

# أساسيات الرياضيات

## لطلبة الكليات العلمية

د. مسعود بونخل  
قسم الرياضيات  
جامعة الملك سعود

د. مساعد العبد اللطيف  
قسم الرياضيات  
جامعة الملك سعود

الطبعة الأولى ١٤٢٧ هـ

[القطع المكافئ]

حدّد عناصر القطع المكافئ ثم ارسمه في التمارين ٣-١:

١.  $y^2 = 3x$

٢.  $x^2 = -2y$

٣.  $x^2 = 4y$

أوجد معادلة القطع المكافئ ثم ارسمه في التمارين ٦-٤:

٤. رأس القطع المكافئ  $V$  هو نقطة الأصل وبؤرته  $F$  هي النقطة  $(3, 0)$ .

٥. رأس القطع المكافئ  $V$  هو نقطة الأصل ومعادلة دليبه هي  $x = -5$ .

٦. رأس القطع المكافئ  $V$  هو نقطة الأصل ومعادلة دليبه هي  $y = 2$ .

حدّد عناصر القطع المكافئ ثم ارسمه في التمارين ٩-٧:

٧.  $x^2 = -2y - 1$

٨.  $(x+1)^2 = -y - 3$

٩.  $(y-4)^2 = -8(x+2)$

أوجد معادلة القطع المكافئ ثم ارسمه في التمارين ١٢-١٠:

١٠. رأس القطع المكافئ هو  $V(1, 2)$  وبؤرته هي النقطة  $F(3, 2)$ .

١١. رأس القطع المكافئ هو  $V(-1, 1)$  ومعادلة دليبه هي  $x = 2$ .

١٢. بؤرة القطع المكافئ هي  $F(3, 1)$  ومعادلة دليبه هي  $y = -3$ .

حدّد عناصر القطع المكافئ ثم ارسمه في التمارين ٣-١٣:

١٣.  $y^2 = 4y + 2x + 4$

١٤.  $x^2 - 4x = y$

$$x^2 + 8y + 6x + 1 = 0 \quad 15$$

16. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته  $F(1, 2)$  ودليله  $y = 1$  ثم ارسمه.

17. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه  $V(1, -1)$  ودليله  $x = -1$  ثم ارسمه.

18. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه  $V(1, -1)$  وبؤرته  $F(1, 3)$ .

### [القطع الناقص]

19. حدّد عناصر القطع الناقص الذي معادلته  $9y^2 + 25x^2 = 225$  ثم ارسمه.

20. حدّد عناصر القطع الناقص الذي معادلته  $9y^2 + 4x^2 = 36$  ثم ارسمه.

21. أوجد معادلة القطع الناقص الذي رؤساه  $F_1(2, 0)$  و  $F_2(-2, 0)$  ويمر بالنقطة

$A(0, 1)$  ثم ارسمه.

22. أوجد معادلة القطع الناقص الذي رؤساه  $V_1(3, 0)$  و  $V_2(-3, 0)$  وطول محوره

الأصغر يساوي 4 ثم ارسمه.

23. حدّد عناصر القطع الناقص الذي معادلته  $9y^2 + 25x^2 - 18y - 100x = 116$  ثم ارسمه.

ثم ارسمه.

24. حدّد عناصر القطع الناقص الذي معادلته  $9y^2 + 4x^2 + 18y - 8x = 23$  ثم ارسمه.

ارسمه.

25. أوجد معادلة القطع الناقص الذي رؤساه  $F_1(2, 3)$  و  $F_2(-2, 3)$  ويمر بالنقطة

$A(0, 4)$  ثم ارسمه.

26. أوجد معادلة القطع الناقص الذي رؤساه  $V_1(3, 2)$  و  $V_2(-3, 2)$  وطول محوره

الأصغر يساوي 4 ثم ارسمه.

### [القطع الزائد]

27. حدّد عناصر القطع الزائد الذي معادلته  $9y^2 - 25x^2 = 225$  ثم ارسمه.

28. حدّد عناصر القطع الزائد الذي معادلته  $9y^2 - 16x^2 = 144$  ثم ارسمه.

٢٩. أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه  $F_1(2,0)$  و  $F_2(-2,0)$  وأحد رأسيه هو النقطة  $(1,0)$  ثم ارسمه.

٣٠. أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه  $V_1(3,0)$  و  $V_2(-3,0)$  وإحدى بؤرتيه هي  $(4,0)$  ثم ارسمه.

٣١. حدّد عناصر القطع الزائد الذي معادلته:  $9y^2 - 18y - 25x^2 + 100x = 316$  ثم ارسمه.

٣٢. حدّد عناصر القطع الزائد الذي معادلته  $4y^2 - 8y - 9x^2 - 18x = 31$ .

٣٣. أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه  $F_1(0,4)$  و  $F_2(0,4)$  والبعد بين رأسيه يساوي ٨ ثم ارسمه.

٣٤. أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه  $V_1(2,4)$  و  $V_2(2,-4)$  وبؤرتاه  $F_1(2,5)$  و  $F_2(2,-5)$  ثم ارسمه.

### [تمارين عامة]

٣٥. أوجد رأس وبؤرة ودليل القطع المكافئ ذي المعادلة التالية  $y = 2x^2 + 4x + 4$ .

٣٦. أوجد معادلة القطع المكافئ الذي بؤرتاه  $F(0,0)$  ودليله  $x = -2$ .

٣٧. أوجد رأسي وبؤرتي وطرفي المحور الأصغر ومركز القطع الناقص ذي المعادلة التالية:  $4y^2 = -9x^2 + 18x + 27$ .

٣٨. أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه  $(8,0)$  و  $(-8,0)$  وبؤرتاه  $(0,0)$  و  $(-5,0)$ .

٣٩. أوجد معادلة القطع الناقص الذي رأساه يقعان على محور السينات ويمر بالنقطة

$(0,4)$  ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الأكبر يساوي ١٠.

٤٠. أوجد معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه  $(1,4)$  و  $(1,2)$  وطول محوره الأكبر يساوي ٤.

٤١. للقطع الزائد  $4y^2 = 9x^2 + 18x + 45$  أوجد المركز والرأسين والبؤرتين ومعادلتَي المستقيمين المقاربتين.

٤٢. للقطع الزائد  $x^2 - 2y^2 = 8$  أوجد المركز والرأسين والبؤرتين ومعادلتَي المستقيمين المقاربتين، ثم ارسمه.

٤٣ ✓ أوجد معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه  $(0, 5)$  و  $(0, -5)$  والبعد بين رأسيه يساوي ٨.

٤٤ أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه  $(5, 0)$  و  $(-5, 0)$  وبؤرتاه  $(8, 0)$  و  $(-8, 0)$ .

٤٥ أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه  $(3, 0)$  و  $(-3, 0)$  ومعادلتي المستقيمين المقاربتين

$$y = 2x \text{ و } y = -2x.$$

٤٦ أوجد معادلة القطع الزائد الذي رأساه  $(4, -4)$  و  $(4, 4)$  والبعد بين بؤرتيه يساوي ٥.

## تمارين

### [المصفوفات]

احسب  $A+B$  (إن أمكن) في كل حالة مما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad ٢. \checkmark$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -12 & 7 \\ -10 & 1 \end{pmatrix} \quad ١.$$

احسب  $AB$  (إن أمكن) في كل حالة مما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 9 \\ 11 & 7 \end{pmatrix} \quad ٤.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad ٣. \checkmark$$

احسب  $A+B'-CD$  (إن أمكن) في كل حالة مما يلي:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad ٥.$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 12 & 10 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 4 & 7 & 0 \end{pmatrix} \quad ٦.$$

احسب ما يلي:

$$\begin{pmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 2 & 7 \\ 1 & 6 & 3 \end{pmatrix} \quad ٨.$$

$$(3 \ 8 \ 2 \ 1) + (9 \ 5 \ 3 \ 7) \quad ٧.$$

$$.10 \quad \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} .9$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & -7 \\ -3 & 5 & 9 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 1 & 4 & 8 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -6 & 7 \\ 2 & 4 & -9 \\ -6 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$6 \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} .12 \quad \begin{pmatrix} 1 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \\ -2 & 3 & 3 & -2 \\ 5 & -1 & 2 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 & 4 & 2 & 8 \\ 9 & 2 & -6 & 3 \\ -5 & 2 & 6 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 0 \end{pmatrix} .11$$

$$.15 \quad 7 \begin{pmatrix} 7 & -3 & 7 \\ -2 & 9 & 5 \\ 9 & 1 & 0 \end{pmatrix} .14$$

$$-3(5 \ 9 \ -2 \ 7 \ 3) .13$$

$$-3 \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 6 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

إذا كان  $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -3 & 2 & 6 \\ 9 & -4 & 5 \end{pmatrix}$  و  $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 \\ -7 & 2 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$  فاحسب ما يلي:

$$2A + 2B .18$$

$$3A + B .17 \checkmark$$

$$A - 4B .16$$

أوجد حاصل الضرب في كل مما يأتي:

$$(-4 \ 3 \ 8 \ -5) \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} .21 \quad (-3 \ 6 \ -9) \begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} .20 \quad (5 \ 3 \ 7) \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} .19$$

$$(3 \ -1) \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -6 & 8 & -3 & 7 \end{pmatrix} .23 \quad (4 \ -2) \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} .22$$

$$(-3 \ 6 \ -1) \begin{pmatrix} 5 & -2 & 7 \\ -6 & 2 & 5 \\ 9 & 0 & -1 \end{pmatrix} .25 \quad (2 \ 8 \ 1) \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} .24$$

$$(9 \ 1 \ 4) \begin{pmatrix} 6 & 2 & 1 & 5 & -8 \\ 7 & 1 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & -5 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} .26$$

$$(2 \ 4 \ 3 \ -1 \ 0) \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & -2 & 6 \\ 2 & -4 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 6 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & -6 \end{pmatrix} \quad .27$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .30$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad .29$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad .28$$

$$\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad .32$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 5 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad .31$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix} \quad .34$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 5 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \quad .33$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 1 \end{pmatrix} \quad .36$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad .35$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad .38$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \quad .37$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \quad .40$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad .39$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .41$$

احسب  $AB$  و  $BA$  في كل مما يلي:



$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .\text{٤٢} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \quad .\text{٤٣}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 9 & 8 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 7 & 6 & 9 & 0 \\ 10 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad .\text{٤٤}$$

### [المحددات]

احسب محددة المصفوفة  $A$  في كل حالة من الحالات التالية:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 12 & 9 \end{pmatrix} \quad .\text{٤٧}$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ -1 & 8 \end{pmatrix} \quad .\text{٤٦}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \quad .\text{٤٥}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad .\text{٤٩}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 7 & 0 & 1 \\ 4 & 8 & 0 \end{pmatrix} \quad .\text{٤٨}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad .\text{٥١}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \quad .\text{٥٠}$$

احسب المحددات التالية:

$$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} \quad .\text{٥٤}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} \quad .\text{٥٣}$$

$$\begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} \quad .\text{٥٢}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} \quad .\text{٥٧}$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \quad .\text{٥٦}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} \quad .\text{٥٥}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{vmatrix} \quad .\text{٦٠}$$

$$\begin{vmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} \quad .\text{٥٩}$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -6 \\ -5 & 4 \end{vmatrix} \quad .\text{٥٨}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} \cdot 63 \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} \cdot 62 \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} \cdot 61$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 66 \quad \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 4 & -3 & 5 \end{vmatrix} \cdot 65 \quad \begin{vmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \cdot 64$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & 5 \end{vmatrix} \cdot 69 \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 4 \\ -3 & 6 & -2 \\ -1 & 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot 68 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} \cdot 67$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot 72 \quad \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \cdot 71 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} \cdot 70$$

## تمارين

حل الأنظمة الخطية التالية مستخدماً إحدى الطرق (كرامر، جاوس، جاوس جوردان):

$$\begin{cases} 4x + 2y = 3 \\ -4x + y = 6 \end{cases} .3$$

$$\begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases} .2$$

$$\begin{cases} 2x + y = 11 \\ 3x - y = 4 \end{cases} .1 \checkmark$$

$$\begin{cases} 4x - 5y = -34 \\ 2x - 3y = -22 \end{cases} .6$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = -15 \\ 5x + 6y = 3 \end{cases} .5$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 3y = 10 \end{cases} .4$$

$$\begin{cases} 7x - 4y = 81 \\ 5x - 3y = 57 \end{cases} .9$$

$$\begin{cases} 2x - 3y = 3 \\ 4x + 5y = 39 \end{cases} .8$$

$$\begin{cases} x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 11 \end{cases} .7$$

$$\begin{cases} 5x - 2y = 3 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases} .12$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1 \\ 2x + y = 10 \end{cases} .11$$

$$\begin{cases} 3x + 4y = 85 \\ 5x + 4y = 107 \end{cases} .10$$

$$\begin{cases} x + y + z = 18 \\ x - y + z = 6 \\ x + y - z = 4 \end{cases} .15$$

$$\begin{cases} 2x + y = -3 \\ x + 3y = 19 \end{cases} .14$$

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ x + 2y = 8 \end{cases} .13$$

$$\begin{cases} x + y + z = 35 \\ x - 2y + 3z = 15 \\ y - x + z = -5 \end{cases} .18$$

$$\begin{cases} x + y = 35 \\ x + z = 40 \\ y + z = 45 \end{cases} .17$$

$$\begin{cases} x + y + z = 12 \\ x - y = 2 \\ x - z = 4 \end{cases} .16$$

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = 5 \\ 5x + 3y + 6z = 57 \\ x + 2y + 2z = 21 \end{cases} .21$$

$$\begin{cases} x + y + z = 90 \\ 2x - 3y = -20 \\ 2x + 3z = 145 \end{cases} .20$$

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14 \\ 2x + y + 2z = 10 \\ 3x + 4y - 3z = 2 \end{cases} .19 \checkmark$$

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ y - z = -6 \\ 2x - z = 2 \end{cases} .24$$

$$\begin{cases} 2x - 4y + 3z = 10 \\ 3x + y - 2z = 6 \\ x + 3y - z = 20 \end{cases} .23$$

$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ 2y - 3z = -5 \\ x + 2z = 7 \end{cases} .22$$

$$\begin{cases} 2x - y - z - w = 0 \\ x - 3y + z + w = 0 \\ x + y - 4z + w = 0 \\ x + y + w = 36 \end{cases} .26$$

$$\begin{cases} x + y + 2z + w = 18 \\ x + 2y + z + w = 17 \\ x + y + z + 2w = 19 \\ 2x + y + z + w = 16 \end{cases} .25 \checkmark$$

$$\begin{cases} x+y=a+b \\ y+z=b+c \\ z+w=a-b \\ w-x=c-b \end{cases} \quad \begin{matrix} ? \\ .29 \\ \checkmark \end{matrix}$$

$$\begin{cases} x+2y-5 \\ y+2z=8 \\ z+2u=11 \\ 2x+u=6 \end{cases} \quad .28$$

$$\begin{cases} 3x-2y-z+w=-3 \\ -x-y+3z+2w=23 \\ x+3y-2z+w=-12 \\ 2x-y-z-3w=-22 \end{cases} \quad .27$$

$$\begin{cases} x+y+z+w=4 \\ x-2y+z-w=-1 \\ x+y+z+2w=5 \\ 2x-y+z-w=1 \end{cases} \quad .31$$

$$\begin{cases} 2x-3y+z-w=-6 \\ x+2y-z=8 \\ 3y+z+3w=0 \\ 3x-y+w=0 \end{cases} \quad .3.$$

## تمارين

[تكامل مباشر]

احسب التكاملات في التمارين ١-٦:

$$\int (4 \csc^2 x - 2 \sec x \tan x) dx \quad .٣ \quad \checkmark$$

$$\int \left( \frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} \right) dx \quad .٢$$

$$\int dx \quad .١$$

$$\int (x-1)^3 dx \quad .٦$$

$$\int 3 \cos^2 x dx \quad .٥ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{1 + \cot^2 \theta}{2} d\theta \quad .٤$$

[تكامل بالتعويض]

احسب التكاملات في التمارين ٧-١٥:

$$\int \frac{(\sqrt{t}+3)^4}{\sqrt{t}} dt \quad .٩ \quad \checkmark$$

$$\int \frac{x-2}{(x^2-4x+3)^{10}} dx \quad .٨ \quad \times$$

$$\int (2x^2-3)^8 x dx \quad .٧$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^3} dx \quad .١٢$$

$$\int \frac{\cos^3 \sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^2}} dx \quad .١١$$

$$\int \cos(4x-3) dx \quad .١٠$$

$$\int \frac{x^5}{(x^2-1)} dx \quad .١٥ \quad \checkmark$$

$$\int \left(1 + \frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{x^2} dx \quad .١٤$$

$$\int \sin x (1 + \sqrt{\cos x})^2 dx \quad .١٣$$

[تكامل بالتجزئ ء]

احسب التكاملات في التمارين ١-١٢:

$$\int \tan^{-1} x dx \quad .٣ \quad \checkmark$$

$$\int x \ln x dx \quad .٢$$

$$\int x \cos x dx \quad .١$$

$$\int x \sec^{-1} x dx \quad .٦$$

$$\int (x^2 - 5x) e^x dx \quad .٥$$

$$\int x \sec^2 x dx \quad .٤$$

$$\int x^3 \ln x dx \quad .٩ \quad \checkmark$$

$$\int x \cos 2x dx \quad .٨$$

$$\int e^x \cos x dx \quad .٧ \quad \checkmark$$

$$\int x \tan^{-1} x dx \quad .١٢$$

$$\int \frac{\cos x}{e^x} dx \quad .١١$$

$$\int \sec^{-1} \sqrt{x} dx \quad .١٠$$

[تكامل دوال كسرية]

احسب التكاملات في التمارين ١-١٥:

$$\int \frac{t^3 + 4t^2}{t^3 + t} dt \quad .٣ \checkmark$$

$$\int \frac{2x+1}{x^2-7x+12} dx \quad .٢$$

$$\int \frac{dx}{x^2+2x} \quad .١$$

$$\int \frac{x^3}{x^2+1} dx \quad .٦$$

$$\int \frac{dx}{(x^2-1)^2} \quad .٥$$

$$\int \frac{x+3}{2x^3-8x} dx \quad .٤$$

$$\int \frac{x^3-x}{(x^2+1)(x-1)^2} dx \quad .٩ \checkmark$$

$$\int \frac{(4x+4)}{x^2(x^2+1)} dx \quad .٨$$

$$\int \frac{\theta}{\theta^3+\theta} d\theta \quad .٧ \checkmark$$

$$\int \frac{x^2+2x+1}{(x^2+1)^2} dx \quad .١٢$$

$$\int \frac{x^6+2x}{x^2+1} dx \quad .١١$$

$$\int \frac{x^3+x^2+2x-1}{x^2(x^2+x-1)} dx \quad .١٠$$

$$\int \frac{dy}{y^3+y^2-2y} \quad .١٥$$

$$\int \frac{2x^3+3x^2+5x+2}{x^2+x+1} dx \quad .١٤$$

$$\int \frac{8r^2+8r+2}{(4r^2+1)^2} dr \quad .١٣$$

[تمارين إضافية]

احسب التكاملات في التمارين ١-٢٠:

$$\int \frac{\sin 2\theta}{\cos \theta} d\theta \quad .٣$$

$$\int \frac{\sec x + \tan x}{\cos x} dx \quad .٢$$

$$\int (1+x^2)(2-x) dx \quad .١$$

$$\int \frac{3x dx}{\sqrt{4x^2+5}} \quad .٦$$

$$\int \cos^9 x \sin x dx \quad .٥$$

$$\int 2x(x^2+1)^{37} dx \quad .٤$$

$$\int x^{2/3} \sin(x^{5/3}) dx \quad .٩$$

$$\int x^2 \sqrt{1+x} dx \quad .٨$$

$$\int \sqrt{\sin \pi \theta} \cos \pi \theta d\theta \quad .٧$$

$$\int (x^2-6x+9)^{3/5} dx \quad .١٢$$

$$\int \frac{x^2-1}{\sqrt{x}} dx \quad .١١ \checkmark$$

$$\int [\sin(\sin t)] \cos t dt \quad .١٠$$

$$\int x \ln \sqrt{x} \quad .١٥$$

$$\int \sin^3 x dx \quad .١٤$$

$$\int \frac{z dz}{\sqrt{z+1}} \quad .١٣ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x-3)} \quad .١٨$$

$$\int (\ln x)^2 dx \quad .١٧ \checkmark$$

$$\int \cos(\ln x) dx \quad .١٦$$

$$\int \frac{3x^2-x+1}{x^3-x^2} dx \quad .٢٠$$

$$\int \frac{x^2+x-16}{(x+1)(x-3)^2} dx \quad .١٩ \checkmark$$

عَرَبِي

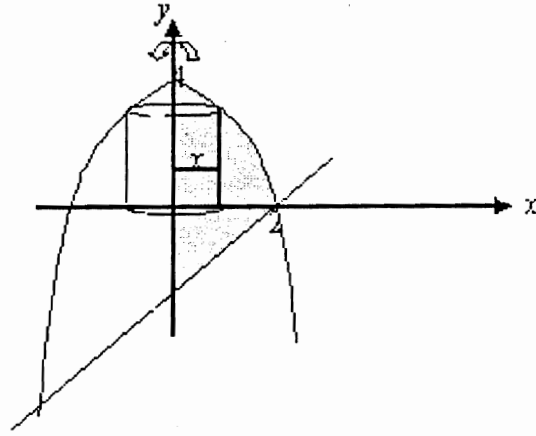
$$V = \int_0^2 2\pi y(2-y) dy = 2\pi \left( y^2 - \frac{1}{3} y^3 \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left( 4 - \frac{8}{3} \right) = \frac{8\pi}{3} \text{ c. u.}$$

وهذا يوافق ما حصلنا عليه مسبقاً في مثال (٧-٥).

(د) انظر شكل (٢٠-٥)، الحجم المطلوب هو:

$$V = \int_0^2 2\pi x[(4-x^2) - (x-2)] dx = 2\pi \int_0^2 (-x^3 - x^2 + 6x) dx$$

$$= 2\pi \left( -\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{3} x^3 + 3x^2 \right) \Big|_0^2 = 2\pi \left( 12 - \frac{8}{3} - 4 \right) = \frac{32\pi}{3} \text{ c. u.}$$



شكل (٢٠-٥)

## تمارين

[حساب المساحات]

أوجد مساحة المنطقة المحصورة بالمنحنيات المحددة في كل مما يلي:

١.  $x = \frac{1}{2}, x = 0, y = x, y = x^3$

٢.  $y = x, y = x^4$

٣.  $x = 0, x = \frac{\pi}{2}, y = 0, y = \cos x$

$$y=4, y=0, x=0, x=y^2-4y \quad .4$$

$$x=y-2, x^2=y \quad .5 \checkmark$$

$$x+y=6, y=x^2+4 \quad .6$$

$$y=4, y=-1, y=x-6, y^2=-x \quad .7$$

$$y=-\frac{1}{5}x+7, y=2+|x-1| \quad .8$$

$$x=1, x=0, y=\sqrt{x}, y=\frac{1}{2}x \quad .9 \checkmark$$

$$y=\frac{1}{2}x, y=\sqrt{x} \quad .10$$

$$x=2-y^2, x=y^2 \quad .11 \checkmark$$

$$y=3x+2, y=x^3 \quad .12 \text{ في الربعين الأول والثاني.}$$

### [حساب حجوم الأجسام الدورانية]

في التمارين ٦-١ أوجد حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات المحددة حول المحور المحدد في كل مما يلي، وذلك باستخدام طريقة القرص الدائري:

$$y=0, x=3, x=1, y=\frac{1}{x} \quad .1 \text{ حول محور } x$$

$$y=2, y=x^2 \quad .2 \text{ حول محور } y$$

$$y=0, y=x^2-4x \quad .3 \text{ حول محور } x$$

$$2y=x, y^2=x \quad .4 \text{ حول محور } y$$

$$y=4-x^2, y=x^2 \quad .5 \checkmark \text{ حول محور } x$$

$$y-x+2=0, x=y^2 \quad .6 \text{ حول محور } y$$

في التمارين ١٢-٧ أوجد حجم الجسم الدوراني الناتج عن دوران المنطقة المحصورة بالمنحنيات المحددة حول المحور المحدد في كل مما يلي، وذلك باستخدام طريقة الشريحة الاسطوانية:

$$y=0, x=1, y=x^3 \quad .7 \checkmark \text{ حول محور } y$$

$$x=2, y=-2x+3, y=2x-1 \quad .8 \text{ حول محور } y$$



حول محور  $x$  . ٩  $x=0, y=1, y^2=x$

حول محور  $x$  . ١٠  $y=0, x=1, y=x^2$

حول محور  $y$  . ١١  $y=0, x=9, x=4, y=\sqrt{x}$

حول محور  $x$  . ١٢  $y=0, y-x+2=0, x=y^2$

## تمارين

### [المشتقات الجزئية]

أوجد المشتقات الجزئية الأولى للدوال في التمارين ١٠-١:

١.  $w = 3x^3y^2$  ✓

٢.  $f(x, y) = 2x^4y^3 - xy^2 + 3y + 1$

٣.  $f(x, y) = 4e^{x^2y^3}$  عند (١,١) ✓

٤.  $w = \cos(x^5y^4)$

٥.  $f(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}$  عند (-١,٠)

٦.  $w = \frac{x}{y} - \frac{y}{x}$

٧.  $w = x^2 \cos(2/y)$

٨.  $f(x, y, z) = x + \sqrt{x^2 + y^2}$

٩.  $w = y \ln(x^2 + z^4)$  عند (٢,١,٠)

١٠.  $w = xyz e^{xyz}$

أوجد المشتقات الجزئية الثانية للدوال في التمارين ١١-١٥:

١١.  $w = 3x^3y^2$  ✓

١٢.  $f(x, y) = 4e^{x^2y^3}$  عند (١,١)

١٣.  $f(p, q) = \sqrt{p^2 + q^2}$  عند (-١,٠)

١٤.  $w = x^2 \cos(2/y)$

١٥.  $w = y \ln(x^2 + z^4)$  عند (٢,١,٠)

[قاعدة السلسلة]

في التمارين ١-٥ أوجد  $\frac{dw}{dt}$ :

١.  $w = 3x^2y^3; x = t^4, y = t^2$

٢. عند  $t=1$   $w = 3 \cos x - \sin xy; x = \frac{1}{t}, y = 3t$

٣. عند  $t=1$   $w = \ln(2x^2 + y); x = \sqrt{t}, y = t^{2/3}$

٤.  $w = e^{1-xy}; x = t^{1/3}, y = t^3$

٥. عند  $t = \pi$   $w = x^2 - y \tan x; x = 2t, y = t + \frac{\pi}{2}$

في التمارين ٦-١٠ أوجد  $\frac{dw}{dt}$  و  $\frac{dw}{ds}$ :

٦.  $w = x \sin y; x = s^2 + t^2, y = st$

٧. عند  $(1,1)$   $w = x^2 + 2xy, x = s \ln t, y = 2s + t$

٨. عند  $(1,1)$   $w = x \ln y; x = 3s + t, y = st$

٩.  $w = x^2 \cos y; x = s^2t, y = s - 1$

١٠. عند  $(1,0)$   $w = xy + yz; x = 2s - t, y = s - 2t, z = -2s + 2t$

[مشتقة الدالة الضمنية]

في التمارين ١-٥ أوجد  $\frac{dy}{dx}$ :

١.  $x^3 - 3xy^2 + y^3 = 5$

٢.  $x - \sqrt{xy} + 3y = 4$

٣.  $2x^3 + x^2y + y^3 = 1$

$$6x + \sqrt{xy} = 3y - 4 \quad .4$$

$$x^{2/3} + y^{2/3} = 4 \quad .5$$

في التمارين ٦-١٠ أوجد  $\frac{\partial z}{\partial x}$  و  $\frac{\partial z}{\partial y}$ :

$$x \sin y + z^2 = 2xyz \quad .6$$

$$2xz^3 - 3yz^2 + x^2y^2 + 4z = 0 \quad .7 \checkmark$$

$$xz^2 + 2x^2y - 4y^2z + 3y = 2 \quad .8$$

$$xe^{yz} - 2ye^{xz} + 3ze^{xy} = 1 \quad .9$$

$$yx^2 + z^2 + \cos xyz = 4 \quad .10$$

مثال (٦-٧): أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية  $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \sec x \tan x$  ثم أوجد الحل الخاص الذي يحقق  $y(\pi) = \pi^2$ .

الحل: بوضع المعادلة في الصورة العامة  $y' + \frac{2}{x}y = x^2 \sec x \tan x$  وبالتالي فإن

$P(x) = -2x^{-1}$  و  $Q(x) = x^2 \sec x \tan x$  ويكون معامل التكميل:

$$\rho(x) = e^{\int P(x) dx} = e^{-2 \int x^{-1} dx} = e^{-2 \ln|x|} = e^{\ln 1/|x|^2} = \frac{1}{x^2}$$

وعليه فإن الحل العام هو:

$$y = \frac{1}{1/x^2} \int \frac{1}{x^2} (x^2 \sec x \tan x) dx = x^2 (\sec x + C) = x^2 \sec x + Cx^2 = \frac{x^2}{\cos x} + Cx^2$$

يمكننا الآن إيجاد حل خاص للمعادلة التفاضلية عند النقطة  $(\pi, \pi^2)$ :

$$\pi^2 = -\pi^2 + \pi^2 C \Rightarrow C = 2$$

$$. y = \frac{x^2}{\cos x} + 2x^2 = x^2 \left( \frac{1}{\cos x} + 2 \right) \text{ وبالتالي فإن}$$

## تمارين

[تصنيف معادلات تفاضلية]

في التمارين ١-٤ حدد درجة المعادلة التفاضلية، واذكر ما إذا كانت خطية أم غير خطية:

١.  $y' = x^2 + y^2$  ✓

٢.  $(y''')^2 - 3x^2 y'' + y^5 = 10$

٣.  $y^{(4)} + y = 1$  ✓

٤.  $y'' + \frac{1}{x} y' + \frac{2}{x^2} y = e^x$

[معادلات قابلة للفصل]

في التمارين ٦-١ أوجد حل المعادلة التفاضلية:

١.  $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$  حيث  $y(1)=1$  ✓

٢.  $y' = \frac{x^3}{(1+x^4)y}$

٣.  $\sqrt{1+x^2} y' + x(1+y) = 0$  ✓

٤.  $x \sec x \tan y - \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{\cos x} = 0$  حيث  $y(0) = \frac{\pi}{2}$

٥.  $e^{-y} \sin x - y' \cos^2 x = 0$  ✓

٦.  $y' = 1 - y + x^2 - yx^2$

[معادلات تفاضلية خطية]

في التمارين ١٠-١ أوجد حل المعادلة الخطية:

١.  $y' + 3y = e^{-2x}$  ✓

٢.  $y' + 2y = x$  حيث  $y(0)=1$

٣.  $y' + y = \cos(e^x)$

٤.  $x \frac{dy}{dx} + 2y = x^3$  حيث  $y(2)=1$

٥.  $2 \frac{dy}{dx} + 10y = 1$

٦.  $x \frac{dy}{dx} - 2y = x^3 \sec x \tan x$  حيث  $y(\pi/3) = 2$

٧.  $xy' + y = \sin x$  حيث  $y(\pi/2) = 1$  ✓

$$(x > 0) \quad xy' - 3y = x^2 \quad .8$$

$$y(0) = 3 \quad \text{حيث} \quad \frac{dy}{dx} - xy = x \quad .9$$

$$\frac{dy}{dx} + y - \frac{1}{1+e^x} = 0 \quad .10$$