يكتب في هذا الهامش

٤ (ب) املأ الفراغات الآتية:

(١) إذا ... $|S_n| = \boxed{n!}$

(٢) إذا كانت $|S_n| = 120$ فإن $\boxed{n = 5}$

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

(٣) إذا كان $-\frac{2}{3}$ عنصراً في $(\mathbb{Q}, +)$ فإن $\boxed{\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = -\frac{10}{3}}$

$$\left(-\frac{2}{3}\right)^5 = \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= -\frac{10}{3}$$

(٤) $\boxed{\text{إن } \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^n \iff m = n}$

انتهت إجابة س١

لا يكتب في هذا الهامش

2

ج ١) متى نقول إن النظام $(R, +, \cdot)$ حلقة؟

إذا حققت الشروط الآتية معاً:

① $(R, +)$ زمرة ابدالية

② $(R, \cdot)$ شبه زمرة

③ إن العملية "$\cdot$" تتوزع على العملية "$+$" من اليمين واليسار أي:

$$\forall x, y, z \in R : \begin{cases} x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (\cancel{y} \cdot z) & \text{التوزيع من اليسار} \\ (y + z) \cdot x = (y \cdot x) + (z \cdot x) & \text{التوزيع من اليمين} \end{cases}$$

صفر ب) إذا كان c, d عنصرين في حلقة R فأثبت أن $(-c)d = -(cd)$ علماً بأن $0d = 0$

لا يوجد إجابة

$y = \frac{1}{x} \Rightarrow xy = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y}$

إجابة السؤال الثاني

لا يكتب في هذا الهامش

٤

(ج) إذا كان $f : (\mathbb{R}^*, .) \longrightarrow (\mathbb{R}^*, .)$ تطبيقاً حيث $f(x) = \frac{1}{x}$

فأثبت أن f تماثل وعين نواة $f = \ker f$

(1) f تشاكل لأن ... حسب تعريف f $\forall x, y \in \mathbb{R}^* : f(x \cancel{.} y) = \frac{1}{x} . \frac{1}{y}$

$= f(x) . f(y)$ تعريف f $\underline{\underline{2}}$

(2) f متباين لأن:

تعريف f $\forall x \in \mathbb{R}^* : f(x) = \frac{1}{x}$

بالضرب بـ x $= x \cancel{?}$

صفر

(3) f غامر لأن:

$\forall y \in \mathbb{R}^* : \exists\, x = \frac{1}{y} \in \mathbb{R}^*$

تعريف f $\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\frac{1}{y}}$

نتيجة $= y$ $\underline{\underline{1}}$

(4) من (2) و (3) نجد أن f تقابل

من (1) و (4) نجد أن f تماثل

تعيين نواة $f = \ker$

إذا كان f متباين فإن $\ker f = \{e\}$ نظرية

إذن:

$\ker f = \{e\} = \{1\}$ $\underline{\underline{1}}$

إجابة السؤال الثاني

لا يكتب في
هذا الهامش

(٢)

(د) املأ الفراغين الآتيين:

(١) إذا كان $4 \in \mathbb{Z}_{17}^{*}$ فإن $4^3 = 14$

$4^1 = 4$

$4^2 = 16$

$4^3 = 14$

$16 \times 3 = 48$, $48 - 17 = 31$, $31 - 17 = 14$

(٢) إذا كان $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix} \in S_7$

فإن $|\langle\sigma\rangle| = |\sigma| = 4$

$\sigma = (1\ 3\ 7\ 4)(2\ 5)(6)$

$[4, 2, 1] = 4$

$\therefore |\langle\sigma\rangle| = |\sigma| = 4$

إجابة السؤال الثالث

لا يكتب في هذا الهامش

س٣: (أ) مثال: نفترض إن $h : D \to E$ تطبيق محايد

إذا كان

$$h : D \to E \qquad D = E$$

$$h(x) = x \quad \text{معرف على}$$

$$\forall x \in D : h(x) = x$$

(ب) إذا كان $f : A \to B$ تطبيق تقابل فأثبت أن:

(١) $f^{-1} : B \to A$ تطبيق:

لما كان f تقابل فهذا يقتضي بالضرورة إذاً لكل عنصر من عناصر A له صورة وحيدة من B أي وبالتالي فإن لكل عنصر من عناصر B صورة عكسية وحيدة من A أي أن

$$f(A) = B \Rightarrow f^{-1}(B) = A$$

إذن f^{-1} تطبيق

(٢) f^{-1} متباين: نفرض $b_1, b_2 \in B$ هما صورتا العنصرين ~~$\forall a_1, a_2 \in A$~~

$$\forall b_1, b_2 \in B : f^{-1}(b_1) = f^{-1}(b_2)$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(a_1) = f^{-1}(b_2)$$

$$\Rightarrow b_1 = b_2$$

لأن f تقابل

إذن f^{-1} متباين

(٣) f^{-1} غامر: لما كان f تطبيق تقابل فإن

$$f \circ (A) = B \quad \text{وفق (١)}$$

إذن f^{-1} غامر

تابع إجابة السؤال الثالث

لا يكتب في هذا الهامش

(جـ) إذا كان a و b عنصرين في زمرة G فأثبت أن

$$a b^{-1} = e \Rightarrow b = a$$

إذن

بالضرب من اليمين

$$(a b^{-1}) b = e b$$

خاصة التجميع

$$\Rightarrow a(b^{-1} b) = b$$

خاصة النظير

$$\Rightarrow a e = b$$

خاصة المحايد

$$\Rightarrow a = b$$

إذن

$$a b^{-1} = e \Rightarrow b = a$$

2/

(د) أعط مثالاً واحداً فقط لكل مما يأتي:

(١) زمرة غير إبدالية رتبتها 24: $(S_4, \circ)$ 1/

(٢) حلقة جزئية فعلية غير منتهية من الحلقة $\mathbb{Q}$:

$(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ 1/

(٣) حقل منتهٍ F بحيث $|F| > 50$

$(\mathbb{Z}_{53}, +, \cdot)$ 1/