c h a p t e r 33

Alternating-Current Circuits

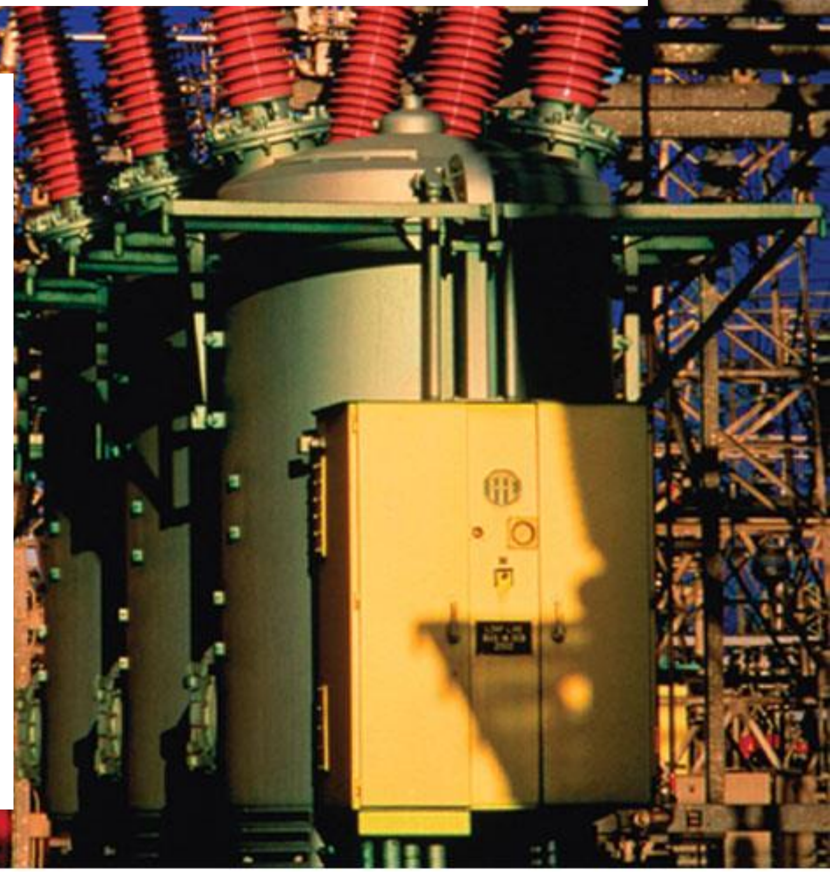
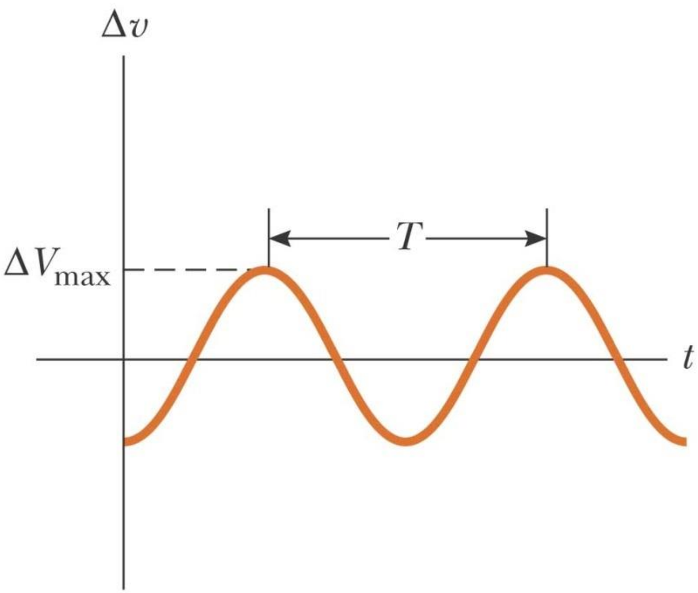


Fig 33-CO, p.1033

دوائر التيار المتردد

لدوائر التيار المتردد أهمية كبيره لان معظم الكهرباء المولدة تكون من النوع المتردد AC كما هو الحال في المولد الكهربائي حيث أن القوه الدافعة الكهربائية في التيار المتردد تتغير بشكل دوري مع الزمن.



التيار المتردد:

عند توصيل مصدر جهد متردد(مولد كهربائي) في دائرة كهربائية فإن القوة الدافعة الكهربائية الناتجة تكون مترددة (متغيرة) وتعطى بالعلاقة التالية كما بينا سابقا:

$$\varepsilon = \varepsilon_{max}\, sin\omega t$$

أو

$$\Delta V = \Delta V_{max}\, sin\omega t$$

Fig 33-1, p.1034

حيث تمثل ΔV_{max} القوة العظمى للقوة الدافعة الكهربائية للمولد و ω التردد الزاوي لدورانه و t الزمن، حيث ان الجهد يعكس اتجاهه عدة مرات في فتره معينه من الزمن وكذالك يتغير مقداره وفقا لدالة الجيب وكذلك الأمر بالنسبة للتيار المتردد.

يطلق على عدد الذبذبات او الدورات الكاملة التي يتمها الجهد او التيار في الثانية الواحدة اسم التردد (f)أي ان :

$$\omega = 2\pi f$$

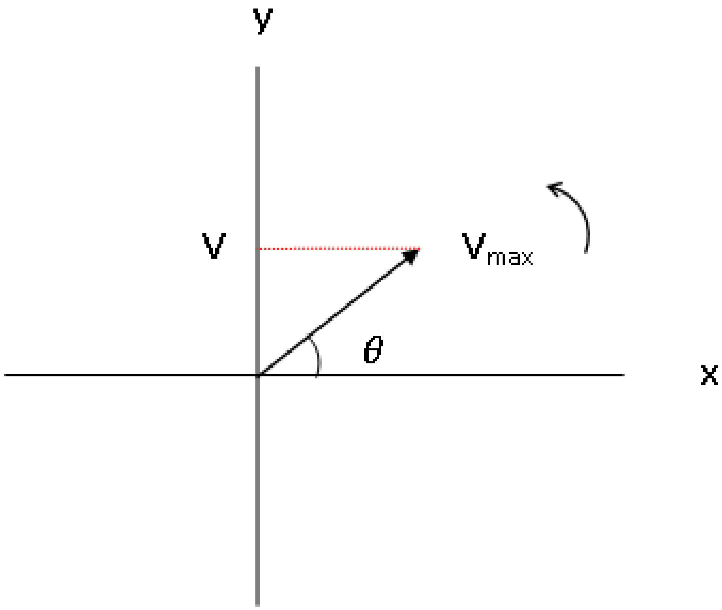
وصف دوائر التيار المتردد بالمطور:

المطور هو عبارة عن متجه دوار يستعمل لتمثيل كمية متغيره جيبيا (التيار و الجهد) حيث يمثل مقدار المتجه (طوله) مقدار الكمية وتمثل الزاويه التي يصنعها مع محور السينات x زاوية طور هذه الكمية في أي لحظة وتمثل مركبة المتجه على محور الصادات y القيمة اللحظية

ويوضح الشكل متجها V_{max} يصنع زاوية

مع محور x ومركبته باتجاه المحور y هي v حيث:

$$V = V_{max} \ \sin\theta$$



اذا كان هذا المتجه في اللحظة *t=0* منطبقا على المحور *x* الموجب ثم بدأ

الدوران عكس عقارب الساعة بسرعة زاوية ثابتة ω **فإن الزاوية** θ

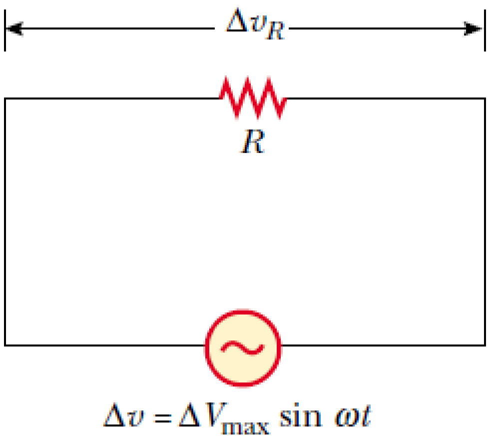
التي يدورها المتجه خلال زمن *t* هي ωt وبالتالي تكون مركبة المتجه

V_{max} باتجاه *y* عند أي لحظة زمنية t هي:

$$V = V_{max} \ \sin\omega t$$

33.2 Resistors in an AC Circuit

دائرة التيار المتردد المحتوية على مقاومة:



إذا وصلت مقاومة مع مصدر للتيار المتردد كما بالشكل فان التيار المار في المقاومة هو:

$$i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{\Delta V_{max}}{R} sin\omega t$$

$$i = i_{max}\, sin\omega t \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.1$$

حيث

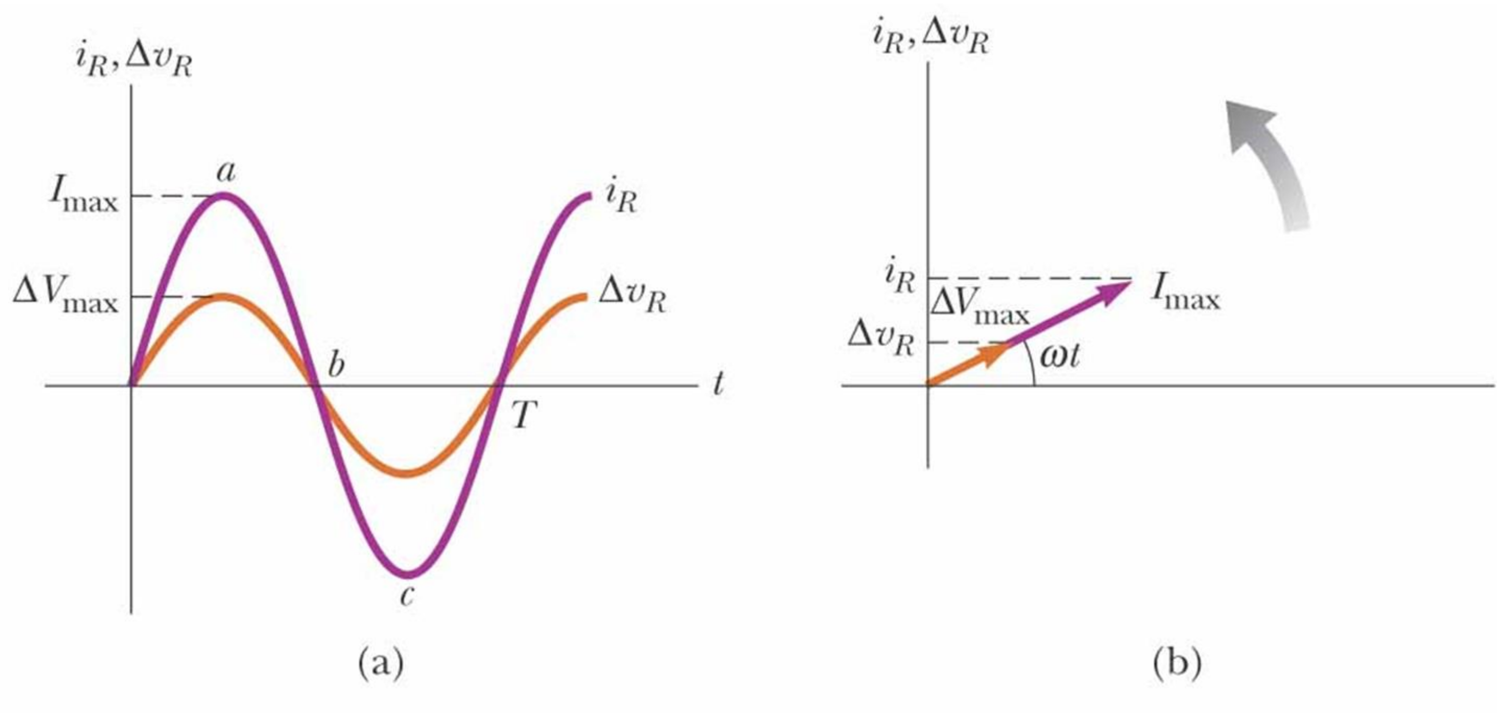
$$i_{max} = \frac{\Delta V_{max}}{R}$$

ويكون فرق الجهد بين طرفي المقاومة

$$\Delta V = \Delta V_{max}\, sin\omega t \qquad \ldots\ldots\ldots..2$$

حيث $\Delta_{max} = i_{max}\, R$

ونلاحظ من المعادلة *1,2*أن الجهد والتيار يصلان إلى القيمة العظمى لكل منهما في لحظه زمنية واحدة وكذالك ينخفضان إلى القيمة الصغرى في لحظة زمنية واحدة ولهذا فهما متحدان في الطور أي أن فرق زاوية الطور بينهما يساوي صفر كما بالشكل.

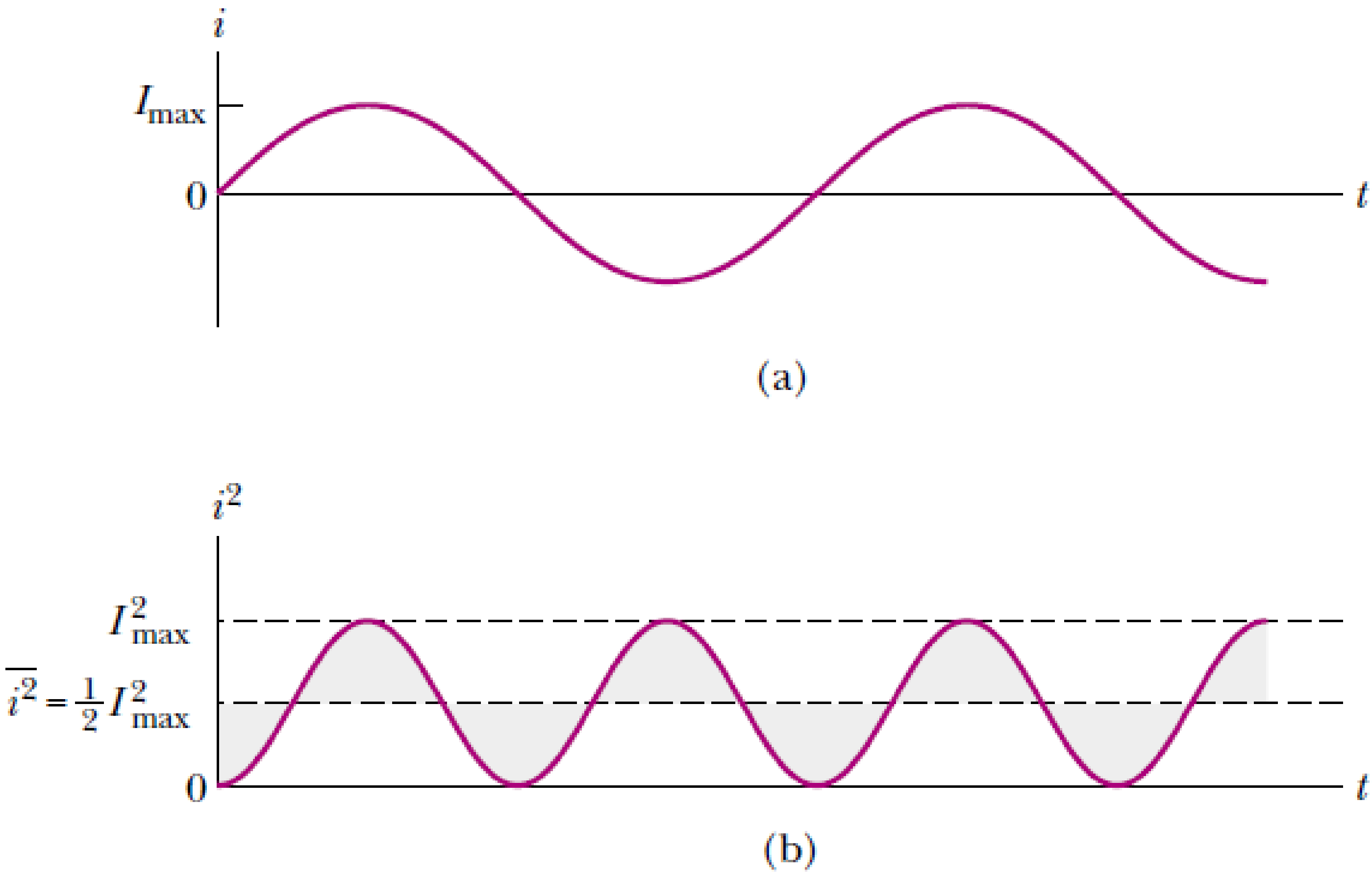


ولحساب القدرة الكهربائية في المقاومة فان:

$$p = i^2 R = i_{max}^2 R\, sin^2 \omega t$$

وحيث أن قيمة التيار مربعه فالقدرة دائما موجبة وتتغير قيمة $\sin^2 \omega t$ بين صفر وواحد ولهذا فان متوسط القيمة يساوي $\frac{1}{2}$ ومن ثم تكون القيمة المتوسطة للقدرة هي:

$$p_{av} = \frac{1}{2} i_{max}^2 R = \frac{1}{2} \frac{\Delta V_{max}^2}{R}$$



i
I_{max}
0
t
(a)
i^2
I^2_{max}
$\overline{i^2} = \frac{1}{2} I^2_{max}$
0
t
(b)

وتكون القيمة المتوسطة لمربع التيار ومربع الجهد هي :

$$i_{av}^2 = \frac{1}{2} i_{max}^2$$

$$V_{av}^2 = \frac{1}{2} V_{max}^2$$

ويسمى الجذر التربيعيللقيمة المتوسطة للتيار والجهد i_{rms} و V_{rms} :

$$i_{rms} = \sqrt{i_{av}^2} = \frac{i_{max}}{\sqrt{2}} \qquad \ldots\ldots.3$$

$$V_{rms} = \sqrt{V_{av}^2} = \frac{V_{max}}{\sqrt{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots 4$$

وتعد القيم i_{rms} و V_{rms} من القيم الهامة في الكهرباء وتسمى احيانا بالقيم الفعالة للتيار وللجهد.

$$p_{av} = \frac{1}{2} i_{max}^2 R = i_{rms}^2 R \qquad \ldots\ldots..5$$

مثال :

سخان كهربائي قدرته 1000W ويعمل على جهد متردد قدره 220V

احسب:

١) مقاومة السخان ٢) تيار الذروة المار فيه خلال التسخين.

الحل:

(١

$$i_{rms} = \frac{\bar{P}}{V_{rms}} = \frac{1000}{220} = 4.545A$$

$$R = \frac{V_{rms}}{i_{rms}} = \frac{220}{4.545} = 48.4A$$

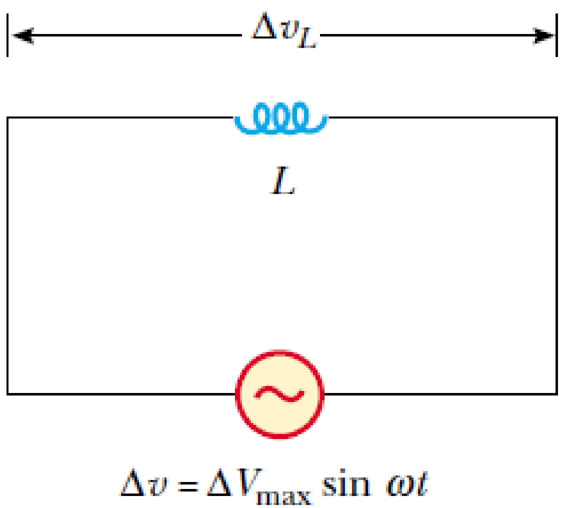
(٢

$$i_0 = \sqrt{2}\, i_{rms}$$

$$i_0 = \sqrt{2} \times 4.545 = 6.428A$$

33.3 Inductors in an AC Circuit

دائرة التيار المتردد المحتوية على محث



عند توصيل محث مع مصدر جهد متردد كما بالشكل فانة يتولد في الملف قوة دافعة ثاثيرية ينتج عنها تيار تاثيري وذلك نتيجة للتغير التيار المتردد المار في المحث.وبتطبيق قانون كرشوف الثاني فإن:

$$\varepsilon - L\frac{di}{dt} = 0$$

$$L\frac{di}{dt} = \Delta V_{max}\, sin\omega t$$

$$di = \frac{\Delta V_{max}}{L} sin\omega t\, dt$$

ولايجاد التيار نكامل طرفي المعتدلة السابقة:

$$\Longrightarrow i = -\frac{\Delta V_{max}}{\omega L} cos\omega t$$

$$i = -\frac{\Delta V_{max}}{X_L} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$i = -i_{max} \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

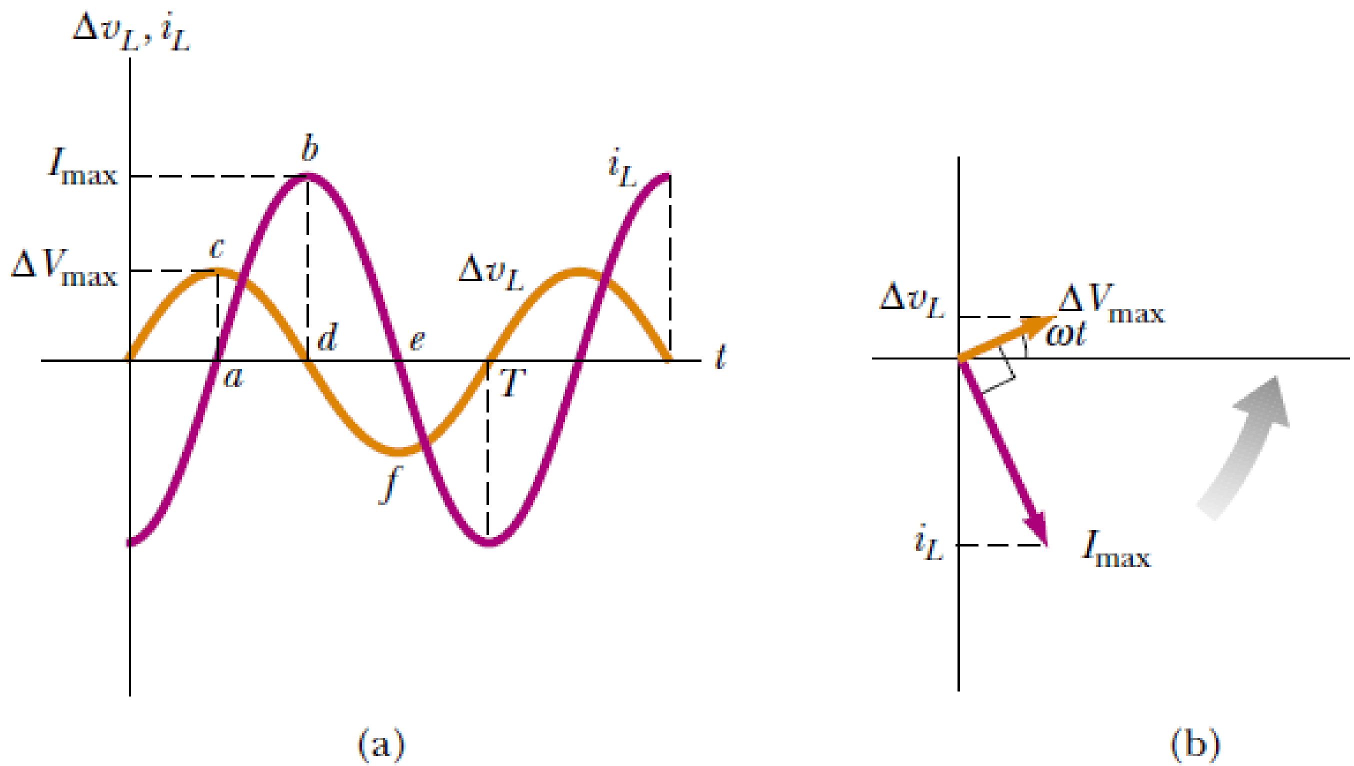
حيث

$$X_L = \omega L \qquad \text{و} \qquad i_{max} = \frac{\Delta V_{max}}{X_L}$$

ويسمي X_L المفاعلة الحثية وهي تلعب الى حد ما نفس الدور الذي تلعبة المقاومة ووحدة قياسها هي الاوم.

من المعادلة 1 و 6 نجد ان التيار يتخلف عن الجهد في المحث بمقدار
90° او $\frac{\pi}{2}$ ويوضح الشكل هذا الاختلاف.

اي ان زاوية فرق الطور بين التيار والجهد في المحث $\phi = -90$



مثال۲ :

ملف مقاومته 2Ω ومحاثته 500mH احسب اكبر قيمه للتيار المار فيه عند توصيله في دائرة مغلق مع : ۱) مصدر جهد مستمر جهده $50V$

۲)مصدر جهد متردد قيمة $V_{rms} = 50V$ وتردده 50 Hz

الحل :

١) في هذه الحالة تكون المفاعلة الحثية $X_L = 0$ لان التردد $f = 0$
وبالتالي يبقي فقط مقاومة الملف *R*

$$\Rightarrow i = \frac{V}{R} = \frac{50}{2} = 25\Omega$$

٢)

$$X_L = \omega L = 2\pi f L$$

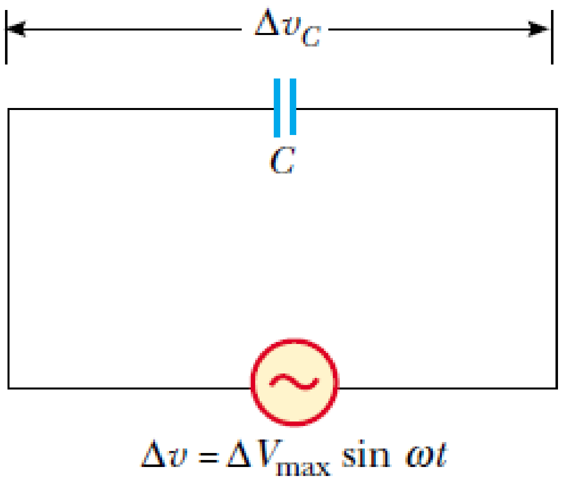
$$= 2 \times 3.14 \times 50 \times (500 \times 10^{-3}) = 157\Omega$$

$$\Rightarrow i_{max} = \frac{V_{max}}{X_L} = \frac{\sqrt{2}V_{rms}}{X_L}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \times 50}{157} = 0.45\text{A}$$

33.4 Capacitors in an AC Circuit

دائرة التيار المتردد المحتوية على مكثف



عند توصيل مكثف مع مصدر للتيار المتردد كما بالشكل فإن التيار المتردد الذي يمر بالدائرة يعمل على شحن احدي صفيحتي المكثف بشحنة معينة ثم يعكس مصدر الجهد المتردد اتجاهه فتمر الشحنات بالاتجاه المعاكس فيتم شحن صفيحة المكثف الأخرى بشحنة مضادة ويستمر هذا الوضع حتى يتم شحن المكثف تماما.

وبتطبيق قانون كرشوف على الدائرة فإن:

$$\varepsilon - \frac{q}{c} = 0$$

$$\varepsilon_{max} \, sin\omega t - \frac{q}{c} = 0$$

وبمفاضلة المعادلة بالنسبة للزمن نجد ان :

$$\varepsilon_{max}\ \omega cos\omega t = \frac{1}{C}\frac{dq}{dt} = \frac{i}{C}$$

$$i = \varepsilon_{max}\ C\omega\ cos\omega t = \varepsilon_{max}\ C\omega\ \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$i = \frac{\varepsilon_{max}}{X_c}\ \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

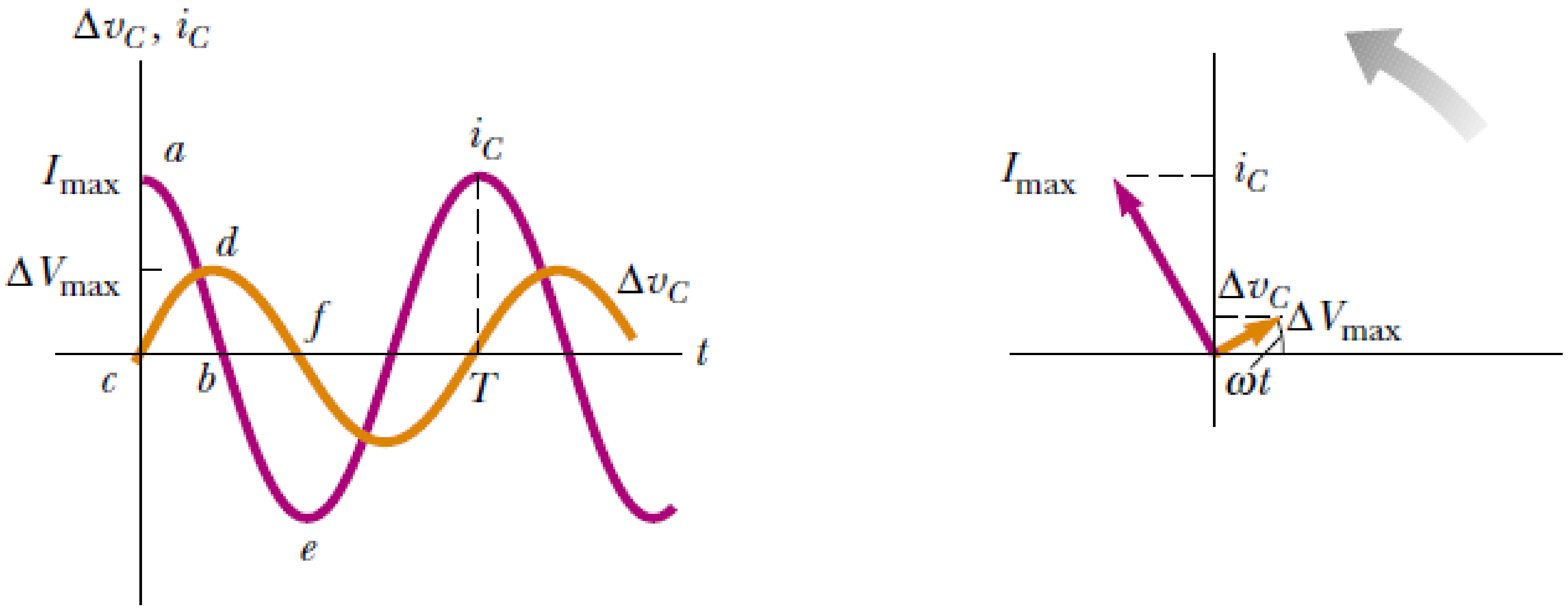
$$i = i_{max}\ \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots..7$$

حيث $i_{max} = \frac{\varepsilon_{max}}{X_c}$ و $X_c = \frac{1}{C\omega}$

ويسمي X_c المفاعلة السعوية وهي تلعب إلى حد ما نفس الدور الذي تلعبة المقاومة ووحدة قياسها هي الاوم، وهي تكون كبيره للتيارات ذات التردد المنخفض والعكس صحيح.

ومن المعادلة 1 و 7 نجد أن التيار يسبق الجهد في هذه الدائرة بمقدار 90° او $\frac{\pi}{2}$ ويوضح الشكل هذا الاختلاف. وهذا يدل على إن التيار المار في المكثف يكون اكبر ما يمكن عندما يكون فرق الجهد بين صفيحتيه يساوي صفر كما أن التيار يكون صفر عندما يكون فرق الجهد اعلي ما يمكن.

أي أن زاوية فرق الطور بين التيار والجهد هنا هي $\phi = 90$



Δv_C, i_C
a
I_{max}
i_C
d
ΔV_{max}
Δv_C
f
t
c
b
T
e
I_{max}
i_C
Δv_C
ΔV_{max}
ωt

(a) (b)

مثال:

وصل مكثف سعته $60\mu c$ الى مصدر جهد متردد تردده 220Hz

احسب :

١) جهد الذروه ٢) مفاعلة المكثف السعوية ٣) اكبر قيمة للتيار المار في الدائرة ٤) التيار المار في الدائرة عند اي لحظة زمنية

الحل:

1)

$$V_{max} = \sqrt{2}V_{rms} = \sqrt{2} \times 220 = 311.13\ Volt$$

2)

$$X_C = \frac{1}{\omega c} = \frac{1}{2\pi \times 50 \times (60 \times 10^{-6})} = 53.05\Omega$$

3)

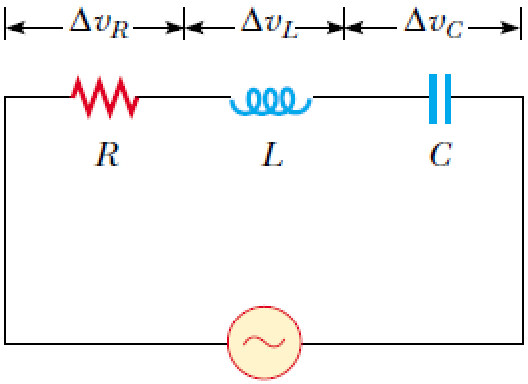
$$i_{max} = \frac{V_{max}}{X_c} = \frac{311.13}{53.05} = 5.86A$$

4) $i\ (t) = 5.86 \sin(314 + \frac{\pi}{2})$

33.5 The *RLC* Series Circuit

دائرة *RLC* على التوالي للتيار المتردد

يوضح الشكل المجاور دائرة تحتوي على مقاومة ومحث ومكثف موصولة على التوالي مع مصدر جهد متردد V.

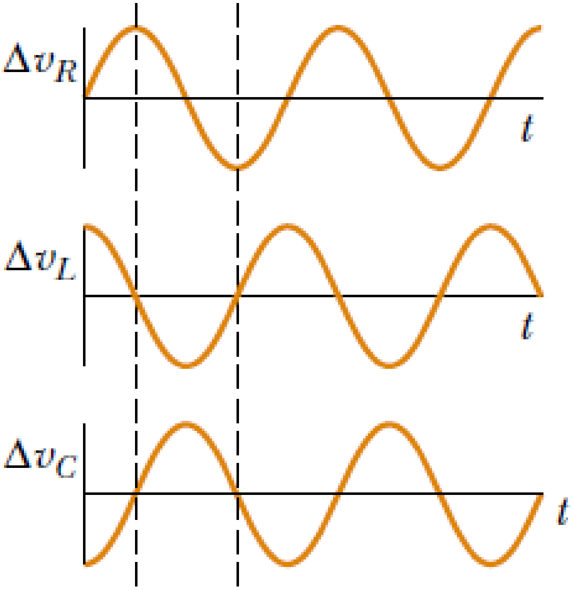


حيث يجزأ الجهد الكلي على عناصر الدائرة الثلاثة

$$\Delta v = \Delta v_L + \Delta v_R + \Delta v_C \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.8$$

حيث تمثل Δv_C و Δv_R و Δv_L قيم الجهد اللحظية عند زمن t المارة عبر المحث والمقاومة والمكثف على التوالي.كما إن التيار والجهد غير متحدين في الطور في العناصر الثلاثة حيث ان التيار يسبق الجهد في المكثف ويتخلف عنه في المحث ولذالك فان فروق الجهد في المعادلة السابقة (8) لا يجمع جمعا جبريا بسيطا وكذلك فإن المجموع الجبري القيم العظمى لفروق الجهد $\Delta V_C(\Delta V_{C_{max}})$ و $\Delta V_R(\Delta V_{R_{max}})$ و $\Delta V_L(\Delta V_{L_{max}})$ لا يساوي القيمة العظمى لجهد المصدر.

حيث



$$\Delta v_R = I_{\max} R \sin \omega t = \Delta V_R \sin \omega t$$

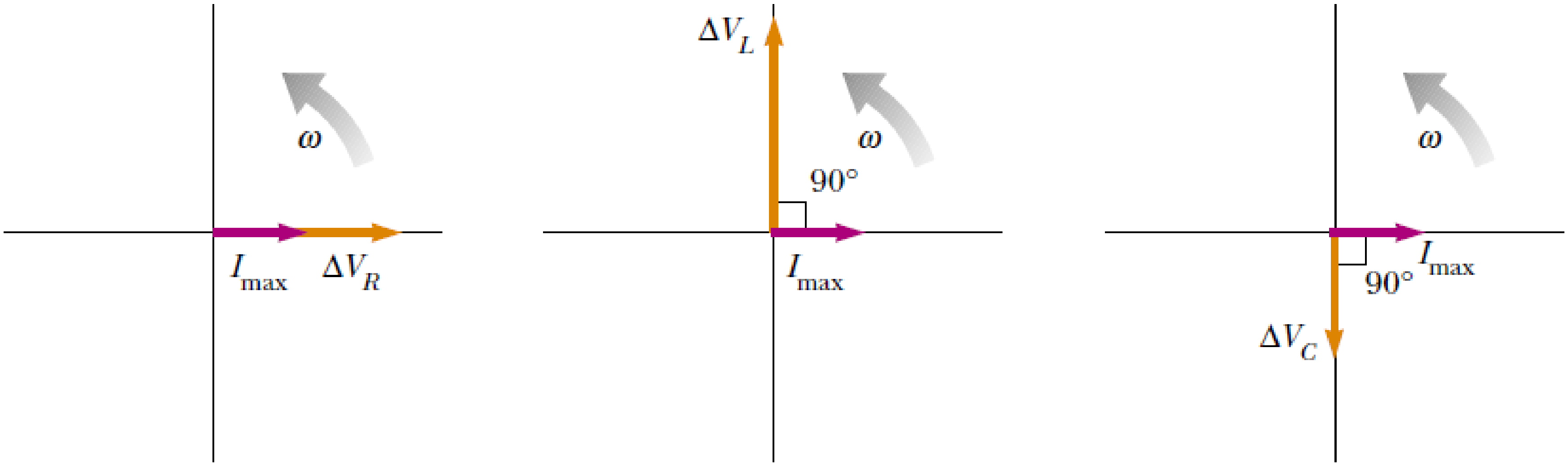
$$\Delta v_L = I_{\max} X_L \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \Delta V_L \cos \omega t$$

$$\Delta v_C = I_{\max} X_C \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -\Delta V_C \cos \omega t$$

حيث

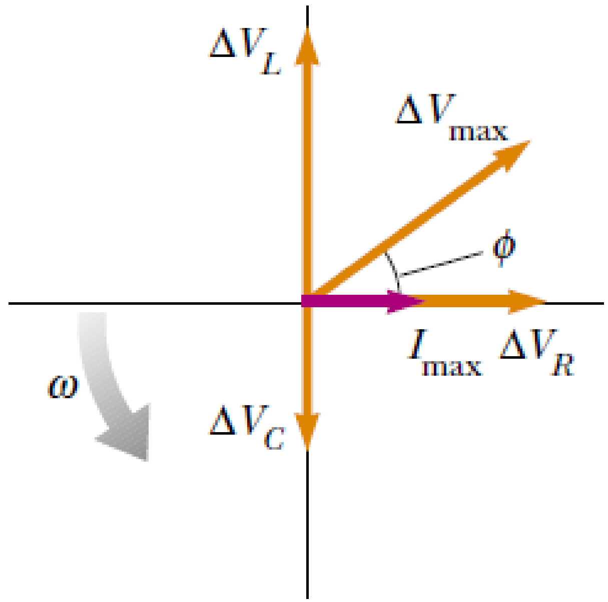
$$\Delta V_R = I_{\max} R \qquad \Delta V_L = I_{\max} X_L \qquad \Delta V_C = I_{\max} X_C$$

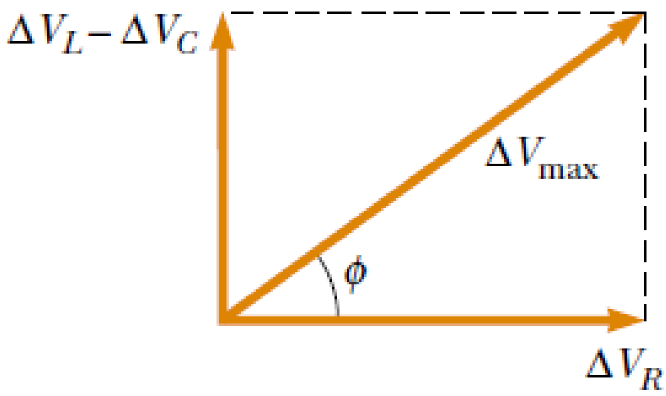
لايجاد التيار i المار في الدائرة في أي لحظة زمنية نستخدم مخطط الطور للدائرة



(a) Resistor (b) Inductor (c) Capacitor

ثم نبسط مخطط الطور ليصبح كما بالشكل التالي:





وبالتالي فان القيمة العظمى لجهد المصدر V_{max} تعطي بالعلاقة التالية:

$$\Delta V_{max} = \sqrt{\Delta V_{R_{max}}^2 + (\Delta V_{L_{max}} - \Delta V_{C_{max}})^2}$$

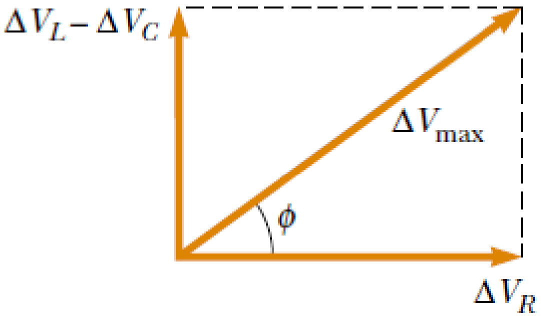
$$= \sqrt{(i_{max} R)^2 + ((i_{max} X_L - (i_{max} X_C)^2}$$

$$\Longrightarrow \Delta V_{max} = i_{max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$\Longrightarrow \Delta V_{max} = i_{max} \ Z$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

حيث تسمى Z بممانعة للدائرة

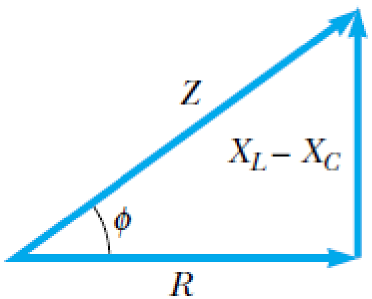


من الشكل السابق فإن زاوية الطور ϕ بين تيار الدائرة وجهد المصدر فيعطي بالعلاقة:

$$tan\phi = \frac{\Delta V_{L_{max}} - \Delta V_{C_{max}}}{\Delta V_{R_{max}}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{(\Delta V_{L_{max}} - \Delta V_{C_{max}})}{\Delta V_{R_{max}}} \qquad \dots\dots\dots\dots.\mathbf{9}$$

أو



$$\phi = \tan^{-1}\frac{(X_L - X_C)}{R} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots.\mathbf{10}$$

أو

$$\phi = \cos^{-1}\frac{R}{Z} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\mathbf{11}$$

33.7 Resonance in a Series *RLC* Circuit

الرنين في دائرة *RLC* على التوالي للتيار المتردد

في دائرة *RLC* يكون التيار والجهد مختلفين في الطور إلا إذا كانت:

$$X_L - X_C = 0 \qquad \Rightarrow \phi = 0 \qquad \dots\dots\dots 12$$

ويطلق على التردد الذي يحقق هذه الحالة تردد الرنين *resonance frequency* ويرمز له $\omega_\circ$ ويمكن حسابه من المعادلة (*12*) كما يلي:

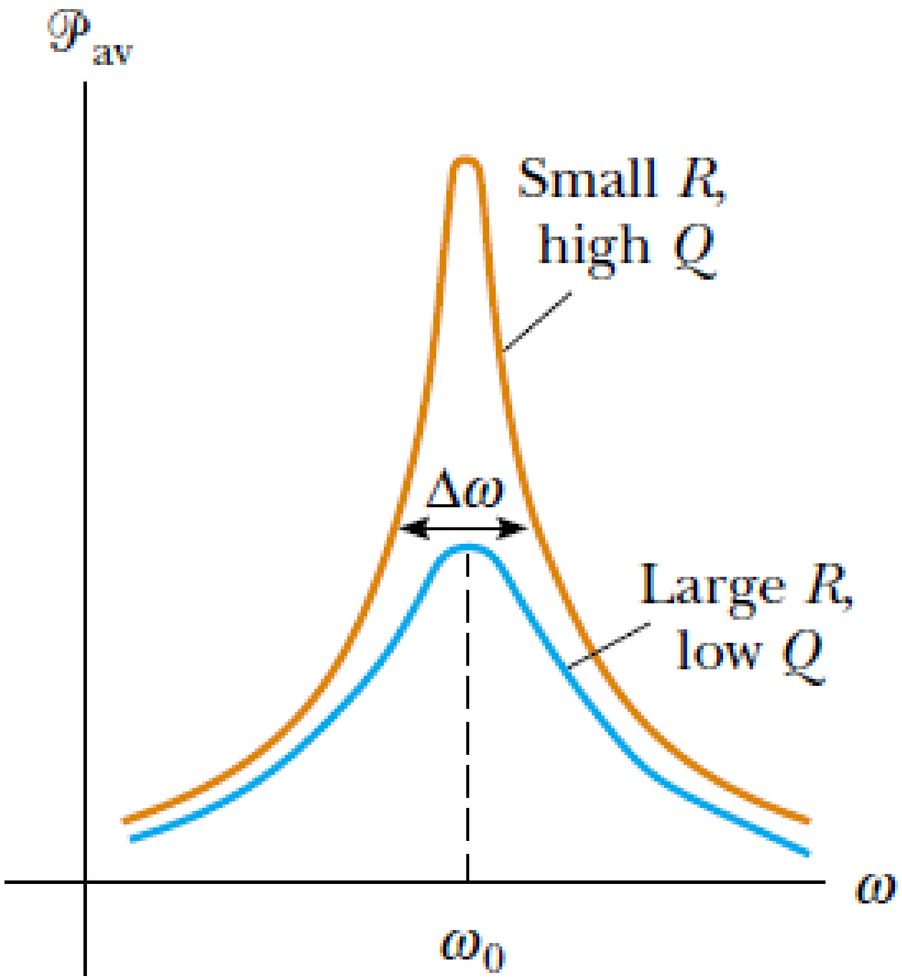
$$\omega_\circ L - \frac{1}{\omega_\circ C} = 0$$

$$\Rightarrow \omega_\circ = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .13$$

ويلاحظ انه عند تردد الرنين فان ممانعة دائرة RLC تصبح مساوية للمقاومة.

أي ان $Z = R$

أما لو افترضنا خلو دائرة RLC من المقاومة $R=0$ أي أنها تحتوي فقط على L و C فإن التيار المار يكون لا نهائيا ولكن هذا الوضع لا يتحقق عمليا لان كل عنصر من عناصر الدائرة مصنوع من أسلاك لها مقاومة وبالتالي فمن الأفضل القول بان التيار سيكون اكبر ما يمكن وليس نهائيا.


$\mathcal{P}_{av}$
Small R,
high Q
$\Delta\omega$
Large R,
low Q
ω
ω_0

مثال:

في دائرة ***RLC*** افترض ان $R = 10\Omega$ و $L = 30\ mH$ و $C = 15\mu F$
وان قيمة V_{rms} هي ***60V*** وتردده ***900Hz*** احسب:

١) المفاعلة السعوية والمفاعلة الحثية
٢) قيمة تيار الذروة
٣) القيمة العظمى للجهد بين طرفي كل عنصر من عناصر الدائرة

زاوية الطور

الحل:

(١

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \times 3.14 \times 900 \times (30 \times 10^{-3})$$

$$= 169.65\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega c} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 900 \ \times (15 \times 10^{-6})}$$

$$= 11.8\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{(10)^2 + 169.65 - 11.8)^2} = 158.17\Omega$$

(٢

$$i_{max} = \frac{V_{max}}{Z} = \frac{\sqrt{2}\, V_{rms}}{Z} = \frac{\sqrt{2}\, 60}{158.17} = 0.54\text{A}$$

(٣

$$V_{R_{max}} = i_{max} R = 0.54 \times 10 = 5.4V$$

$$V_{L_{max}} = i_{max} X_L = 0.54 \times 169.65 = 91.61V$$

$$V_{C_{max}} = i_{max} X_C = 0.54 \times 11.8 = 6.37V$$

(٤

$$\phi = \tan^{-1} \frac{(X_L - X_C)}{R} = \tan^{-1} \frac{169.65 - 11.8)}{10}$$

$$\phi = \tan^{-1} 15.79 = 86.4^{\circ}$$

33.6 Power in an AC Circuit

القدرة في دوائر التيار المتردد

القدرة الكهربائية المنتجة بواسطة مصدر الجهد المتردد هي :

$$p = \varepsilon i = \Delta V_{max}\, i_{max}\, sin\omega t\, \sin(\omega t - \phi)$$

$$\sin(\omega t - \phi) = \sin \omega t \cos \phi - \cos \omega t \sin \phi.$$

$$\Longrightarrow p = \Delta V_{max}\, i_{max}\, sin\omega t\, (\sin\omega t\, cos\phi - cos\omega t \sin \phi)$$

$$p = \Delta V_{max}\, i_{max}\, sin^2\omega t\ \ cos\phi - \Delta V_{max}\, i_{max}\ \ sin\omega t\, cos\omega t \sin \phi)$$

$$\sin \omega t \cos \omega t = \tfrac{1}{2}\sin 2\omega t$$

$$p = \Delta V_{max}\, i_{max}\, sin^2\omega t\ \ cos\phi - \Delta V_{max}\, i_{max}\ \frac{1}{2} sin2\omega t \sin \phi)$$

وبحساب القيمة المتوسطة يكون الحد الثاني = صفر لان القيمة المتوسطة للمقدار $sin2\omega t$ تساوي صفر أي ان :

$$p_{av} = \frac{1}{2} \Delta V_{max}\, i_{max} \quad cos\phi \qquad \dots\dots\dots 14$$

$$p_{av} = i_{rms}\, \Delta V_{rms} \quad cos\phi \qquad \dots\dots\dots\dots\dots 15$$

حيث يسمى المقدار $cos\phi$ بمعامل القدرة (power factor)

من المعادلة 14 ومقارنتها بمعادلة القدرة المتوسطة $(p_{av} = \frac{1}{2} i^2{}_{max}\ R)$ فإن:

$$\Delta V_{max} \quad cos\phi = i_{max}\, R$$

$$cos\phi = \frac{i_{max}\, R}{\Delta V_{max}}$$

$$p_{av} = i_{rms}\, \Delta V_{rms} \quad cos\phi \;= i_{rms} \left(\frac{\Delta V_{max}}{\sqrt{2}}\right)\left(\frac{i_{max} R}{\Delta V_{max}}\right)$$

$$\Longrightarrow p_{av} = i^2{}_{rms}\, \mathrm{R} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 16$$

$$or \quad p_{av} = i_{rms}\, \Delta \mathrm{V_{rms}} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots 17$$

مثال :

وصل على التوالي مكثف مواسعته $8\mu F$ وملف محاثته 4Ω مع مصدر جهد متردد قيمة $\mathrm{V_{rms}}$ له 12V وتردده 1000Hz احسب :

ممانعة الدائرة ٢) زاوية الطور ٣) عامل القدرة ٤) متوسط القدرة

الحل:

(١

$$X_L = \omega L = 2\pi f L = 2 \times 3.14 \times 1000 \times \left(30 \times 10^{-3}\right)$$

$$= 188.5\Omega$$

$$X_C = \frac{1}{\omega c} = \frac{1}{2 \times 3.14 \times 1000 \ \times (8 \times 10^{-6})}$$
$$= 19.89\Omega$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$$

$$= \sqrt{(4)^2 + 188.5 - 19.89)^2} = 168.66\Omega$$

٢)

$$\phi = \cos^{-1}\frac{R}{Z} = \cos^{-1}\frac{4}{168.66} = 88.64$$

٣)

$$cos\phi = cos88.64 = 0.024$$

٤)

$$p_{av} = i_{rms}\,\Delta V_{rms}\;\; cos\phi$$

$$p_{av} = \frac{\Delta V_{rms}}{Z}\Delta V_{rms}\;\; cos\phi$$

$$p_{av} = \frac{12}{168.66}\times 12 \times 0.024 = 0.020W$$