الميكانيكا

١- الكميات القياسية والكميات المتجهة:

الكمية القياسية لها مقدار فقط، وتحدد بواسطة عدد ووحدة، ومثال ذلك:

الكتلة: كتلة جسم الإنسان هي في المتوسط 70 Kg.

الحجم: حجم قاعة الدراسة هو حوالي 300 m3.

التردد: تردد التيار الكهربائي في البيوت للخط 110 V هو 60 Hz.

يتم جمع وطرح الكميات القياسية المتشابهة بالطرق الرياضية العادية.

الكميات المتجهة لها مقدار واتجاه معاً، وهي تحدد بعدد ووحدة واتجاه، ومثال ذلك:

الإزاحة: سيارة قطعت إزاحة 20 Km باتجاه الشرق.

القوة: يسلط رجل قوة مقدارها 10 N إلى الأسفل على الطاولة.

السرعة: يسير قطار بسرعة منتظمة مقدارها 600 Km/h باتجاه الجنوب الغربي.

ويتم تمييز الكميات المتجهة عند كتابتها بوضع علامة سهم على رمز الكمية فمثلاً نكتب **القوة:** $\vec{F}$، والسرعة: $\vec{v}$.

عندما يتم جمع وطرح الكميات المتجهة المتشابهة، فإنه يجب أن نأخذ الاتجاه في الاعتبار، ولذا لابد من معرفة طرق جمع المتجهات.

جمع المتجهات:

أولاً: الطريقة البيانية لجمع المتجهات:

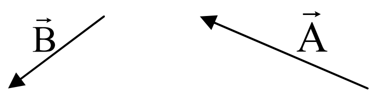
يمثل المتجه بيانياً بخط مستقيم وفي نهايته سهم، وبحيث يكون طول المستقيم متناسباً مع مقدار الكمية المتجهة واتجاه السهم يمثل اتجاه الكمية المتجهة، فمثلاً:

المتجه $\vec{A}$ له طول ومقدار مختلف عن المتجه $\vec{B}$.

ونعبّر عن طول أو مقدار المتجه عادة بالطريقة التالية:

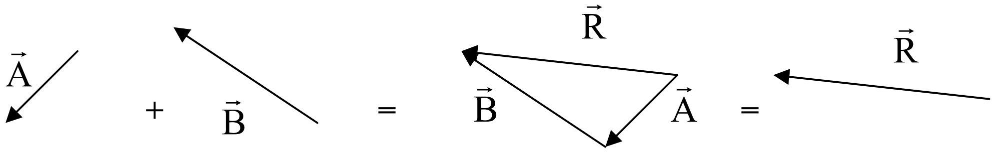
طول (أو مقدار) المتجه $A = |\vec{A}| = \vec{A}$

طول (أو مقدار) المتجه $B = |\vec{B}| = \vec{B}$



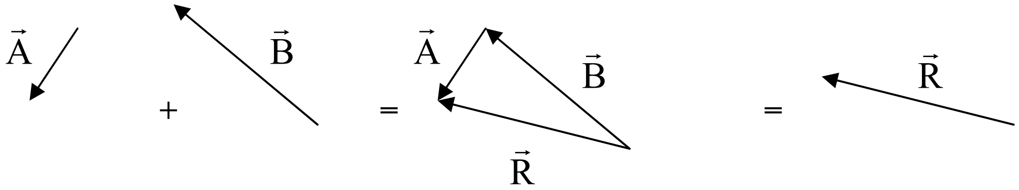
لجمع $\vec{A}$ و $\vec{B}$ بيانياً نتبع الآتي:

نرسم $\vec{B}$ بحيث أن بدايته عند نهاية $\vec{A}$، ثم نوصل بين بداية $\vec{A}$ ونهاية $\vec{B}$ بالمتجه $\vec{R}$ والذي يمثل الجمع الاتجاهي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$، أي أن: $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}$



ويمكن الحصول على نفس النتيجة بتغيير الترتيب، أي أن: $\vec{R}=\vec{B}+\vec{A}$

وبيانياً نرسم عند بداية $\vec{B}$ ثم نوصل بين بداية $\vec{B}$ ونهاية $\vec{A}$ بالمتجه $\vec{R}$ والذي له نفس الاتجاه السابق. ويسمى المتجه $\vec{R}$ بالمحصلة.

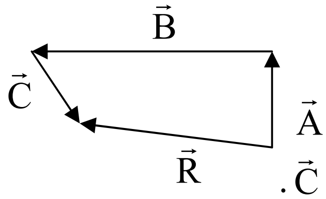


ونتبع نفس الأسلوب السابق عند جمع أكثر من متجهين كما في المثال التالي:

مثال ١:

سيارة تقطع 30 km باتجاه الشمال، ثم تتحرك غرباً لمسافة 50 km ثم بالاتجاه الجنوب الشرقي لمسافة 20 km. ما هو البعد بين نقطتي البداية والنهاية؟

الحل:



نسمي الإزاحة باتجاه الشمال المتجه $\vec{A}$.

نسمي الإزاحة باتجاه الغرب المتجه $\vec{B}$.

نسمي الإزاحة باتجاه الجنوب االشرقي المتجه $\vec{C}$.

فتكون المحصلة $\vec{R}$ هي الجمع الاتجاهي للمتجهات الثلاث، ونحددها بتوصيل بداية المتجه الأول مع نهاية المتجه الأخير ونكتب: $\vec{R}=\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}$ واتجاه $\vec{R}$ كما هو مبين بالشكل هو الشمال الغربي، ومقدار $\vec{R}$ هو:

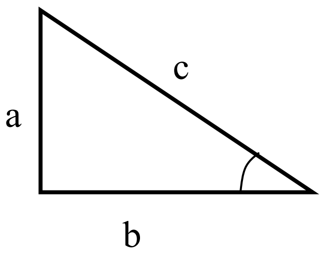
$$R=\left|\vec{R}\right|\cong 39\,\text{km}$$

حيث تم تحديد المقدار (الطول) بالقياس المباشر بعد أخذ مقياس مناسب للرسم.

ثانياً: الطريقة المثلثية لجمع المتجهات:

بالرغم من إمكانية تحديد مقدار واتجاه المحصلة $\vec{R}$ لمتجهين أو أكثر بالطريقة البيانية السابقة، إلا أن هذا الأسلوب غير دقيق تماماً. وللحصول على نتيجة دقيقة للمحصلة نستخدم المثلثات.

للمثلث القائم الزاوية المجاور، لدينا:



$$\sin\theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{a}{b}$$

$$\sin\phi = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\phi = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{a}{c}$$

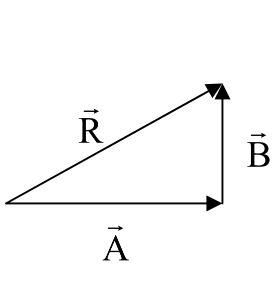
$$\tan\phi = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الضلع المجاور}} = \frac{b}{a}$$

ومن نظرية فيثاغورث:

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$a^2 = c^2 - b^2 \Rightarrow a = \sqrt{c^2 - b^2}$$

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b = \sqrt{c^2 - a^2}$$



كذلك لدينا العلاقة المشهورة: مجموع زوايا المثلث= 180°

لذلك في المثلث القائم الزاوية، مجموع الزاويتين: $\theta + \phi = 90^\circ$

ومن المناسب استخدام هذه الطريقة في الحالة التالية:

إذا كان لدينا متجهين متعامدين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فإنه من السهل إيجاد مقدار المحصلة لهما R بتطبيق نظرية فيثاغورث:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2}$$

كذلك يمكن تحديد اتجاه R بمعرفة الزاوية θ من العلاقة:

$$\tan\theta = \frac{B}{A} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{B}{A}$$

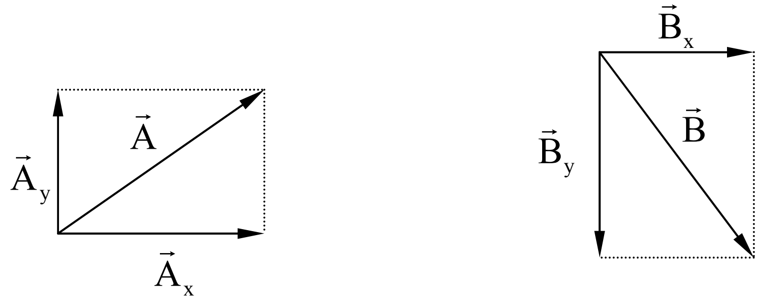
أما إذا كان المتجهان $\vec{A}$ و $\vec{B}$ غير متعامدين، فإننا نستخدم طريقة المركبات لجمع المتجهات.

ثالثاً: طريقة المركبات لجمع المتجهات:

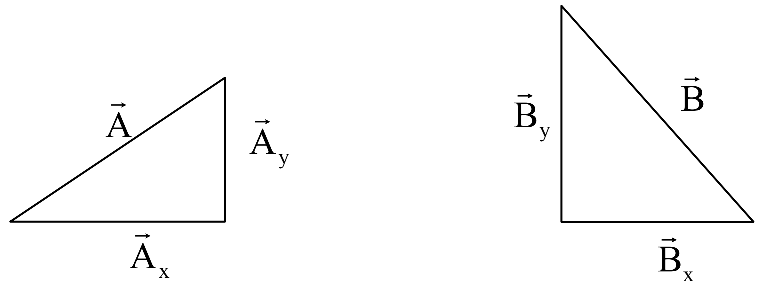
إذا كان لدينا متجهين غير متعامدين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ فإنه للحصول على الجمع الاتجاهي لهما نقوم أولاً بتحليل كل منهما إلى مركبتين متعامدتين أحدهما على الاتجاه x والأخرى على الاتجاه y ، ونستخدم طريقة جمع المتجهات بيانياً للحصول على الآتي:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$

$$\vec{B} = \vec{B}_x + \vec{B}_y$$



ونستخدم طريقة المثلثات لتحديد مقدار المركبات لكل متجه كالآتي:



في المثلث القائم الزاوية الخاص بالمتجه $\vec{A}$:

$$\sin\theta = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{A_y}{A} \Rightarrow A_y = A\sin\theta$$

$$\cos\theta = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{A_x}{A} \Rightarrow A_x = A\cos\theta$$

وبنفس الطريقة للمثلث القائم الزاوية الخاص بالمتجه $\vec{B}$:

$$\sin\phi = \frac{\text{الضلع المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{B_y}{B} \Rightarrow B_y = B\sin\phi$$

$$\cos\phi = \frac{\text{الضلع المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{B_x}{B} \Rightarrow B_x = B\cos\phi$$

ثم نقوم بجمع مركبات المتجهات لكل اتجاه على حدة فنحصل على المركبة المحصلة في الاتجاه x من العلاقة:

$$\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x$$

وعلى المركبة المحصلة في الاتجاه y من العلاقة:

$$\vec{R}_y = \vec{A}_y + \vec{B}_y$$

وبما أن R_x و R_y مركبتين متعامدتين، فإننا نطبق نظرية فيثاغورث للحصول على مقدار المتجه الفضائي والذي يمثل المحصلة R كالتالي:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

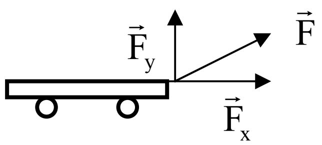
ونحدد اتجاه R من العلاقة المثلثية:

$$\tan\alpha = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \alpha = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x}$$

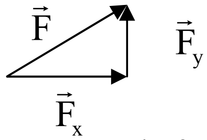
مثال٢:

يقوم رجل بسحب العربة المبينة بالشكل بواسطة قوة مائلة $\vec{F}$ مقدارها 10 N وبحيث $\theta = 30^\circ$.

حدد مقدار المركبات الأفقية والعمودية للقوة F؟



الحل:



بالنظر إلى المثلث القائم الزاوية نجد أن:

$$\sin\theta = \frac{F_y}{F} \Rightarrow F_y = F\sin\theta = 10 \times \sin 30 = 10 \times 0.5$$

$$\therefore F_y = 5\,N$$

$$\cos\theta = \frac{F_x}{F} \Rightarrow F_x = F\cos\theta = 10 \times \cos 30 = 10 \times 0.866$$

$$\therefore F_x = 8.66\,N$$

<u>مثال٣:</u>

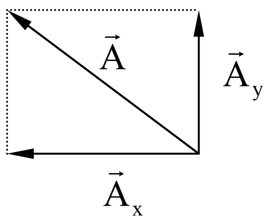
قارب يتجه نحو الشمال الغربي بسرعة $10\,km/h$ في نهر يجري بسرعة 3 km/h باتجـــاه الشرق، ما هو مقدار واتجاه سرعة القارب بالنسبة للأرض؟

<u>الحل:</u>

١- نمثل سرعة القارب بالمتجه $\vec{A}$. ونمثل سرعة النهر بالمتجه $\vec{B}$.

٢- نقوم بتحليل المركبات:

نحلل $\vec{A}$ إلى مركبتين:



$$A_y = A\sin 45^\circ = 10 \times 0.707 = 7.07$$

$$A_x = A\cos 45^\circ = 10 \times 0.707 = 7.07$$

المركبة $\vec{B}$ هي بالاتجاه x، أي أن:

$$B = B_x = 3$$

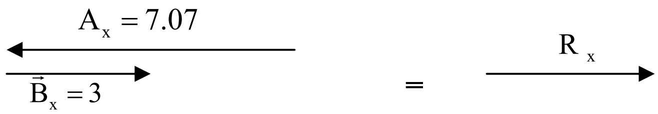
$B_y = 0$ (أي لا توجد مركبة بالاتجاه y)

٣- نقوم بجمع المركبات في كل اتجاه على حدة، لنحصل على المركبتين المتعامـــدتين R_x و R_y كالتالي:

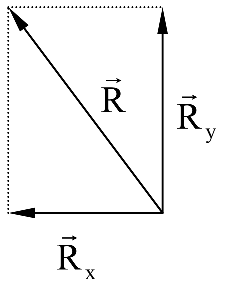
$$\vec{R}_x = \vec{A}_x + \vec{B}_x$$

$$R_x = -7.07 + 3 = -4.07$$

$$R_y = A_y + B_y = A_y + 0 = A_y = 7.07$$



٤- نطبق نظرية فيثاغورث للحصول على المحصلة R:



$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$
$$= \sqrt{(4.07)^2 + (7.07)^2}$$
$$\cong 8.2\,\text{km/h}$$

ونحدد اتجاه R من العلاقة:

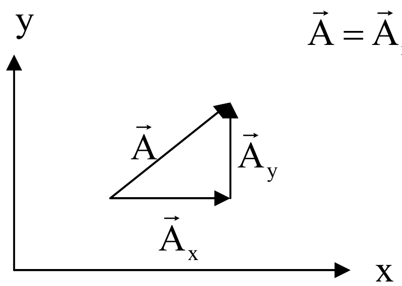
$$\tan\theta = \frac{R_y}{R_x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\frac{R_y}{R_x} = \tan^{-1}\frac{7.07}{4.07} = 1.75$$

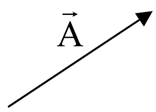
$$\therefore\ \theta = 60^\circ$$

متجهات الوحدة:

إذا كان لدينا المتجه $\vec{A}$، فإنه يمكن أن يُكتب على صورة الجمع الاتجاهي لمركبتين عل الاتجاه x و y كالآتي:

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y$$





وقد حصلنا على $\vec{A}_x$ و $\vec{A}_y$ المبينة في الرسم المجاور من إسقاط $\vec{A}$ على الاتجاهين x و y على التوالي، وهذه هي طريقة كتابة المتجه بتحليله إلى مركباته الأصلية.

ومن الممكن كتابة المتجه $\vec{A}_x$ على الصورة:

$$\vec{A}_x = \hat{i}\,A_x$$

حيث: $\left|\vec{A}_x\right| = A_x$ يمثل طول المتجه $\vec{A}_x$.

و : $\hat{i}$ يسمى متجه الوحدة في الاتجاه $(+x)$، ويكون موازياً للاتجاه x، ومقــداره وحدة واحدة، أي أن: $|\hat{i}| = 1$

ولذا فإن متجه الوحدة لا يؤثر على مقدار (أو طول) المتجه فهو يحدد الاتجاه فقط.

وبصورة مشابهة يمكن أن نكتب $\vec{A}_y$ على الصورة:

$$\vec{A}_y = \hat{j} A_y$$

حيث: $|\vec{A}_y| = A_y$ يمثل طول المتجه $\vec{A}_y$.

و : $\hat{j}$ يسمى متجه الوحدة في الاتجاه $(+x)$، ويكون موازياً للاتجاه x، ومقــداره أيضاً وحدة واحدة، أي أن: $|\hat{j}| = 1$

ويمكن تعريف متجه الوحدة بأنه أداة رياضية لتحديد اتجاه المتجه فقط، وليس لها علاقــة بمقدار أو طول المتجه.

بالتعويض عن $\vec{A}_x$ و $\vec{A}_y$ في المعادلتين (2) و (3) في المعادلة (1) نحصل على:

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j}$$

مثال:

اكتب مركبات المتجه التالي $\vec{A}$، ثم عدد المتجه بالطريقتين: البيانية و المثلثية، وتحقق مـــن صحة الحل بطريقة تحليل المتجه إلى مركباته؟

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$$

الحل:

بالمقارنة مع المعادلات (1) و (2) و (3) و (4) نجد أن:

$$\vec{A}_x = 2\hat{i}$$

$$A_x = 2$$

$$\vec{A}_y = -4\hat{j}$$

$$A_y = -4$$

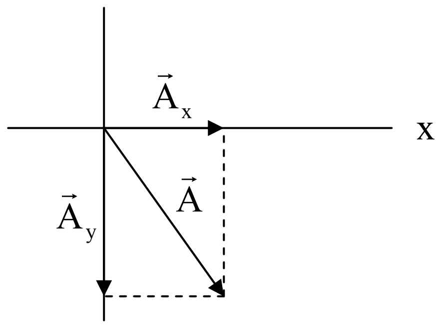
ولتحديد المتجه بيانياً نتبع الآتي:

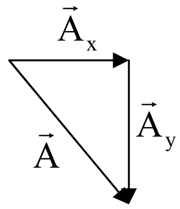
١- نعتبر كل وحدة = 1 cm

٢- نحسب 2 cm بالاتجاه الموجب لـــ x ، لأن: $A_x = 2$

٣- نحسب 4 cm بالاتجاه السالب لـــ y ، لأن: $A_y = -4$

٤- نحدد المتجه $\vec{A}$ والذي يمثل المحصلة للمتجهين $\vec{A}_x$ و $\vec{A}_y$ بالرجوع للطريقة البيانية، كما هو مبين بالشكل المجاور.





لتحديد المتجه بالطريقة المثلثية نتبع الآتي:

١- نحدد المقدار:

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \\ &= \sqrt{(2)^2 + (-4)^2} \\ &= 4.48 \end{aligned}$$

٢- نحدد الاتجاه:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \left|\frac{A_y}{A_x}\right| \\ &= \left|\frac{-4}{2}\right| = 2 \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} 2 = 63.4^\circ$$

وللتحقق من صحة الحل بتحليل المتجه $\vec{A}$ إلى مركباته نكتب الآتي:

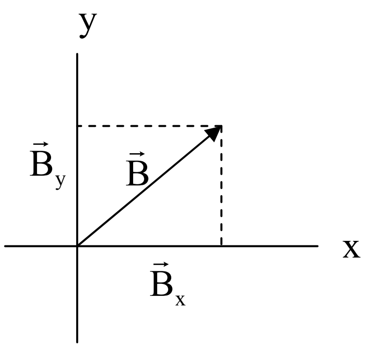
$$\begin{aligned} A_x &= A\cos\theta \\ &= 4.48 \cos 63.4 \cong 2 \\ A_y &= A\sin\theta \\ &= 4.48 \sin 63.4 \cong 4 \end{aligned}$$

مثال:

اكتب للمتجه التالي: $\vec{B}$ المركبات، ثم حدد المتجه بالطريقتين البيانية و المثلثية. وتحقق من صحة الحل بطريقة تحليل المتجه إلى مركباته.

$$\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

الحل:



بالمقارنة مع المعادلات (1) و (2) و (3) و (4) نجد أن:

$$\vec{B}_x = 2\hat{i}$$

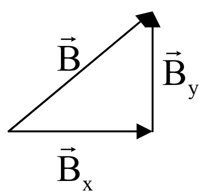
$$B_x = 2$$

$$\vec{B}_y = 2\hat{j}$$

$$B_y = 2$$

وبإتباع نفس طريقة المثال السابق، نحدد المتجه بيانياً كما هو مبين بالشكل المجاور.

١- نحدد المقدار:



$$B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2}$$

$$= \sqrt{(2)^2 + (2)^2}$$

$$= 2.82$$

٣- نحدد الاتجاه:

$$\tan\theta = \left|\frac{B_y}{B_x}\right|$$

$$= \left|\frac{2}{2}\right| = 1$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} 1 = 45^\circ$$

وللتحقق من صحة الحل بتحليل المتجه $\vec{B}$ إلى مركباته نكتب:

$$B_x = B\cos\theta$$

$$= 2.82\cos 45 \cong 2$$

$$B_y = B\sin\theta$$

$$= 2.82\sin 45 \cong 2$$

مثال:

بين الجمع الاتجاهي للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ المذكورين في المثالين السابقين، بالطريقة البيانية والحسابية (المثلثية والتحليل إلى المركبات).

$$\vec{A} = 2\hat{i} - 4\hat{j}$$

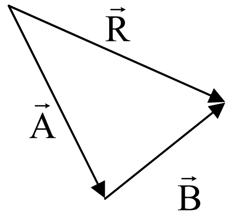
$$\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j}$$

الحل:

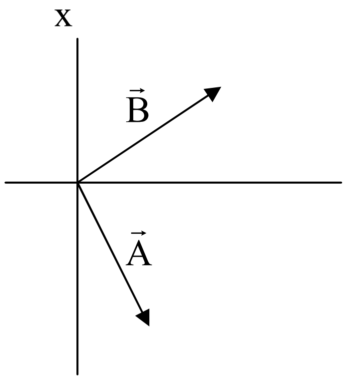
نفرض أن المحصلة للمتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$ هو المتجه $\vec{R}$ بحيث أن:

$$\vec{R} = \vec{A} + \vec{B}$$

ونحدد المتجه $\vec{R}$ بالطريقة البيانية كما هو موضح بالشكل المجاور.



الطريقة الحسابية:

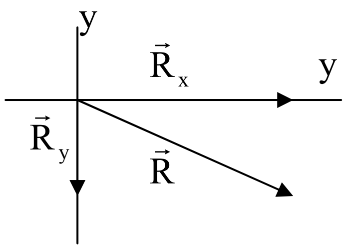


نكتب المتجه $\vec{R}$ بالتحليل إلى المركبات كالآتي:

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$
$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$$

حيث:

$$R_x = (A_x + B_x)$$
$$= 2 + 2 = 4$$
$$R_y = (A_y + B_y)$$
$$= -4 + 2 = -2$$



فيكون المتجه $\vec{R}$:

$$\vec{R} = 4\hat{i} - 2\hat{j}$$

ولتحديد طول المتجه $\vec{R}$:

$$R = \left|\vec{R}\right| = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$
$$= \sqrt{(4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 4.47$$

ولتحديد المتجه $\vec{R}$:

$$\tan\theta = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \left|\frac{-2}{4}\right| = 0.5$$

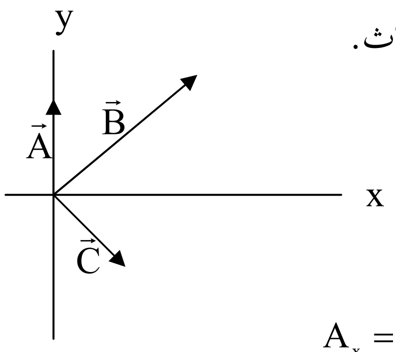
$$\therefore \theta = \tan^{-1} 0.5 = 2.26^\circ$$

مثال:

إذا كان:

$$|\vec{A}| = 20$$
$$|\vec{B}| = 40$$
$$|\vec{C}| = 30$$

فاحسب:



١- المركبات x و y للمحصلة للمتجهات الثلاث.

٢- مقدار واتجاه المحصلة.

الحل:

من الشكل:

$$A_x = A\cos 90 = 20 \times 0 = 0$$
$$A_y = A\sin 90 = 20 \times 1 = 20$$

$$B_x = B\cos 45 = 40 \times 0.707 \cong 28.3$$
$$B_y = B\sin 45 = 40 \times 0.707 \cong 28.3$$

$$C_x = C\cos 45 = 30 \times 0.707 \cong 21.21$$
$$C_y = -C\sin 45 = -30 \times 0.707 = -21.21$$

نفرض لمتجه المحصلة $\vec{R}$، حيث:

$$\vec{R} = \vec{R}_x + \vec{R}_y$$
$$= R_x\hat{i} + R_y\hat{j}$$

فيكون:

$$R_x = A_x + B_x + C_x$$
$$= 0 + 28.3 + 21.21 \cong 49.5$$
$$\therefore \vec{R}_x = 49.5\hat{i}$$

ويكون:

$$R_y = A_y + B_y + C_y$$
$$= 20 + 28.3 - 21.21 \cong 27.1$$
$$\therefore \vec{R}_y = 27.1\hat{j}$$

فيصبح المتجه $\vec{R}$:

$$\vec{R} = 49.5\hat{i} + 27.1\hat{j}$$

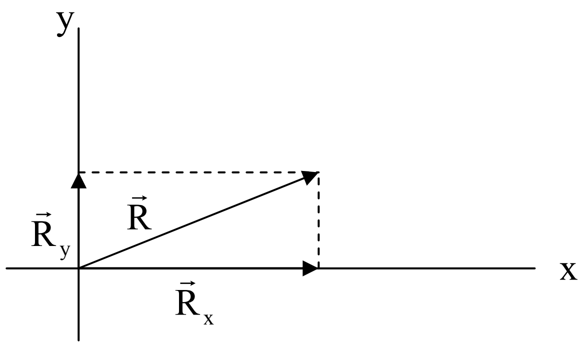
ثم نحسب مقدار $\vec{R}$:

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2}$$
$$= \sqrt{(49.5)^2 + (27.1)^2} = \sqrt{3185} \cong 56.4$$

ونحدد اتجاه $\vec{R}$:

$$\tan\theta = \left|\frac{R_y}{R_x}\right| = \left|\frac{27.1}{49.5}\right| \cong 0.547$$

$$\therefore \theta = \tan^{-1} 0.475 = 28.7^\circ$$



<u>الأجسام في حالة السكون(الشرط الأول للتوازن):</u>

يُقال أن الجسم في حالة توازن خطي إذا كانت محصلة القوى المؤثرة عليه متـــساوية. وإذا كان الجسم ساكناً في الأصل، فإنه سوف يستمر على حالة السكون طالما بقيت محـــصلة القوى المؤثرة عليه متعادلة.

ويمكن كتابة ذلك رياضياً بالعلاقة: $\sum F = 0$

وبالنظر إلى مركبات القوة، نكتب بصورة أكثر تفصيلاً:

(محصلة مجموع القوى في الاتجاه x = صفر) $\sum F_x = 0$

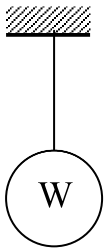
(محصلة مجموع القوى في الاتجاه y = صفر) $\sum F_y = 0$

<u>مثال ١:</u>

يزن الجسم في الشكل المجاور 50 N وهو مثبت بحبل عديم الوزن. ما هو الشد الحاصل في الحبل.

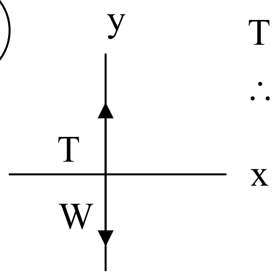
<u>الحل:</u>

نرمز لوزن الجسم W، فيكون W=50 N واتجاهه إلى أسفل. ونرمز لقوة الشد في الحبل بالرمز T، واتجاهها إلى الأعلى. نحدد محصلة القوى المؤثرة على الجسم في الاتجاهين x و y.



$\sum F_x = 0$ (لأنه ليس هناك قوى في الاتجاه x)

$\sum F_y = 0$ (لأن الجسم ساكن)



$$T - W = 0$$

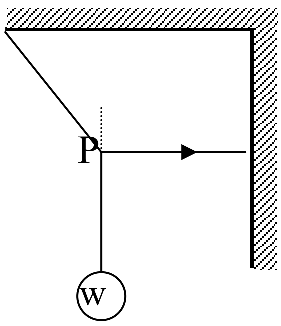
قوة الشد في الخيط $\therefore T = W = 50\ N$

مثال ٢:

إذا كان الشد في الحبل الأفقي هو 30 N ، فاحسب وزن الجسم في الشكل المجاور؟

الحل:

نقوم بتحليل القوى عند النقطة P، كما هو مبين في الشكل.



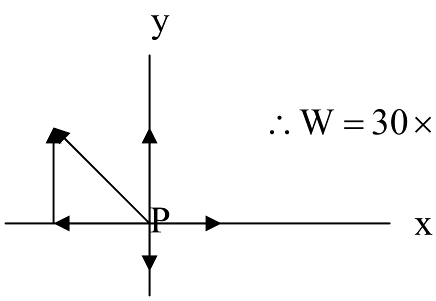
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow 30 - T_2 \cos 40 = 0$$

$$\therefore T_2 \cos 40 = 30 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_2 \sin 40 - W = 0$$

$$\therefore T_2 \sin 40 = W \qquad (2)$$

بقسمة المعادلة (2) على المعادلة (1) نحصل على:



$$\tan 40 = \frac{W}{30}$$

$$\therefore W = 30 \times \tan 40 = 30 \times 0.839 \cong 25.2\,N$$

مثال:

إذا كان الشد في الحبل A هو 30 N، فاحسب الشد في الحبل B ومقدار W في الشكل المجاور.

الحل:

نقوم بإجراء التحليل للقوى المؤثرة عند نقطة التقاطع، كما هو مبين بالشكل:

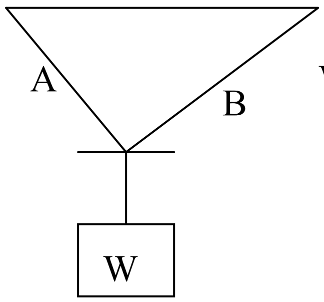
$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T_B \cos 60 - T_A \cos 50 = 0 \qquad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow T_B \sin 60 + T_A \sin 50 - W = 0 \qquad (2)$$

بالتعويض عن $T_A = 30\ \text{N}$ في المعادلة (1) نحصل على:

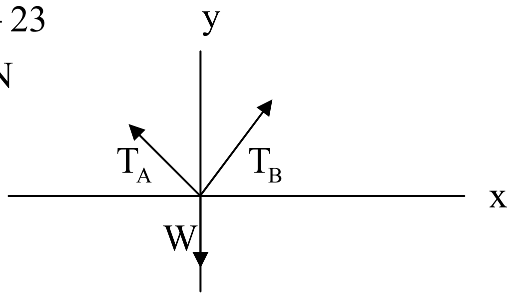
$$T_B \cos 60 - 30 \cos 50 = 0$$

$$T_B = \frac{30 \cos 50}{\cos 60} = \frac{30 \times 0.643}{0.5} \cong 38.6\,\text{N}$$



بالتعويض عن T_B و T_A في المعادلة (2) نحصل على:

$$\begin{aligned} W &= T_B \sin 60 + T_A \sin 50 \\ &= 38.6 \times 0.866 + 30 \times 0.766 \\ &= 33.4 + 23 \\ &= 56.4\ \text{N} \end{aligned}$$



<u>معادلات الحركة المنتظمة في بعد واحد:</u>

متوسط السرعة $(\overline{v})$: عندما يقطع جسم ما إزاحة x خلال زمن مقداره t، وكانت سرعته الابتدائية v_i وسرعته النهائية v_f فإن متوسط السرعة يُعطى بالعلاقة:

$$\text{السرعة المتوسطة} = \frac{\text{الازاحة المقطوعة}}{\text{الزمن}}$$

$$\overline{v} = \frac{v_f + v_i}{2} = \frac{x}{t}$$

والسرعة كمية متجهة ووحدها ms^{-1}.

<u>السرعة الآنية (v):</u> هي مقدار سرعة الجسم عند لحظة معينة، وتعطى بالعلاقة:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

مثال:

إذا كانت القراءة لعداد سيارة في بداية رحلة 22687 km، ثم أصبحت القــــراءة 22791 km في نهاية الرحلة التي استغرقت 4 h، احسب متوسط سرعة السيارة على اعتبــــار أن السيارة كانت تسير على خط مستقيم.

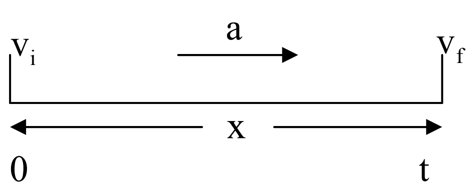
الحل:

$$\bar{v} = \frac{x}{t} = \frac{22791 - 22687}{4} = 26 \text{ km/h}$$
$$= 26 \frac{\text{km}}{\text{h}} \times \frac{1000 \text{ m/km}}{3600 \text{ s/h}} = 7.2 \text{ m/s}$$

التسارع (a): هو معدل تغير السرعة بالنسبة للزمن. ويكون التسارع موجباً عندما تتزايد السرعة، ويكون سالباً عندما تتناقص السرعة. وهو كمية متجهة ووحدته ms^{-2}. وسوف نقتصر في دراستنا على التسارع المنتظم حيث يكون معدل تغير السرعة ثابتـــاً بالنـــسبة للزمن.

$$\text{التسارع} = \frac{\text{التغير في السرعة}}{\text{الزمن}}$$

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$



حيث v_i تمثل السرعة الابتدائية للجسم.

v_f تمثل السرعة النهائية للجسم.

يتحرك الجسم بتسارع منتظم عندما تتغير سرعته بمعدل ثابت بالنسبة للزمن. وتغير السرعة يحصل إما بتغير مقدارها أو تغير اتجاهها أو كليهما معاً.

ولكتابة معادلات الحركة المنتظمة في بعد واحد، نفرض أن هناك سيارة تتحرك بـــسرعة ابتدائية v_i وتقطع إزاحة x خلال زمن t والذي عنده تصبح سرعتها النهائية v_f. فـــإذا كان تسارع السيارة هو a، فإنه يمكن كتابة معادلات الحركة التالية التي نستطيع بواسطتها تحديد الكمية المجهولة في السؤال إذا كانت الكميات الأخيرة معلومة.

معادلات الحركة المنتظمة في بعد واحد

$$\left.\begin{aligned}
&v_f = v_i + at\\
&\overline{v} = \frac{v_i + v_f}{2}\\
&x = v_i t + \frac{1}{2}at^2\\
&v_f^2 = v_i^2 + 2ax\\
&x = \overline{v}t \Rightarrow \frac{(v_i + v_f)t}{2}
\end{aligned}\right\}$$

مثال: سيارة تتحرك بسرعة ابتدائية $(20\,ms^{-1})$، وبتسارع $(-1ms^{-2})$. احسب سرعتها بعد مرور $(10\ s)$.

الحل:

$v_f = v_i + at = 20 + (-1) \times 10 = 20 - 10 = 10\ ms^{-1}$

مثال :شاحنة تتحرك من السكون وتسير بتسارع $5ms^{-2}$. إحسب سرعتها والمسافة التي تقطعها الشاحنة بعد مرور $4s$.

الحل:

$$\begin{aligned}
x &= v_i t + \frac{1}{2}at^2\\
&= 0\times 4 + \frac{1}{2}\times 5\times (4)^2\\
&= 0 + \frac{1}{2}\times 5\times 16\\
&\therefore x = 40\ m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_f^2 &= v_i^2 + 2ax\\
&= 0 + 2\times 5\times 40 = 400\\
\therefore v_f &= \sqrt{400} = 20\ ms^{-1}
\end{aligned}$$

مثال: تبدأ سيارة حركتها من السكون وتتسارع بانتظام حتى تصبح سرعتها $(5\ \ m/s)$ في زمن قدره $(10\ s)$. جِدْ تسارع السيارة والمسافة المقطوعة خلال هذا الزمن؟

الحل:

$$v_f = v_i + at \Rightarrow a = \frac{v_f - v_i}{t}\ \therefore a = \frac{5-0}{10} = 0.5\ ms^{-2}$$

$$x = \frac{(v_i + v_f)}{2}\times t = \frac{(0+5)}{2}\times 10 = 25\ m$$

السقوط الحر:

يمكن تطبيق معادلات الحركة المنتظمة في بعد واحد على الأجسام الساقطة سقوطاً حــــراً بعد استبدال قيمة التسارع a في المعادلات بتسارع الجاذبية g والـــذي قيمتـــه تـــساوي $9.8\,ms^{-2}$ واتجاهه دائماً إلى الأسفل. وبالتالي تكون المعادلات هي:

$$\left.\begin{aligned} v_f &= v_i - gt \\ y &= v_i t - \frac{1}{2} g t^2 \\ v_f^2 &= v_i^2 - 2gy \end{aligned}\right\}$$
معادلات الحركة للأجسام الساقطة سقوطاً حراً

مثال:

يسقط حجر من بناية ارتفاعها 450 m. بإهمال مقاومة الهواء، احسب:

١- الوقت اللازم لوصول الحجر إلى الأرض.

٢- سرعة الحجر حين اصطدامه بالأرض.

الحل:

(١)

$$y = v_i t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y = 0 \times t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$\therefore t^2 = \frac{-2y}{g} = \frac{-2 \times 450}{-9.8} = 92$$

$$\therefore t = 9.6 s$$

(٢)

$$v_f = v_i - gt$$

$$\therefore v_f = 0 - 9.8 \times 9.6 = -94\ m/s$$

ظهرت إشارة السرعة سالبة لأن اتجاه السرعة هو إلى الأسفل.

مثال:

يُقذف حجر من الأرض إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 16 m/s. احسب:

١- أقصى ارتفاع يصل إليه الحجر.

٢- الزمن اللازم لرجوع الحجر إلى الأرض.

الحل:

(١) عند أقصى ارتفاع: $V_f = 0 \Rightarrow v_f = v_i^2 - 2gy = 0$

$$\therefore 2gy = v_i^2 \Rightarrow y = \frac{v_i^2}{2g} = \frac{(16)^2}{2 \times 9.8} = 13\,m$$

(٢) إن الزمن اللازم لرجوع الحجر إلى الأرض هو ضعف زمن الصعود، فنحسب أولاً زمن الصعود t:

$$v_f = v_i - gt = 0 \Rightarrow t = \frac{v_i}{g} = \frac{6}{9.8} = 1.6\,s$$

$\therefore$ الزمن المطلوب $= 2t = 2 \times 1.6 = 3.2\,s$

قوانين نيوتن للحركة:

العطالة (عزم القصور الذاتي): هي الخاصية التي يمتلكها الجسم لمقاومة التغير في حالته السكونية أو الحركة المنتظمة على خط مستقيم.

الكتلة (m): هي المقياس الكمي لعطالة الجسم، فإذا كانت مقاومة الجسم لتغيير حالته السكونية أو الحركية كبيرة فهذا يعني أن كتلته كبيرة. وتقاس الكتلة بوحدة kg.

القوة (F): هي مؤثر قد يؤدي إلى تغيير الحالة الحركية للجسم ويدل عليها وجود تسارع يغير من قيمة أو اتجاه سرعة الجسم، وتقاس القوة بوحدة N.

ومن أمثلة القوة، قوة الجاذبية المؤثرة على الجسم والتي تساوي وزن الجسم W، حيث:

$$F = W = mg$$

قانون نيوتن الأول (قانون العطالة): يبقى الجسم على حالته من السكون أو الحركة بسرعة ثابتة ما لم تؤثر عليه محصلة قوى خارجية لا تساوي الصفر.

وبالصورة الرياضية نكتب:

$$\sum F = 0 \Rightarrow \text{السرعة } v = \text{ ثابت } \Rightarrow a = 0$$

حيث $\sum F$ محصلة القوى المؤثرة على الجسم.

v سرعة الجسم.

a تسارع الجسم.

قانون نيوتن الثاني (قانون التسارع): إن محصلة القوى المؤثرة على الجسم يتناسب طردياً مع كتلة الجسم ومع تسارعه، واتجاه محصلة القوة هو نفسه اتجاه تسارع الجسم.

وبصورة رياضية نكتب القانون: $\sum F = ma$

وإذا كانت القوى المؤثرة في أكثر من اتجاه، نكتب:

$$\sum F_x = ma_x$$
$$\sum F_y = ma_y$$

مثال:

ما هي القوة اللازمة للحصول على تسارع $6\ ms^{-2}$ لكتلة مقدارها $5\ kg$؟

الحل:

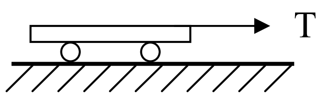
$$\sum F = ma$$

لدينا قوة واحدة فقط

$$\therefore F = ma$$
$$= 5 \times 6$$
$$\therefore F = 30\ N$$

مثال:

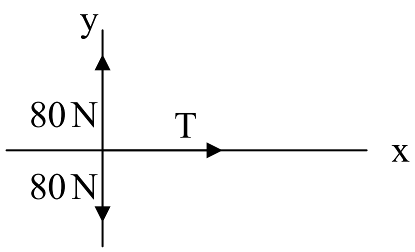
في الشكل المجاور، ما هو الشد المطلوب في الحبل لسحب العربة بتسارع $0.5\ ms^{-2}$ إذا كان وزن العربة هو $80\ N$؟



الحل:

نرسم مخطط القوى المؤثرة على العربة.

ليس هناك حركة بالاتجاه $y \Leftarrow \sum F_y = 0$



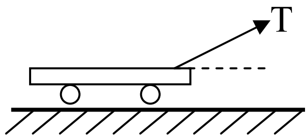
$$\sum F_x = ma$$
$$F_x = T = ma$$
$$\because m = \frac{W}{g}$$
$$\therefore T = \frac{W}{g} \times a = \frac{80}{9.8} \times 0.5 = 4.1\ N$$

مثال:

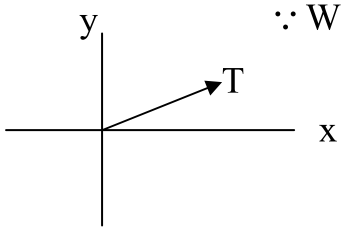
يتم سحب عربة وزنها 39.2 N بقوة مائلة مقدارها 6 N كما هو مبين بالشكل المجاور. ما هو تسارع العربة؟

الحل:

ليس هناك حركة في الاتجاه y $\Leftarrow \sum F_y = 0$



$$\sum F_x = ma$$
$$F_x = T\cos 37 = ma$$
$$\therefore a = \frac{T\cos 37}{m}$$



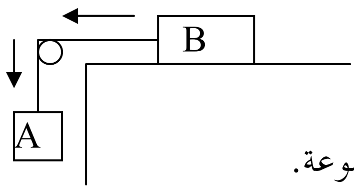
$$\because W = mg \Rightarrow m = \frac{W}{g} = \frac{39.2}{9.8} = 4\ kg$$

بالتعويض عن T و m في المعادلة:

$$\therefore a = \frac{6 \times \cos 37}{4} \cong 1.2\ ms^{-2}$$

مثال:

في الشكل المجاور، الكتلة A=12 kg ، والكتلة B=30 kg موضوعة على طاولة عديمة الاحتكاك. احسب تسارع المجموعة ومقدار الشد في الحبل؟

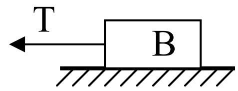


الحل:

نعتبر اتجاه اليسار هو الاتجاه الموجب وهو اتجاه التسارع للمجموعة.

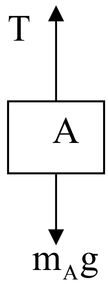
نقوم بتحليل القوى المؤثرة على كل جسم على حدة:

للكتلة B: $\sum F = ma$



$$\therefore T = m_B a \qquad (1)$$

للكتلة A: $\sum F = ma$



$$m_A g - T = m_A a \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$m_A g - T + T = m_A a + m_B a$$

$$m_A g = (m_A + m_B)a$$

$$\therefore a = \frac{m_A g}{m_A + m_B}$$

$$\therefore a = \frac{12 \times 9.8}{12 + 30} = 2.8 \text{ ms}^{-2}$$

بالتعويض عن (a) في (1) نحسب T:

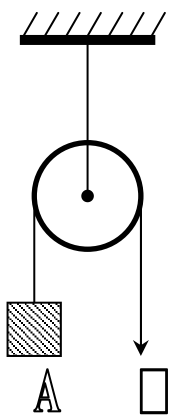
$$T = m_B a = 30 \times 2.8 = 84 \text{ N}$$

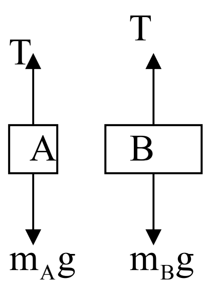
مثال:

احسب التسارع للمجموعة المبينة بالشكل المجاور حيث A و B لهما نفس الكتل في المثال السابق. ثم احسب الشد في الخيط؟

الحل:

الكتلتين لهما نفس التسارع والاتجاه الموجب مبين بالشكل. نحلل القوى المؤثرة على كل كتلة على حدة:





الكتلة A: $\sum F = ma$

$$T - m_A g = m_A a \qquad (1)$$

الكتلة B: $\sum F = ma$

$$m_B g - T = m_B a \qquad (2)$$

بجمع المعادلتين (1) و (2) نحصل على:

$$T - m_A g + m_B g - T = m_A a + m_B a$$

$$(m_B - m_A)g = (m_A + m_B)a$$

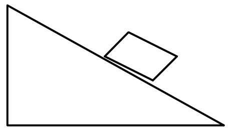
$$\therefore a=\frac{(m_B-m_A)g}{(m_A+m_B)}=\frac{(30-12)\times 9.8}{(12+30)}=4.2\ ms^{-2}$$

بالتعويض عن (a) في (1) :

$$\therefore T=m_A a+m_A g=m_A(a+g)=12(4.2+9.8)=168\ N$$

مثال: إحسب تسارع الجسم المنزلق الى أسفل السطح المائل في الشكل المجاور ذو الكتلة m.

الحل : $\sum F = ma$

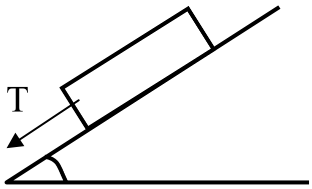


$mg\sin\Theta = ma$

$a = g\sin\Theta$

مثال:

صندوق كتلته 1000 kg يُسحب إلى أسفل سطح مائل بزاوية 10° بواسطة حبل قوة الشد فيه 2000 N. احسب أقصى تسارع للصندوق؟



الحل:

نحلل القوى المؤثرة على الصندوق:

ليس هناك حركة بالاتجاه العمودي على السطح المائل $\Leftarrow \sum F_y = 0$

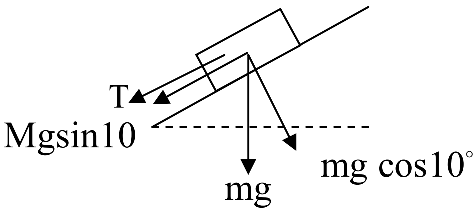
بالنسبة للاتجاه الموازي للسطح المائل (x):

$$\sum F = ma$$

$$T+mg\sin\theta=ma$$

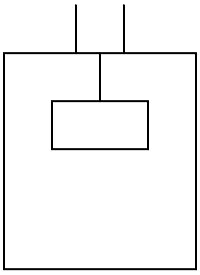
$$\therefore a=\frac{T}{m}+g\sin\theta$$

$$a=\frac{2000}{1000}+9.8\times\sin 10\cong 3.7\ ms^{-2}$$



مثال:

عُلّق جسم كتلته 30 kg بواسطة حبل متدل من سقف مصعد كما في الشكل المجاور. ما هو الشد في الحبل إذا كان المصعد متسارعاً بمعدل:



١- $4ms^{-2}$ إلى أعلى. ٢- $4ms^{-2}$ إلى أسفل.

الحل: نحلل القوى المؤثرة على الجسم، ونكتب العلاقة: $\sum F = ma$

$T - mg = ma$ (١)

$$
\begin{aligned}
T &= m(g+a) \\
&= 30(9.8+4) \\
&= 402\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

T

↑

•

↓

mg

$$mg - T = ma \qquad (٢)$$

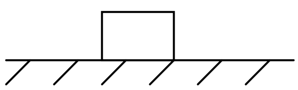
$$
\begin{aligned}
T &= m(g-a) \\
&= 30(9.8-4) \\
&= 174\ \mathrm{N}
\end{aligned}
$$

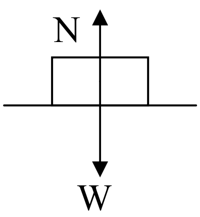
قانون نيوتن الثالث (قانون الفعل ورد الفعل):

إذا أثر جسم بقوة ما على جسم ثاني، فإن الجسم الثاني يؤثر على الأول بقوة مساوية لها في المقدار ومضادة في الاتجاه. وتسمى إحدى القوتين بقوة الفعل وتسمى الأخرى بقوة رد الفعل.

مثال:

الكتلة المبينة بالشكل المجاور موضوعة على سطح طاولة. حدد قوة الفعل وقوة رد الفعل إذا كان وزن الكتلة W.





الحل:

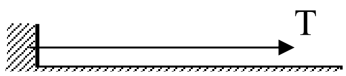
نحلل القوى المؤثرة على الجسمين وهما الكتلة والطاولة.

تؤثر الكتلة على الطاولة بقوة تمثل وزن الكتلة W واتجاهها إلى أسفل، وهذه قوة الفعل.

تؤثر الطاولة على الكتلة بقوة N مساوية لوزن الكتلة واتجاهها إلى أعلى. تسمى N بالقوة العمودية أو هي تمثل قوة رد الفعل.

مثال:

حبل مثبت من جهة اليسار يتم سحبه من جهة اليمين بواسطة اليد. حدد قوى الفعل ورد الفعل بين اليد والحبل.



الحل:

إذا اعتبرنا قوة سحب اليد للحبل نحو اليمين ومقدارها T (قوة الفعل)، فإن الحبل يــؤثر بقوة مقدارها T على اليد أيضاً ولكن نحو اليسار (قوة رد الفعل).

قوى الاحتكاك بين السطوح :

هي القوى الناشئة بين سطحين متلاصقين والتي تعمل على إعاقة الحركة بينها، واتجاههــا دائماً عكس اتجاه الحركة. وسوف نركز على الاحتكاك الحاصل أثناء الحركة فقط.

إن قوة الاحتكاك F_f تزداد بزيادة القوة العمودية التي يؤثر بها أحد السطحين على الآخر، أي أن:

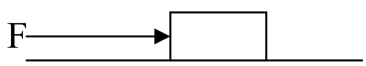
$$F_f \alpha N$$

$$F_f = \mu N$$

حيث μ معامل الاحتكاك بين السطحين المتصلين، ولكل سطحين متلاصقين قيمة خاصة لــ μ أي أن معامل الاحتكاك يعتمد على طبيعة السطوح المتلاصقة.

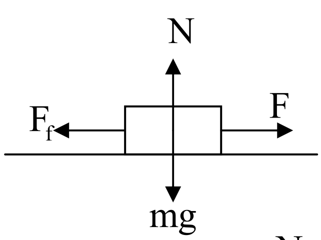
مثال:

يتم دفع صندوق خشبي كتلته 100 kg على سطح بقوة مقدارها 350 N. احسب تسارع الصندوق إذا كان معامل الاحتكاك 0.3.



الحل:

نحلل القوى المؤثرة على الصندوق:



$$\sum F_y = m a_y = 0$$

$$N - mg = 0$$

$$\therefore N = mg = 100 \times 9.8 = 980 \text{ N}$$

$$\sum F_x = m a_x$$

$$F - F_f = m a_x$$

$$a_x = \frac{F - F_f}{m}$$

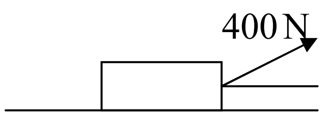
$$F_f = \mu N = 0.3 \times 980 = 294 \text{ N}$$

نعوض عن F_f في المعادلة:

$$a_x = \frac{F - F_f}{m} = \frac{350 - 294}{100} = 0.56 \text{ ms}^{-2}$$

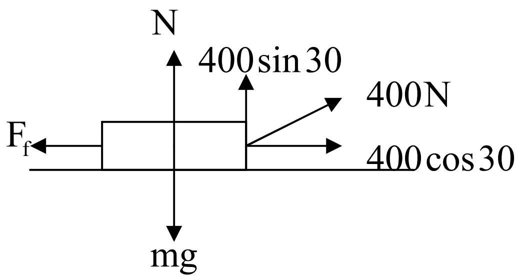
مثال:

يتم سحب صندوق كتلته 70 kg بواسطة قوة مقدارها 400 N كما في الشكل المجـــاور. إذا كان معامل الاحتكاك 0.5، فاحسب تسارع الصندوق؟



الحل:

نحلل القوى المؤثرة على الصندوق :



$$\sum F_y = m a_y = 0$$

$$N + 400 \sin 30 - mg = 0$$

$$N = mg - 400 \sin 30$$

$$N = 70 \times 9.8 - 400 \times 0.5$$

$$= 686 - 200$$

$$N = 786 \text{ N}$$

$$F_f = \mu N$$

$$= 0.5 \times 486 = 243 \text{ N}$$

$$\sum F_x = m a_x$$

$$400 \cos 30 - F_f = m a_x$$

$$a_x = \frac{400 \cos 30 - F_f}{m}$$

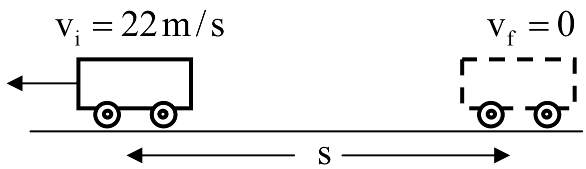
$$a_x = \frac{400 \times 0.866 - 243}{70}$$

$$\therefore a_x = 1.47 \ \ ms^{-2}$$

مثال:

تسير سيارة بسرعة 22 m/s على طريق بمعامل احتكاك 0.7. ما هي المسافة التي تتحركها السيارة قبل أن تتوقف عندما يتم استخدام فرامل السيارة بالكامل لإجبارها على التوقف؟

الحل:



$$F_f = \mu N = \mu mg$$

$$\sum F = ma$$

$$F_f = ma$$

$$-\mu mg = ma$$

$$\therefore a = -\mu g = -0.7 \times 9.8 = -6.9 \ ms^{-2}$$

السرعة النهائية = صفر ، أي أن : $v_f = 0$

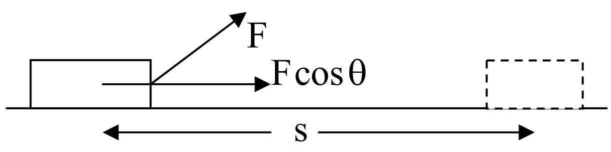
$$\therefore v_f^2 = v_i^2 + 2as = 0$$

$$s = \frac{-v_0^2}{2a} = \frac{-(22)^2}{2 \times -6.9} = 35 \ m$$

الشغل: (W)

يُعرف الشغل المنجز بواسطة قوة ثابتة بأنه حاصل ضرب مركبة القوة في اتجاه الإزاحة ومقدار تلك الإزاحة. والشغل كميه قياسية ووحدته الجول (J):

$$1 \ J = N.m$$



فعندما تؤثر قوة مقدارها F على الجسم المبين بالشكل وتزيحه إزاحة مقـــدارها s، فـــإن مركبة القوة باتجاه الإزاحة هي: $F\cos\theta$ لذا يكون مقدار الشغل هو:

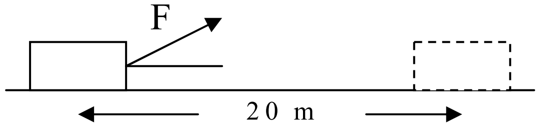
$$W = (F\cos\theta)\times s$$

وإذا كانت F بموازاة s، فإن $\theta = 0 \Leftarrow \cos\theta = 1$ ، وتصبح $W = Fs$.

مثال:

يتم سحب الجسم المبين بالشكل بواسطة قوة F مقدارها 150 N، مما يؤدي إلى تحريكـــه إزاحة 20 m. احسب الشغل المنجز على الجسم خلال هذه الإزاحة.

الحل:



$$W = Fs\cos\theta$$

$$= 150\times 20\times 0.866$$

$$\therefore W = 2.6\times 10^{3}\ \ J$$

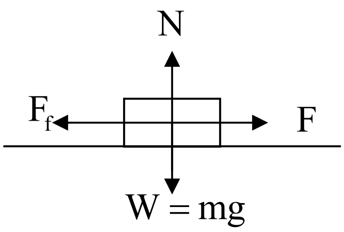
مثال:

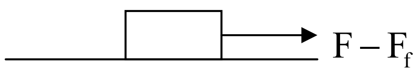
صندوق وزنه 500 N يُدفع على أرضية أفقية بقوة مقدارها 250 N. إذا كـــان معامـــل الاحتكاك الحركي هو 0.4، فاحسب الشغل المنجز على الصندوق لدفعه مسافة 20 m.

الحل:

$$W = Fs\cos\theta$$

نحدد محصلة القوة F في المعادلة، والمؤثرة على الصندوق باتجاه الإزاحة، وهي بالرجوع إلى الشكل أدناه:





$$F - F_f$$

$$F_f = \mu N = \mu W$$

$$F_f = 0.4 \times 500 = 200\,N$$

بالتعويض في المعادلة، وملاحظة أن: $\theta = 0 \Leftarrow \cos\theta = 1$، يصبح مقدار الشغل:

$$\begin{aligned} W &= (F - F_f) \times s \times 1 \\ &= (250 - 200) \times 20 \times 1 \\ &= 50 \times 20 \times 1 \\ &= 1000\,J \\ &= 1KJ \end{aligned}$$

(حيث: 1 KJ=1000 J)

القدرة (P):

هي المعدل الزمني لانجاز الشغل بواسطة قوة ما، أو هي الشغل المنجز بواسطة قـــوة مــــا خلال وحدة الزمن، والقدرة كميه قياسية.

$$\text{(متوسط) القدرة} = \frac{\text{الشغل المنجز}}{\text{الزمن}}$$

$$\overline{P} = \frac{W}{t}$$

وتقاس القدرة بوحدة الوات (w)، حيث أن: $1w = \frac{1J}{s}$ وإذا كانت القوة المنجزة للشغل هي: $F\cos\theta$ ،فإن الشغل يساوي: $W = Fs\cos\theta$، وبالتالي يكون متوسط القدرة هو:

$$\overline{P} = \frac{Fs\cos\theta}{t}$$

$$\overline{P} = F\overline{v}\cos\theta$$

حيث تمثل $\overline{v}$ متوسط السرعة، و θ تمثل الزاوية بين اتجاه لسرعة (الحركة) واتجاه القوة المؤثرة.

مثال:

يرقى رجل كتلته 70 kg سلماً ارتفاعه 3m خلال 2 s .

أ – ما هو الشغل الذي يبذله الرجل ضد قوة الجاذبية؟

ب – ما هو متوسط قدرة الرجل؟

الحل:

(أ)

بما أن قوة الجاذبية على الرجل هي وزنه W، وتساوي: $W = mg$، لذا يحتاج الرجل إلى بذل قوة ثابتة مقدارها F ضد الجاذبية خلال صعوده إلى أعلى، أي أن: $F=W=mg$ وهذه القوة التي يحتاج لبذلها هي بنفس اتجاه الإزاحة إلى أعلى، أي أن $\theta = 0$، وبالتالي يكون الشغل المطلوب هو:

$$\begin{aligned} W &= Fs\cos 0 \\ &= mgs \\ &= 70 \times 9.8 \times 3 \\ &= 2060 \text{ J} \end{aligned}$$

(ب)

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{W}{t} \\ &= \frac{2060}{2} = 1030 \text{ W} \end{aligned}$$

مثال:

يتم رفع جسم كتلته 250 kg بواسطة رافعة وبسرعة ثابتة $0.1\ ms^{-1}$. ما هي القدرة المستنفذة بواسطة الرافعة؟

الحل:

$$\begin{aligned} P &= Fv\cos\theta \\ &= mgv\cos\theta \\ &= 250 \times 9.8 \times 0.1 \times 1 \\ &= 245\text{ W} \end{aligned}$$

مثال:

يُسحب صندوق كتلته 200 kg على سطح أفقي بمعامل الاحتكاك 0.4 بواسطة محرك.

أ – ما هي قدرة المحرك اللازمة كي يتحرك الصندوق بسرعة ثابتة 5 m/s؟

ب– ما هو الشغل المنجز بواسطة المحرك خلال 3 min ؟

الحل:

(أ)

$$\overline{P} = F\,\overline{v}$$

والقوة اللازمة لتحريك الصندوق بسرعة ثابتة $\overline{v}$ يجب أن تساوي قوة الاحتكاك F_f، أي أن:

$$F = F_f = \mu\, mg = 0.4 \times 200 \times 9.8 = 784\ N$$

بالتعويض عن F في المعادلة $\overline{P} = F\,\overline{v}$:

$$\overline{P} = F\,\overline{v} = 784 \times 5 = 3920\,W$$

(ب)

$$W = \overline{P}.t = 3920 \times 3 \times 60 = 705600\,J = 705.6\,kJ$$

الطاقة الحركية (K):

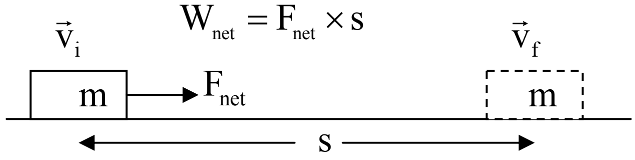
تعبِّر الطاقة الحركية لجسم ما عن طاقته الناتجة بسبب حركته. فإذا كان لدينا جسم كتلته m يتحرك في لحظة معينه بسرعة v على خط مستقيم ، فإن طاقته الحركية K في تلك اللحظة هي:

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

لنعتبر الآن الجسم ذو الكتلة m والسرعة الابتدائية v_i (كما في الشكل المجاور) فتكون طاقته الحركية الابتدائية K_i هي: $K_i = \frac{1}{2} m v_i^2$، إذا أردنا تسريع هذا الجسم لتصبح سرعته النهائية v_t (وبالتالي طاقته الحركية: $K_f = \frac{1}{2} m v_f^2$)، فإنه يجب التأثير عليه بقوة

net

$$W_{net} = F_{net} \times s$$



وهذا الشغل المنجز لابد أن يساوي مقدار التغير في الطاقة الحركية خلال تلك المسافة، أي أن:

$$W_{net} = K_f - K_i$$
$$F_{net}\, s = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$

مثال:

كم هو الشغل اللازم لتسريع سيارة كتلتها 1000kg من 20 m/s إلى 30 m/s ؟

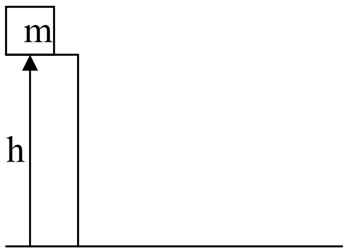
الحل:

$$W = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2$$
$$= \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2)$$
$$= \frac{1}{2} \times 1000 \times \left((30)^2 - (20)^2\right)$$
$$= 500 \times (900 - 400)$$
$$= 500 \times 500$$
$$= 250000\ \text{J} = 250\ \text{kJ}$$

الطاقة الكامنة (طاقة الوضع) u:

هي الطاقة المختزنة في نظام ما (جسم ما) بسبب الشغل المنجز عليه مما يؤدي إلى تغير موضعه (كما في حالة الشغل المنجز لرفع جسم ضد قوة الجاذبية) أو تغير شكله وأبعاده

إذا كان لدينا جسم كتلته m وموضوع على ارتفاع h عن الأرض، فإنه يمتلك طاقة وضع u بالنسبة للأرض تعطى بالعلاقة:



$$u = mgh$$

الطاقة الميكانيكية الكلية (E):

وتمثل مجموع الطاقة الحركية وطاقة الوضع للجسم، أي أن:

$$E = K + u$$

مبدأ حفظ الطاقة:

ينص هذا المبدأ على أن الطاقة الكلية لأي نظام معزول تبقى دائماً ثابتة، أي أن:

$$E = K + u = \text{constant}$$

وبصورة أوضح:

$$E_i = E_f = \text{constant}$$

$$K_i + u_i = K_f + u_f = \text{constant}$$

حيث: K_i و K_f الطاقة الحركية الابتدائية والنهائية على الترتيب.

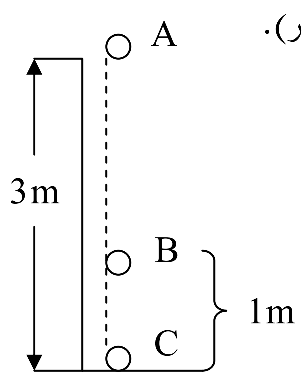
u_i و u_f : طاقة الوضع الابتدائية والنهائية على الترتيب .

مثال:

تسقط كرة سقوطاً حراً من ارتفاع 3m (كما في الشكل المجاور).

احسب سرعة الكرة : أ- على ارتفاع 1m من الأرض.

ب- عندما تصطدم بالأرض.



الحل:

(أ) الطاقة الكلية ثابتة، أي أن:

$$E_A = E_B = E_C$$

$$K_A + u_A = K_B + u_B$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_2$$

بما أن: $v_A = 0$ ، وباختصار m من الطرفين نحصل على:

$$\frac{1}{2}v_B^2 = g(h_1 - h_2)$$

$$\therefore v_B = \sqrt{2g(h_1 - h_2)}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.8 \times (3-1)} = \sqrt{39.2}$$

$$\therefore v_B = 6.3 \ \ m/s$$

(ب)

$$E_A = E_C$$

$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A = \frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_B$$

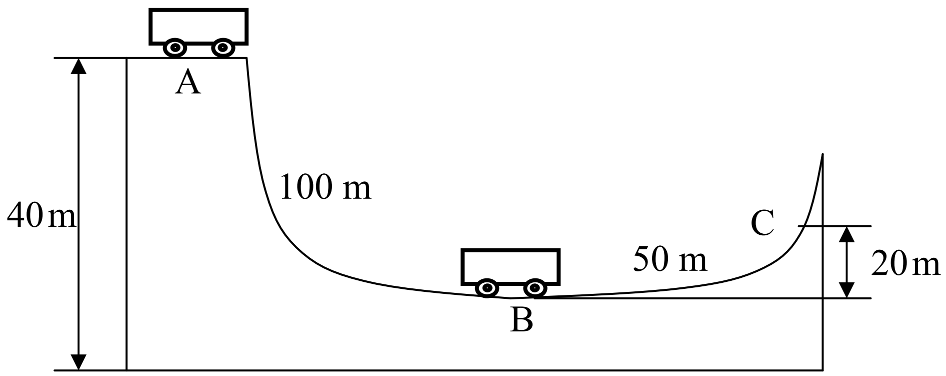
$$\therefore v_C = \sqrt{2g(h_2 - h_1)}$$

$$= \sqrt{2 \times 9.8 \times (3-0)} = 7.7 \ \ m/s$$

قانون حفظ الطاقة بوجود الاحتكاك: في حالة وجود الاحتكاك، فإن الفقدان في الطاقة الميكانيكية = $E_i \neq E_f = W_f$ حيث W_f الشغل الناتج عن الاحتكاك.

مثال:

بالنظر إلى المسار المبين في الشكل المجاور، تتحرك العربة من السكون عند النقطة A، احسب سرعة العربة عند أسفل المرتفع (النقطة B) على اعتبار أن السطح أملس (عديم الاحتكاك).



الحل:

$$E_A = E_B$$
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_2$$
$$mgh_1 = \frac{1}{2}mv_B^2$$
$$v_B^2 = 2gh_1$$
$$v_B\sqrt{2gh} = \sqrt{2\times 9.8\times 40} = 28 \text{ m/s}$$

مثال:

إذا اعتبرنا السطح الذي تسير عليه العربة في المثال السابق له قوة احتكاك ثابتة مقـــدارها 6N، وكانت كتلة العربة 30 kg، فما هي سرعة العربة عند أسفل المرتفع (النقطة B) ؟ وما هي سرعتها عند النقطة C ؟

الحل:

$$E_A - E_B = W_f$$
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A - (\frac{1}{2}mv_B^2 + mgh_B) = 6\times 100$$
$$mgh_A - \frac{1}{2}mv_B^2 = 600$$
$$v_B^2 = 2\left(\frac{mgh_A - 600}{m}\right) = 2\times\left(\frac{30\times 9.8\times 40 - 600}{30}\right)$$
$$v_B = \sqrt{744} = 27.3 \text{ m/s}$$
$$E_A - E_C = W_f$$
$$\frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_A - (\frac{1}{2}mv_C^2 + mgh_C) = 6\times 50$$
$$mg(h_A - h_C) = 300 + \frac{1}{2}mv_C^2$$
$$5580 = 15v_C^2 \Rightarrow v_C = 19.3 \text{ m/s}$$

٢- خواص المادة:

الكثافة (d): تعرف الكثافة للمادة بأنها حاصل قسمة كتلتها على حجمها، أي أن:

$$d = \frac{m}{V}$$

حيث m: كتلة المادة،

V: حجم المادة

وحدة الكثافة هي: $\frac{kg}{m^3}$ في النظام العالمي للوحدات.

مثال:

كثافة الألمنيوم هي $2.7\frac{gm}{cm^3}$، فما هي كثافته في النظام العالمي للوحدات؟

الحل:

$$d_{(Al)} = 2.7\frac{g}{cm^3} = 2.7\frac{g}{cm^3} \times \frac{10^{-3}\ \frac{kg}{g}}{10^{-6}\ \frac{m^3}{cm^3}}$$

$$= 2700\ \frac{kg}{m^3}$$

مثال:

كم هي كتلة ووزن الهواء في غرفة مربعه ضلعها 4 m وارتفاعها 3 m إذا علمت أن كثافة الهواء هي $1.28\frac{kg}{m^3}$ عند مستوى سطح البحر؟

الحل:

حجم الغرفة $V = 4 \times 4 \times 3$

$$= 48\,m^3$$

كتلة الهواء في الغرفة $m = dV = 1.28 \times 48 = 61.44\ kg$

وزن الهواء في الغرفة $w = mg = 61.44 \times 9.8 = 602\ N$

الإجهاد:

هو القوة المطبقة على وحدة المساحات من السطح الذي تطبق عليه القوة.

$$\text{الإجهاد} = \frac{\text{القوة}}{\text{المساحة}} = \frac{F}{A}$$

ووحدة الإجهاد هي باسكال (Pa) حيث أن: $1Pa = \frac{1N}{m^2}$

الانفعال الطولي:

هو التغير النسبي الحاصل في طول قضيب ما بسبب تأثير الإجهاد.

$$\text{الانفعال} = \frac{\Delta L}{L}$$

والانفعال ليس له وحدة.

حيث ΔL هو التغير الحاصل في الطول ، L هو الطول الأصلي .

معامل المرونة:

يعرف معامل المرونة بالنسبة بين الإجهاد (الانضغاط أو الشد أو القــص) إلى الانفعـــال بالعلاقة:

$$\text{معامل المرونة} = \frac{\text{الاجهاد}}{\text{الانفعال}}$$

$$\text{معامل المرونة} = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

ووحدته هي باسكال (Pa).

وإذا كان الإجهاد ناتج عن قوة شد أو انضغاط، فإن معامل المرونة يسمى بمعامل يـــونج Y ، أي أن:

$$\text{معامل يونج} = \frac{\text{الاجهاد الطولي}}{\text{الانفعال الطولي}}$$

$$Y = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L}}$$

ومعامل يونج يعتمد على نوع مادة الجسم ولا يعتمد على شكله أو حجمه.

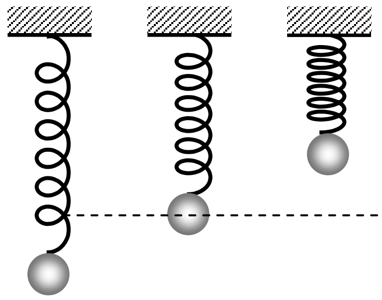
قانون هوك:

يوضح هذا القانون العلاقة بين القوة الخارجية المطبقة على جسم مرن F والاستطالة الحاصلة في ذلك الجسم x كالتالي:

$$F = k\,x \qquad \text{قانون هوك}$$

حيث k هو ثابت التناسب (أو ثابت القوة أو ثابت النابض).

لنفرض أن الجسم المرن عبارة عن نابض حلزوني معلق كما في الشكل (أ). ثم نقوم بتطبيق قوة خارجية عليه عن طريق تثبيت أثقال مختلفة في طرفه الطليق كما في الشكل (ب)، ثم الشكل (جـ).وإن زيادة الأثقال تؤدي إلى زيادة الاستطالة في النابض بصورة خطية طالما أن النابض لازال مرناً (أي يرجع إلى وضعه الأصلي بعد إزالة الثقل).



ويمكن تعميم العلاقة السابقة لقانون هوك تشمل أي جسم مرن، وليس بالضرورة أن يكون نابضاً حلزونياً. كما يمكن كتابة صياغة أخرى لقانون هوك كالتالي:

$$S = e\,Y \qquad \text{صياغة أخرى لقانون هوك}$$

حيث S الإجهاد

e الانفعال

Y معامل يونج

مثال:

علق ثقل قدره 45 N بنابض، وعند قياس طول النابض وُجد أنه 32 cm . وبعد تغيير الثقل بثقل آخر وزنه 55 N ، فاستطال النابض بمقدار 13 cm .

احسب:

(أ) ثابت النابض.

(ب) الطول الأصلي للنابض.

الحل:

(أ) من قانون هوك: $F = k\,x$

وبتطبيق القانون على الثقل الثاني:

$$k = \frac{F_2}{x_2}$$

$$k = \frac{55}{0.13} = 423 \quad N/m^2$$

(ب) نطبق القانون بالنسبة للثقل الأول:

$$F_1 = k\,x_1$$

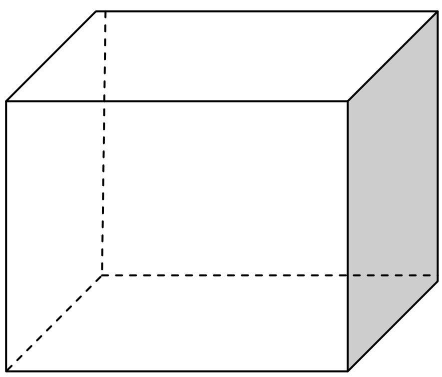
$$\therefore x_1 = \frac{F_1}{k} = \frac{45}{423} = 0.106\,m = 10.6\,cm$$

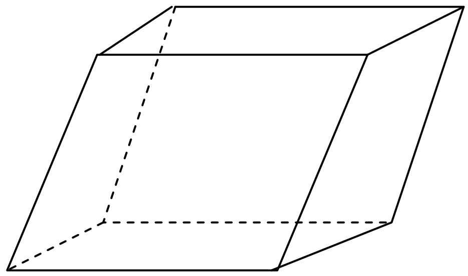
فيكون طول النابض الأصلي:

$$L_0 = 32 - 10.6 = 21.4 \text{ cm}$$

إجهاد القص: Shear Stress (S_s)

لنفرض الشكل ABCD الذي مساحته A ويتعرض لقوة قص F ضمن المرونة كما في الشكل المبين.





تؤدي قوة القص F إلى تغير شكله ليصبح A'B'C'D'، وبالتالي نعرف إجهـــاد القـــص (S_s):

$$S_s = \frac{F}{A}$$

ونعرف انفعال القص e_s :

$$e_s = \frac{x}{h}$$

ومن الشكل نجد أن:

$$\tan\phi = \frac{x}{h}$$

وعندما تكون: $h >> x$، فإنه يمكن أن نكتب:

$$\tan\phi \cong \phi = \frac{x}{h} = e_s$$

حيث ϕ هي زاوية القص وتقاس بوحدة الراديان (Radian).

كما يمكن تعريف معامل القص G (أو معامل الصلابة) كالتالي:

$$G = \frac{\text{اجهاد القص}}{\text{انفعال القص}}$$

$$G = \frac{F/A}{x/h} = \frac{F}{A\phi}$$

معامل الحجم (B):

عندما تؤثر قوة انضغاطية على جميع السطح لجسم ما، فإن حجمه يقل. وإذا كانت القوة المطبقة لوحدة المساحة F/A هي منتظمة، فإن الإجهاد في هذه الحالة هو الضغط المطبق P، وبالتالي نعرف معامل الحجم:

$$\text{معامل الحجم} = \frac{\text{الاجهاد الحجمي}}{\text{الانفعال الحجمي}}$$

$$B = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta V}{V_0}} = \frac{P}{\frac{\Delta V}{V_0}} = \frac{PV_0}{\Delta V}$$

أي أن معامل الحجم يعتبر مقياساً لدرجة الصعوبة التي تنضغط بها المادة. ووحدة معامل الحجم هي باسكال (Pa).

مثال:

سلك طوله 2.5 m بمساحة مقطع $6\ mm^2$ تعلّق نهايته بكتلة 45 kg فتحصل فيه استطالة مقدارها 1.27 mm.

احسب:

١- الإجهاد على السلك.

٢- الانفعال.

٣- معامل يونج لمادة السلك.

الحل:

١-
$$\text{الإجهاد} = \frac{F}{A} = \frac{mg}{A}$$
$$= \frac{45 \times 9.8}{6 \times 10^{-6}} = 7.35 \times 10^{7}\ \text{Pa}$$

٢-
$$\text{الانفعال} = \frac{\Delta L}{L_0} = \frac{1.27 \times 10^{-3}}{2.5} = 5.08 \times 10^{-4}$$

٣- $$Y = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L_0}} = \frac{7.35\times10^{7}}{5.08\times10^{-4}} = 1.44\times10^{11}\ \text{Pa}$$

مثال:

سلك ألمنيوم قطره 3mm وطوله 4m يستخدم لإسناد كتله مقدارها 50 kg. مـا هـي الاستطالة في السلك؟ (معامل يونج للألمنيوم يساوي: 7×10^{10} Pa).

الحل:

$$A = \pi r^2$$

$$A = 3.14\times(\frac{3}{2}\times10^{-3})^2 = 7.07\times10^{-6}\ \text{m}^2$$

$$F = mg = 50\times9.8 = 490\ \text{N}$$

$$\because Y = \frac{\frac{F}{A}}{\frac{\Delta L}{L_0}}$$

$$\Delta L = \frac{L_0}{Y}\times\frac{F}{A}$$

$$= \frac{4\times490}{7\times10^{10}\times7.07\times10^{-6}} = 3.96\times10^{-3}\text{m}$$

$$= 3.96\ \text{mm}$$

مثال:

يسلط ضغط مقداره 2×10^{6} Pa على عينة من الزئبق فيتقلص بمقدار 0.008%. احسب المعامل الحجمي للزئبق.

الحل:

$$B = \frac{P}{\frac{\Delta V}{V_0}}$$

$$= \frac{2\times10^{6}}{0.008/100}$$

$$= 2.5\times10^{10}\ \text{Pa}$$

الضغط (P):

هو القوة العمودية المؤثرة على وحدة المساحات من السطح، ويعطى بالعلاقة:

$$P = \frac{F}{A}$$

حيث F القوة العمودية، A مساحة السطح.

ويقاس الضغط بوحدة باسكال (Pa)، حيث: $1Pa = 1N/m^2$.

مثال:

أ- يقف شخص وزنه 500 N على جليد لبركة متجمدة بحيث أن قدميه ملاصقة لمساحة $0.05\ m^2$ من الجليد، فما هو الضغط المسلط على الجليد؟

ب- إذا علمت أن الجليد سوف ينهار عند ضغط مقداره 16000 Pa، فكم هو وزن الشخص اللازم لحصول انهيار الجليد باعتبار نفس مساحة الاتصال السابقة ؟

الحل:

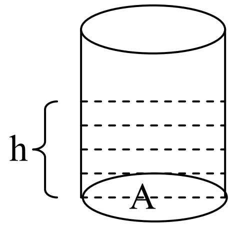
أ- $$P = \frac{F}{A} = \frac{500}{0.05} = 10000\,Pa = 10\,k\,Pa$$

ب- $$F = PA = 16000 \times 0.05 = 800\,N$$

الموائع الساكنة

زيادة الضغط مع العمق:

لحساب الضغط المسلط من عمود السائل الذي طوله h على المساحة السفلية A في الشكل المجاور، نطبق العلاقة:



$$P = \frac{F}{A}$$

حيث F القوة العمودية على المساحة A، وهي تساوي وزن عمود السائل، أي أن:

$$F = mg$$
$$= Vdg$$
$$F = hAdg$$

حيث V: حجم عمود السائل، d: كثافة السائل.

$$\therefore P = \frac{hAdg}{A}$$
$$P = hdg$$

والعلاقة تبين زيادة الضغط مع زيادة العمق ومع زيادة كثافة السائل.

وإذا أردنا حساب الضغط الكلي P_t المؤثر على المساحة السفلية A فإننا نضيف الـــضغط الجوي P_0 (لأن الإناء مفتوح) إلى ضغط عمود السائل، أي أن:

$$P_t = P_0 + P$$
$$P_t = P_0 + hdg$$

ومن المعروف أن الضغط الجوي في الظروف القياسية يـــساوي: $P_0 \cong 1.013\times10^5$ Pa وهذه تمثل ضغط عمود من الزئبق ارتفاعه 76 cm كما هو موضح في المثال التالي:

مثال:

جد ضغط عمود من الزئبق ارتفاعه 76 cm علماً أن كثافة الزئبق $13.6\ g/cm^3$.

الحل:

$$P = hdg$$
$$= 0.76\,m \times 13600\frac{kg}{m^3} \times 9.8\frac{m}{s^2}$$
$$\cong 1.01\times10^5\,Pa = 1atm$$

مثال:

ما هو الضغط الكلي في أسفل بركة سباحة عمقها 2 m ومملوءة تماماً بالماء.

الحل:

$$P_t = P_a + hdg$$
$$= 1.013\times10^5 + 2\times1000\times9.8$$
$$= 1.013\times10^5 + 19600$$
$$= 1209600 \text{ Pa}$$

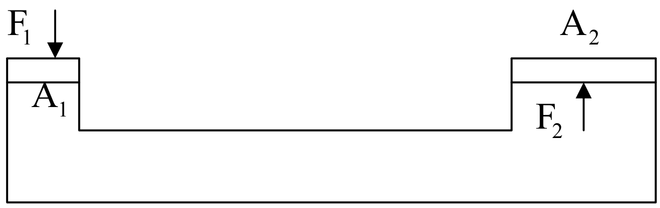
قاعدة باسكال:

بالنظر إلى أن الضغط متساوي عند جميع النقاط ذات العمق المتساوي في السائل، فإن أي زيادة في الضغط على السطح يجب أن تنتقل إلى أي نقطة في السائل بصورة متساوية وهو ما يسمى بقانون باسكال الذي ينص على الآتي:

"الضغط الخارجي المطبق على سائل ضمن وعاء مغلق ينتقل دون أي نقصان إلى جميع نقاط السائل وإلى جدران الوعاء المغلق".

وكتطبيق على قاعدة باسكال لدينا الرافعة الهيدروليكية المبينة في الشكل المجاور، حيث أن:

$$P_1 = P_2$$
$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$



مثال:

كرسي حلاقة موضوع على مكبس هيدروليكي قطره 10 cm بينما مساحة مكبس الرفع هي 10cm^2. إذا كانت كتلة الكرسي والشخص الجالس هي 160 kg، فما هي القوة اللازم تطبيقها لرفع المكبس؟

الحل:

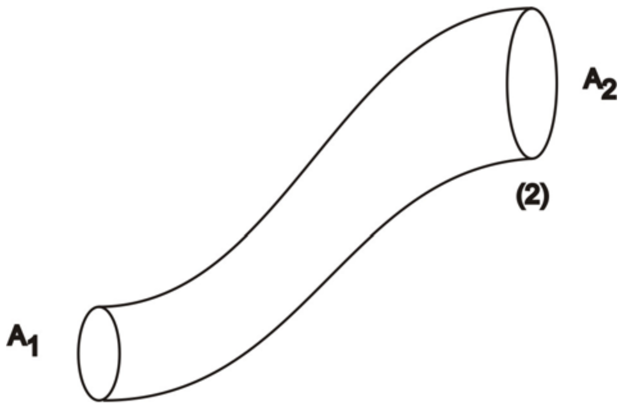
$$A_1 = 10\text{cm}^2 = 0.001\text{ m}^2 \quad ; \quad F_1 = ?$$
$$r_2 = 5\text{cm} = 0.05\text{m} \Rightarrow A_2 = \pi r_2^2 = 3.14\times(0.05)^2 = 7.85\times10^{-3}\text{ m}^2$$

سريان الموائع

معادلة الاستمرار للجريان الانسيابي:

يُدعى المسار لأجزاء السائل الواقعة تحت تأثير الجريان الثابت بالخط الانسيابي والخطـــوط الانسيابية الممثلة للجريان الانسيابي لا تتقاطع كما هو مبين بالشكل المجاور. والنوع الآخر من الجريان هو المضطرب والذي تكون فيه خطوط التدفق (الجريان) متبرمـــة (دوارة) ويمكن أن تعاكس الاتجاه الأصلي للجريان، وهذا النوع من الجريان يحصل عند السرعات العالية أو بسبب وجود عائق أو حافة حادة خلال مسار السائل.

لنعتبر الأنبوب المبين في الشكل المجاور والذي يمر فيه سائل بجريان انسيابي بالاتجاه المـــبين. بما أن معدل الكتلة المارة خلال أي مقطع من الأنبوب هو كمية محفوظة، لذا فإن معـــدل الكتلة المار خلال المقطع (١) ، يكون مساوياً لمعدل الكتلة المار خلال المقطع (٢).



أي أن :

$$\text{معدل الجريان الكتلي} = d_1A_1v_1 = d_2A_2v_2 = \text{constant}$$

حيث: d_1 ، d_2 تمثل الكثافة عند المقطع (١) و (٢) على الترتيب .

v_1 ، v_2 تمثل السرعة عند المقطع (١) و (٢) على الترتيب .

A_1 ، A_2 تمثل مساحة المقطع عند المقطع (١) و (٢) على الترتيب .

وبالنسبة للسوائل غير قابلة للانضغاط كالماء مثلاً تكون قيمة الكثافة ثابتة، وبالتالي يكون معدل الجريان الحجمي Q ثابتاً، أي أن:

معادلة الاستمرار للسوائل غير قابلة للانضغاط

$$Q = A_1v_1 = A_2v_2 = \text{constant}$$ معدل التدفق (الجريان) الحجمي

ويقاس معدل التدفق (الجريان) الحجمي Q $(\frac{m^3}{s})$.

مثال:

أنبوب يسير فيه الماء بجريان انسيابي كما هو مبين بالشكل. احسب:

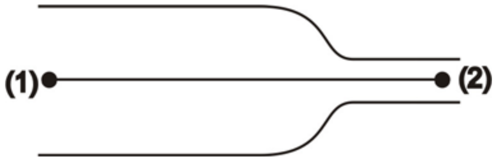
أ- السرعة عند الجزء الضيق من الأنبوب.

ب- ما هو معدل التدفق (الجريان) الحجمي.

جـ- ما هو معدل التدفق (الجريان) الكتلي.

عند النقطة (١) : $r_1= 12.5$ mm نصف القطر ، $v_1= 1.8$ m/s السرعة

عند النقطة (٢) : $r_2 = 9$ mm نصف القطر ، $v_2= ?$ السرعة



الحل:

أ-

$$A_1v_1 = A_2v_2$$

$$v_2 = \frac{v_1A_1}{A_2} = v_1\frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2}$$

$$\therefore v_2 = v_1\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = 1.8\times\left(\frac{12.5}{9}\right)^2$$

$$\therefore v_2 = 3.5\ m/s$$

(ب) $Q = A_1v_1 = A_2v_2$ معدل التدفق الحجمي

$$\therefore Q = 3.14\times(12.5\times10^{-3})^2\times1.8$$
$$= 8.8\times10^{-4}\ m^3/s$$

(جـ)

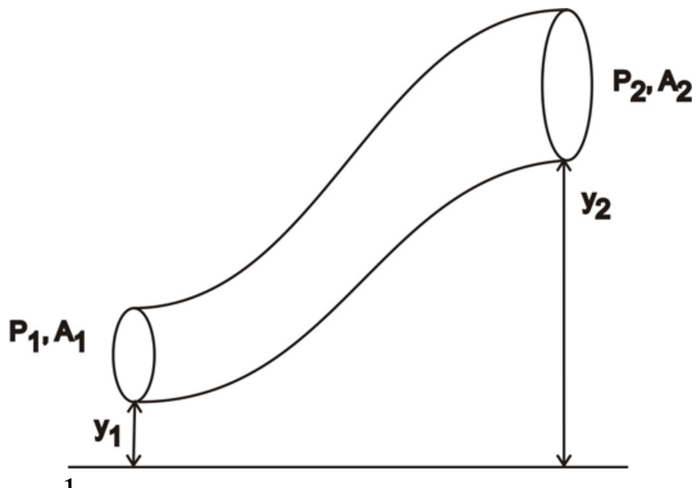
معدل التدفق الكتلي $= d\,v_1A_1 = d\,v_2A_2$

$$= 1\times10^3\times8.8\times10^{-4}$$
$$= 0.88\ kg/s$$

معادلة برنولي:

استطاع برنولي عام ١٧٣٨م إثبات أن الضغط يتناسب عكسياً مع سرعة السائل للجريان الانسيابي. ويمكن اعتبار معادلة برنولي على أنها علاقة لحفظ الطاقة خلال حجم معين ثابت من السائل، والتي يمكن كتابتها بالرجوع إلى الشكل المجاور على الصورة:

$$P_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 + dgy_1 = P_2 + \frac{1}{2}dv_2^2 + dgy_2 = constant$$



وهذا يعني أن: مجموع الضغط والطاقة الحركية لوحدة الحجم $\frac{1}{2}dv^2$ والطاقة الكامنة لوحدة الحجم dgy هو كمية ثابتة عند جميع النقاط على خط الجريان الانسيابي للسائل.

وكحالة خاصة للمعادلة برنولي عندما يكون السائل ساكناً، يكون لدينا: $v_1 = v_2 = 0$

$$P_1 - P_2 = dg(y_2 - y_1)$$

مثال:

للمثال السابق إذا كان الضغط عند الموضع (١) هو (51kPa)، فما هو الضغط عند الموضع (٢)؟

الحل: بما أن $y_1 = y_2$ ، وكذلك $d_1 = d_2 = d$ ، لذا تكون معادلة برنولي:

$$P_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}dv_2^2 = \text{constant}$$

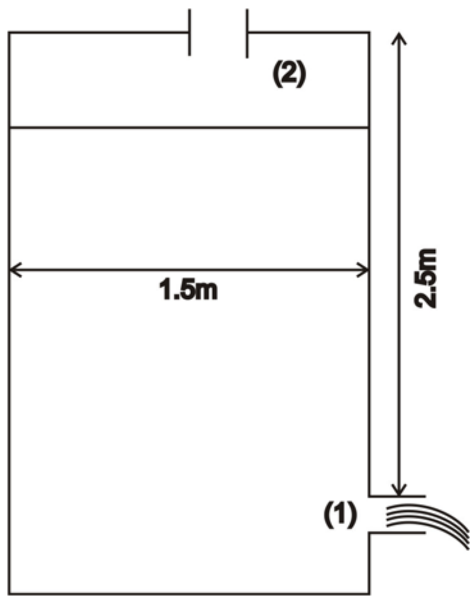
$$P_2 = P_1 + \frac{1}{2}d(v_1^2 - v_2^2)$$

$$= 5.1\times10^3 + \frac{1}{2}\times10^3\left[(1.8)^2 - (3.5)^2\right]$$

$$= 4.7\times10^4 \ \text{Pa}$$

مثال:

خزان ماء قطره الداخلي (1.5m) وفتحة قطرها (15mm) على الجانب ويبتعد مسافة (2.5m) عن ارتفاع الماء في الخزان (انظر الشكل). ما هي سرعة الماء الخارج من الفتحة؟



الحل:

$$P_1 + dgy_1 + \frac{1}{2}dv_1^2 = P_2 + dgy_2 + \frac{1}{2}dv_2^2$$

الضغط على الموضعين (١) و (٢) هو واحد، ويساوي الضغط الجوي. أي أن: $P_1 = P_2$.

وبما أن الكثافة واحدة، لذا تكون معادلة برنولي على الصورة :

$$gy_1 + \frac{1}{2}v_1^2 = gy_2 + \frac{1}{2}v_2^2$$

$$v_2A_2 = v_1A_1$$

$$v_2 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right)v_1$$

$$= \left(\frac{0.015}{1.5}\right)^2 v_1$$

$$\therefore v_2 = 0.0001v_1 \cong 0$$

بالتعويض في المعادلة:

$$v_1^2 = 2g(y_2 - y_1)$$

$$= 2 \times 9.8 \times 2.5$$

$$v_1^2 = 49\ \frac{m^2}{s^2}$$

$$\therefore v_1 = 7\ m/s$$

٣- الحرارة:

الحرارة ودرجة الحرارة والطاقة الحرارية:

تعتبر الحرارة نوعاً من أنواع الطاقة المنتقلة بين النظام (الجسم مثلاً) والوسط المحيط فيه بسبب فرق درجة الحرارة بينهما. وتقاس الحرارة بالنظام العالمي للوحدات بوحدة الجول (J)، وهناك وحدة قديمة لقياس الحرارة وتسمى بالسعر (calorie) ويرمز لها بالرمز (.cal) وهي أكبر من الجول وتساوي:

$$1Cal. = 4.186\ J$$

ويُعبر عن المقدار $4.186 J/cal.$ بالمكافئ الميكانيكي للحرارة.

وتمثل درجة الحرارة مقياساً لمتوسط الطاقة الحركية لجزيئات النظام (الجسم) وتقاس بوحدة الكلفن (^{0}K) في النظام العالمي للوحدات، أو بوحدة سلسيوس (^{0}C) بالنظام المئوي أو بوحدة (^{0}F) بالنظام الفهرنهايتي.

أما الطاقة الحرارية (الطاقة الداخلية) فهي تمثل الطاقة الناتجة عن جميع الجزيئات الموجودة في النظام (الجسم)، وتقاس بوحدة الجول.

المقاييس الحرارية:

ومن أشهرها مقياس الحرارة الزئبقي (انظر الشكل المجاور) ومقياس الحرارة المعتمد على المقاومة الكهربائية.

والتدريجات المستخدمة في مقاييس الحرارة هي على ثلاثة أنواع مشهورة، وهي:

١-التدريج المئوي (^{0}C)

٢-التدريج الفهرنهايتي (^{0}F)

٣-التدريج المطلق (^{0}K)، وهو المستخدم في النظام العالمي للوحدات .

والعلاقات بين التدريجات الثلاثة هي:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32)\ ;\ T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$$

$$T_C = T_K - 273\ ;\ T_K = T_C + 273$$

حيث أن T_C , T_F , T_K تمثل درجات الحرارة في التدريج المئوي والفهرنهايتي والمطلق على الترتيب. وفيما يلي مقارنه بين درجات الحرارة في المقاييس الثلاثة :

مثال:

درجة حرارة غرفة هي ($77\,^0$F)، ما هي الدرجة بالتدريج المئوي؟

الحل:

$$T_C = \frac{5}{9}(T_F - 32) = \frac{5}{9}(77 - 32) = 25\,^0C$$

مثال:

ما هي درجة الحرارة على التدريج الفهرنهايتي في يوم تكون فيه درجة حرارة الطقس $-10\,^0C$؟

الحل :

$$T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$$
$$= \frac{9}{5}\times -10 + 32 = 14^0F$$

مثال:

إذا كانت درجة الحرارة على التدريج المئوي -70^0C، فما هي الدرجة على التدريج المطلق؟

الحل:

$$T_K = T_C + 273$$
$$= -70 + 273 = 203\ ^0K$$

السعة الحرارية النوعية (الحرارة النوعية): (c)

هي الحرارة اللازمة لرفع درجة حرارة وحدة الكتل من المادة درجة مئوية (أو مطلقة) واحدة. ووحدتها: $\frac{cal}{g.^0C}$ أو بالنظام العالمي $\frac{J}{kg.^0K}$

فمثلاً الحرارة النوعية للماء هي: $c_w = \frac{4186J}{kg.^0K} = \frac{1cal.}{g.^0C}$

وهذا معناه أن كتلة من الماء قدرها 1g تحتاج أن تكتسب حرارة قدرها 1 cal. كي ترتفع درجة حرارتها درجة مئوية واحدة. أو أن 1 kg من الماء يحتاج أن يكتسب حرارة قدرها 4186 J كي ترتفع درجة حرارته درجة مطلقة واحدة.

والحرارة النوعية للحديد هي $450\frac{J}{kg.^0K}$ وللرمل $820\frac{J}{kg.^0K}$ وللخشب $1680\frac{J}{kg.^0K}$ وعلى ضوء التعريف أعلاه نستطيع حساب الحرارة اللازمة (ΔQ) لرفع درجة حرارة كتلة من المادة (m) درجة حرارة مقدارها ΔT من العلاقة التالية:

$$\Delta Q = mc\Delta T$$

حيث c الحرارة النوعية للمادة، ΔT تمثل الفرق بين درجة الحرارة الابتدائية والنهائية.

مثال:

ما هي الحرارة اللازمة لتسخين 20 g من الماء من $30\,^0C$ إلى $90\,^0C$ ؟

الحل:

الحرارة النوعية للماء هي $1\dfrac{cal}{g.^0C}$

$$\begin{aligned}\Delta Q &= mc\Delta T\\ &= 20\times 1\times 60\\ &= 1200\,cal. = 1200\,cal.\times 4.186\frac{J}{cal.} = 5032\,J\end{aligned}$$

مثال:

طفل كتلته 30 kg ودرجة حرارته $39\,^0C$. كم هي الحرارة اللازم إزالتها من جسم الطفل لتصبح درجة حرارته $37\,^0C$ علماً أن الحرارة النوعية لجسم الإنسان $3470\dfrac{J}{kg.^0K}$؟

الحل:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= mc\Delta T\\ &= 30\times 3470\times (37-39)\\ &= -2.1\times 10^5\,J\end{aligned}$$

قياس الحرارة النوعية بطريقة الخلط:

عندما يتم خلط مادتين مختلفتين في درجة الحرارة، والتي تدعى بدرجة التوازن T. ويمكن بالتالي أن نكتب العلاقة التالية على اعتبار أن $T_2 > T_1$.

كمية الحرارة المفقودة = كمية الحرارة المكتسبة

$$Q_{in.} = Q_{out}$$

$$m_1c_1(T-T_1)=m_2c_2(T_2-T)$$

حيث T_1, c_1, m_1 الكتلة والحرارة النوعية ودرجة الحرارة للمادة الأولى.

T_2, c_2, m_2 الكتلة والحرارة النوعية ودرجة الحرارة للمادة الثانية.

مثال:

يحتوي إبريق ترمس على $300 \ g$ من الماء عند درجة 90^0C. صُبَّ في هذا الإبريق $50 \ g$ من الماء عند درجة حرارة 15^0C. ما هي درجة الحرارة النهائية للخليط؟

الحل:

كمية الحرارة المفقودة = كمية الحرارة المكتسبة

$$m_1c(T-15)=m_2c(90-T)$$

$$50(T-15)=300(90-T)$$

$$T-15=540-6T$$

$$7T=555$$

$$\therefore T=\frac{555}{7}=79.3\,^0C$$

مثال:

وعاء معزول من الألمنيوم كتلته $20 \ g$ يحتوي على $150 \ g$ من الماء عند درجة 20^0C. سُخنت قطعة من المعدن كتلتها $30 \ g$ إلى درجة 100^0C ثم أسقطت في الماء. فإذا كانت درجة الحرارة النهائية للماء والوعاء وقطعة المعدن هي 25^0C، فما هي الحرارة النوعية للمعدن؟

الحل:

الحرارة المفقودة بواسطة المعدن=الحرارة المكتسبة بواسطة الماء+الحرارة المكتسبة بواسطة الوعاء

$$20\times 0.21\times 5+150\times 1\times 5=30\times c\times 75$$

$$21+750=2250c$$

$$771=2250c$$

$$\therefore c = \frac{771}{2250} = 0.343\ \frac{cal.}{g.^0C}$$

قانون نيوتن للتبريد:

عندما يكون الفرق بين درجتي الحرارة المطلقة بين الجسم الساخن والوسط المحيط صغيراً، فإن قانون ستيفان يؤول إلى قانون نيوتن للتبريد الآتي:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma e A\,(T - T_o)$$

مع العلم أن هذا القانون يشمل التأثيرات المشتركة لانتقال الحرارة بالتوصيل والحمل والإشعاع.

حيث T درجة حرارة الجسم الساخن.

T_o درجة حرارة الوسط المحيط.

A المساحة السطحية للجسم الساخن.

e الإشعاعية وتتراوح بين الصفر والواحد.

σ ثابت ستيفان.

مثال:

طالب معرّض جسمه مباشرة لهواء الغرفة الذي درجة حرارتها (20°C). وإذا كانت درجة حرارة جسمه (37°C) وإشعاعية الجسم هي (0.9) والمساحة السطحية لجسم الطالب $1.5\,m^2$، فاحسب مقدار الحرارة المفقودة من جسمه خلال عشر دقائق.

الحل:

$$T = 37 + 273 = 310\ ^oK$$

$$T_o = 20 + 273 = 293\ ^oK$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma e A\,(T^4 - T_o^4)$$

$$= 5.67\times10^{-8}\times0.9\times1.5\times(310^4 - 293^4)$$

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = 140\ W$ معدل الحرارة المفقودة

$\Delta Q = 140\times10\times60$ مقدار الحرارة المفقودة خلال عشر دقائق

$$= 8.6\times10^4\ J$$

الحرارة الكامنة للانصهار والتبخر:

عندما تتغير حالة المادة من الصلبة إلى السائلة أو من السائلة إلى الغازية فإن ذلك يتم بعد تزويد المادة بطاقة حرارية كافية لتغير حالتها والذي يحصل مع ثبـــات درجـــة الحـــرارة. ولحساب مقدار الحرارة (Q) لإجراء التحول المطلوب لكتلة مـــن المـــادة m نـــستخدم العلاقات التالية:

أولاً:

الحرارة اللازمة لتحول المادة من الصلب إلى السائل (أو العكس):

$$\Delta Q = mL_f$$

حيث L_f الحرارة الكامنة للانصهار ووحدها $\frac{J}{kg}$ أو $\frac{cal.}{g}$.

ثانياً:

الحرارة اللازمة لتحول المادة من السائل إلى الغاز (أو العكس):

$$\Delta Q = mL_v$$

حيث L_v الحرارة الكامنة للانصهار ووحدها $\frac{J}{kg}$ أو $\frac{cal.}{g}$.

مثال:

وعاء يحتوي على كتلة من الماء مقدارها 0.25 kg بدرجة حرارة $20\,^0C$. يُوضع الوعاء في مجمدة (Freezer). احسب الحرارة اللازم إزالتها من الماء كي يتحول إلى ثلج بدرجة $0\,^0C$ إذا علمت أن الحرارة الكامنة لانصهار الماء هي $334\frac{kJ}{kg}$ والحرارة النوعية للماء هي $4.2\frac{kJ}{kg}$؟

الحل:

$$\begin{aligned}\Delta Q &= mc(T_f - T_i) + (-mL_f) \\ &= 0.25\times 4.2\times 10^3(0-20) + (-0.25\times 334\times 10^3) \\ &= -2.1\times 10^4 - 8.35\times 10^4 \\ &= -1.05\times 10^5\ J\end{aligned}$$

١٨-٨: التمدد الحراري

التمدد الحراري الطولي:

تعتبر درجة الحرارة مقياساً للطاقة الداخلية لجزيئاها. وعند رفع درجة حرارة السائل أو الصلب تزداد طاقة جزيئاته وبالتالي تزداد سعة اهتزازها، وهذا يؤدي إلى زيادة متوسط المسافة بين كل جزيء والجزيئات المجاورة. أي أن السائل أو الصلب يتمدد عند رفع درجة حرارته.

يعرّف معامل التمدد الحراري الطولي α بأنه الزيادة في الطول لوحدة الأطوال من المادة نتيجة لتغير درجة الحرارة درجة واحدة. ويكتب هذا التعريف على هيئة معادلة كالتالي:

$$\alpha = \frac{\Delta L / L}{\Delta T}$$

أي أنه إذا تمدد قضيب طوله L بمقدار ΔL نتيجة لوضع درجة الحرارة بمقدار ΔT، فإن قيمة α تُعطى بالمعادلة السابقة. ووحدة α هي $^{o}C^{-1}$ أو $^{o}K^{-1}$.

مثال:

قضيب من النحاس طوله $(1\ m)$ ما مقدار الزيادة في طوله عند ارتفاع درجة حرارته بمقدار 50 درجة عن درجة حرارة الغرفة علماً أن معامل التمدد الطولي للنحاس يساوي $(1.9\times10^{-5}\ ^{o}C^{-1})$؟

الحل:

$$\alpha = \frac{\Delta L / L}{\Delta T}$$

$$\therefore \Delta L = \alpha\, L\, \Delta T$$

$$= 1.9\times10^{-5}\times1\times50$$

$$= 0.00095\ m$$

التمدد الحراري الحجمي:

معامل التمدد الحجمي: هو التغير النسبي في الحجم لكل درجة، ويُكتب في صورة معادلة كالآتي:

$$\gamma = \frac{\Delta V / V}{\Delta T} \quad \text{معامل التمدد الحجمي}$$

حيث ΔV هو مقدار التغير في الحجم V الحاصل بسبب تغير في درجة الحرارة مقداره ΔT، ووحدة المعامل γ هي نفس وحدة α وتساوي $^{o}C^{-1}$ أو $^{o}K^{-1}$.

مثال:

كرة من الألمنيوم حجمها ($113\ mm^3$) عند درجة الحرارة ($100\,^{o}C$). فما هو حجمها عند درجة ($0\,^{o}C$) إذا كان معامل التمدد الحجمي للألمنيوم ($7.2\times10^{-5}\ ^{o}C^{-1}$)؟

الحل:

$$\gamma = \frac{\Delta V / V}{\Delta T} \Rightarrow \Delta V = \gamma\, \Delta T\, V$$

$$\Delta V = 7.2\times10^{-5} \times 113\times 100 \cong 0.81 mm^3$$

بما أن الحجم عند درجة ($0\,^{o}C$) هو أقل عما هو عليه في درجة ($100\,^{o}C$)، لذا يكون الحجم عند درجة ($0\,^{o}C$) هو:

$$V_o = 113 - 0.8 = 112.2\ mm^3$$

مثال على التمدد الحجمي (سلوك الماء):

ينكمش الماء عند تسخينه من $0\,^{o}C \leftarrow 4\,^{o}C$ ثم يتمدد من $\leftarrow 4\,^{o}C$. أقصى كثافة للماء عند $4^{o}C \Leftarrow$ سبب انفجار الأنابيب في الشتاء.

الفصل التاسع عشر

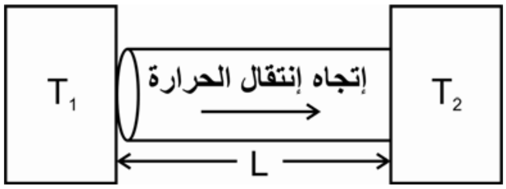
انتقال الحرارة

طرق انتقال الحرارة:

تنتقل الحرارة من مكان أومن جسم إلى آخر بثلاث طرق مختلفة وهي: التوصيل والحمل والإشعاع.

أولاً: انتقال الحرارة بالتوصيل:

يحدث التوصيل الحراري عندما يكون هنالك فرق في درجة الحرارة خلال المادة حيث وُجِدَ عملياً أن معدل الجريان الحراري خلال المادة يتناسب طردياً مع الفرق في درجتي حرارة نهايتها. كذلك يعتمد معدل الجريان الحراري على حجم وشكل المادة.



ويمكن كتابة معدل الجريان الحراري ΔQ بالعلاقة:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{KA(T_1-T_2)}{L}$$

حيث A مساحة مقطع الجسم.

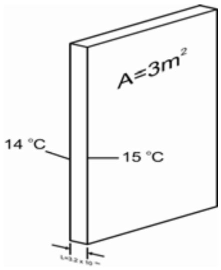
L المسافة بين نهايتي الجسم.

T_1 و T_2 درجتي الحرارة لنهايتي الجسم $(T_1 > T_2)$.

K ثابت التوصيل الحراري للمادة ووحدته هي : $\frac{cal}{cm.s.^{\circ}C}$ أو $\frac{J}{m.s.^{\circ}C}$.

مثال:

احسب معدل انتقال الحرارة خلال نافذة منزل أبعادهـــا $(2m\times1.5m)$ وسمكهـــا $(3.2mm)$. إذا كانت درجتي الحرارة على السطحين الداخلي والخارجي هـــي $15\,^{o}C$ و $14\,^{o}C$ على الترتيب وثابت التوصيل الحراري للزجاج هو: $\frac{0.84\,J}{m.s.^{o}C}$.



الحل:

$$A = 2\times1.5 = 3\,m^2$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{KA(T_1 - T_2)}{L}$$

$$= \frac{0.84\times3\times(15-4)}{3.2\times10^{-3}} = 790\frac{J}{s} \cong 0.19\frac{K\,cal}{s}$$

مثال:

قضيب من النحاس الأصفر مساحة مقطعه $2\,cm^2$ وطوله $1m$. وُضع أحد طـــرفي هذا القضيب في ماء يغلي ووضع الآخر على قطعة كبيرة من الثلج. ما هي كمية الثلج التي تنصهر بواسطة الحرارة المنتقلة من الطرف الساخن للقضيب إلى الطرف البـــارد خـــلال $(10\,min)$ ؟ [ثابت التوصيل الحراري للنحاس الأصفر= $\frac{0.2\,cal}{cm.s.^{o}C}$]

الحل:

كمية الحرارة المنتقلة خلال $(10\,min)$ $= \Delta Q = \dfrac{K\,A\,\Delta t\,(T_1 - T_2)}{L}$

$$\therefore Q = \frac{0.2\times2\times10\times60(100-0)}{100} = 240\,cal$$

وبما أن الحرارة الكامنة لانصهار الثلج L_f تساوي $\frac{80\,cal}{g}$ فتكون كمية الثلج المنصهرة m هي:

$$m = \frac{\Delta Q}{L_f} = \frac{240}{80} = 3\,g$$

ثانياً: انتقال الحرارة بالحمل:

تتميز السوائل والغازات بأنها نواقل جيدة للحرارة عن طريق الحمل. والحمل هو عملية انتقال الحرارة بواسطة حركة جزيئات الوسط من مكان إلى آخر حاملة معها الحرارة ولمسافات كبيرة من الوسط. وهنالك نوعان من الحمل، الحمل الطبيعي والحمل الجبري.

ويحصل الحمل الطبيعي عندما يتحرك المائع (الهواء أو الماء) بسبب تغير درجة حرارته وكثافته نتيجة امتصاص الحرارة من جسم آخر مجاور. وكمثال على ذلك نجد أن الهواء القريب من المدفأة المنزلية (الموجودة في غرفة مغلقة) يسخن فتقل كثافته ويرتفع لأعلى وفي نفس الوقت ينزل الهواء البارد القريب من السقف وهكذا تستمر دورة تيار الحمل في الغرفة حتى تتجانس درجة حرارة الهواء في داخلها. أما في حالة الحمل الجبري، فإن حركة المائع تتم بواسطة قوة ميكانيكية مثل المضخة خلال راديتر السيارة كي يتم تبريده، والمروحة التي تدفع الهواء الساخن إلى جميع أنحاء المنزل لغرض تدفئته.

ثالثاً: انتقال الحرارة بالإشعاع:

إن الحرارة التي تصل إلينا من الشمس لا تنتقل إلينا بالتوصيل أو الحمل. وذلك أن الفراغ الهائل بيننا وبين الشمس لا يحتوي تقريباً على أية جزيئات. ومن ثم فإن انتقال الحرارة خلال الفراغ يحصل بطريقة الإشعاع. والإشعاع هو جريان الحرارة من مكان إلى آخر بواسطة الموجات الكهرومغناطيسية.

إن معدل انتقال الحرارة بالإشعاع من الجسم الساخن تُعطى بعلاقة تسمى قانون ستيفان، وهي:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma e A T^{4}$$

ووحدة المقدار $\frac{\Delta Q}{\Delta t}$ هي الواط (W)،

حيث A تمثل المساحة السطحية للجسم المشع.

T تمثل درجة الحرارة المطلقة للجسم المشع.

e ثابت يسمى بالإشعاعية وتتراوح قيمته بين الصفر والواحد بحسب المادة المشعة.

σ ثابت ستيفان وقيمته تساوي: $5.67\times10^{-8}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m^2K^4}}$.

وإذا كان الجسم محاطاً بوسط (أو جسم آخر) درجة حرارته المطلقة T_o، فإن محصلة معدل انتقال الحرارة بالإشعاع من الجسم (بدرجة مطلقة T) هو:

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \sigma e\, A\, (T^{4} - T_o^{\,4})$$

وقد أمكن إثبات أن الجسم الأسود (أي الذي لا يعكس الضوء) يشع كمية أكبر من الحرارة بالمقارنة مع الأجسام الأخرى ذات الانعكاسية الأعلى. وكقاعدة عامة يمكـــن القول أن الممتص الحراري الجيد هو مشع حراري جيد.