مقدمة في

البرمجة الخطية

تأليف:

أ.د. إبراهيم بن صالح العليان

الله

بسم الله الرحمن الرحيم

مقدمة في البرمجة الخطية

تأليـف

د.إبراهيم بن صالح العليان

الأستاذ المساعد بقسم الرياضيات بكلية العلوم

جامعة الملك سعود

النشر العلمي والمطابع - جامعة الملك سعود

ص.ب ٦٨٩٥٣ - الرياض ١١٥٣٧ - المملكة العربية السعودية

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر

رقم الإيداع : ٠٠٠٠٠٠٠٠
ردمك : ٠ – ٠٠٠ – ٠٠ - ٩٩٦٠

حكمت هذا الكتاب لجنة متخصصة، شكلها المجلس العلمي بالجامعة، وبعد اطلاع المجلس على تقارير المحكمين، وافق على نشره في اجتماعه التاسع للعام الدراسي ١٤٢٧ /١٤٢٨هـ المعقود في تاريخ ٢/ ١ / ١٤٢٨هـ الموافق ٢١/ ١ / ٢٠٠٧م.

النشر العلمي والمطابع ١٤٢٨هـ

إهداء

أهدي هذا الكتاب إلى كل من والدي ووالدتي حفظهما الله، واللذين كانا السبب الرئيسي بعد الله في غرس حب التعلم في نفسي منذ كنت صغيرًا وكان دعمهما وتشجيعهما لي خلال مراحل حياتي هو ما شجعني على إكمال دراستي ومن ثم تأليف هذا الكتاب.

كما أهدي هذا الكتاب إلى زوجتي التي كانت خير سند لي خلال الفترة التي قضيتها في تأليف الكتاب.

مقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على أشرف المرسلين، نبينا محمد وعلى آله وصحبه أجمعين، وبعد:

فقد نشأت فكرة تأليف هذا الكتاب أثناء قيامي بتدريس مقرر البرمجة الخطية (٤٥٦ ريض) لطلاب الرياضيات في جامعة الملك سعود خلال الفترة من عام ١٤٢٥هـ إلى عام ١٤٢٧ هـ. كانت البداية عبارة عن ملخص للمادة مستمد من عدة كتب عربية وأجنبية. بعد ذلك، تمت طباعة هذا الملخص وخرج على شكل مذكرة تم تحسينها وتعديلها خلال الفصول التي قمت فيها بتدريس هذا المقرر حتى خرج الكتاب في هذه الصورة.

يعتبر علم البرمجة الخطية من العلوم الرياضية الحديثة التي نشأت في منتصف القرن العشرين أثناء الحرب العالمية الثانية، وذلك عندما قام مجموعة من العلماء بدراسة بعض المسائل التي كانت تحتاجها وبشدة في ذلك الوقت القوات الجوية الأمريكية. كانت هذه المسائل تهتم بدراسة القيم العظمى والصغرى لدوال خطية. من بين مجموعة العلماء هؤلاء، استطاع جورج دانتزج في عام ١٩٤٧م أن يوجد الصيغة العامة لمسائل البرمجة الخطية، واستطاع حل هذه المسائل بتطوير طريقة السمبلكس مما أدى لحدوث ثورة في علم البرمجة الخطية. بعد ذلك تمت عدة دراسات لتطوير النظريات المتعلقة بمسائل البرمجة الخطية بشكل عام وطريقة السمبلكس بشكل خاص. وانتشر هذا العلم وانتقل الاهتمام به إلى المصانع التي دعمته بشكل كبير، وتطور هذا العلم كثيرًا منذ ذلك الحين.

يتعرض هذا الكتاب لمبادئ البرمجة الخطية فهو يغطي مفهوم البرمجة الخطية مع العديد من الأمثلة والمسائل. كما يوضح طريقة حل مسائل البرمجة الخطية. ويفترض في القارئ أن يكون على إلمام بمبادئ الجبر الخطي حتى يستطيع تتبع الكتاب بشكل جيد. ينقسم هذا الكتاب إلى تسعة فصول، وفي نهاية كل فصل يوجد العديد من التمارين التي تساعد القارئ على فهم الفصل بشكل أكثر عمقًا. كما يحتوي هذا الكتاب على العديد من الأمثلة المحلولة. إضافة لذلك اعتمدت في تأليفي لهذا الكتاب على طريقة الشرح من خلال المثال؛ فمثلاً عند شرح مفهوم معين نبدأ بمثال ثم نقوم بتوضيح هذا المفهوم عن طريق المثال. وقد استخدمت الترقيم المألوف في الكتب لكل من التعاريف والمبرهنات والأمثلة، فعندما نكتب تعريف (١.٢)، فهذا يعني التعريف الثاني في الفصل الأول، ... وهكذا.

نقدم في الفصل الأول لمحة تاريخية عن نشأة البرمجة الخطية ثم نعطي تعريفًا لمسألة البرمجة الخطية مع إعطاء بعض الأمثلة عليها، ثم نوضح كيفية صياغة مسائل البرمجة الخطية. في الفصل الثاني، نركز على طريقة حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم مع إعطاء بعض الأساسيات الهندسية المهمة.

الفصلان الثالث والرابع يعدان من أهم الفصول إذْ نناقش فيهما طريقة جبرية لحل مسائل البرمجة الخطية، هذه الطريقة هي طريقة السمبلكس وتعد من الطرق المشهورة لحل مسائل البرمجة الخطية. في البداية، نعطي مقدمة عن طريقة السمبلكس من خلال بعض التعاريف المهمة، ثم نبين فكرة طريقة السمبلكس وندرس الحالات التي قد تظهر معنا عند حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس.

يعنى الفصل الخامس بطريقة السمبلكس المعدلة حيث يقدم شرحًا مفصلاً لهذه الطريقة ثم يبين مدى أهميتها. ويقدم الفصل السادس مفهوم تحليل الحساسية

والذي يعد من المواضيع المهمة في البرمجة الخطية، حيث يبين هذا الفصل أهمية تحليل الحساسية والطريقة المستخدمة في تحليل الحساسية.

الفصل السابع يتعرض لمفهوم الثنائية، وفيه نبين كيفية إيجاد المسألة المرافقة لمسألة برمجة خطية، كما نوضح المعنى الاقتصادي للثنائية. بينما الفصل الثامن يعنى بنوعين خاصين من مسائل البرمجة الخطية وهما مسائل النقل ومسائل التوظيف، حيث تتم دراسة كل نوع مع بيان الطريقة المتبعة في حله. وأخيرًا فإن الفصل التاسع والأخير يتطرق لمسائل الشبكات، حيث يعطي بعض التعاريف الأساسية في الشبكات ثم يتطرق إلى مسألة المسار الأقصر ومسألة التدفق الأعظم، ويبين في كل مسألة الطريقة المتبعة لحلها.

هذا ولا يفوتني أن أوجه الشكر إلى طلاب مقرر البرمجة الخطية في جامعة الملك سعود، وكذلك زملائي في جامعة الملك سعود الذين ساهموا في إخراج هذا الكتاب لحيز الوجود. والذين كان لهم دور كبير في كثير من التعديلات التي طرأت على مسودة هذا الكتاب خلال فترة تدريسي لهذا المقرر.

والشكر موصول لمركز بحوث كلية العلوم على دعمه، حيث تم تأليف هذا الكتاب بدعم من مركز بحوث كلية العلوم برقم (Math/2005/09/B).

وفي الختام آمل أن أكون قد وفقت في تقديم نبذة عن البرمجة الخطية، وأن يجد هذا الكتاب الاستحسان والقبول لدى القارئ. كما أرحب بالآراء والنقد البناء من الزملاء والطلاب فيما يتعلق بمادة الكتاب، وأقدم شكري لكل من يرشدني إلى مواضع النقص أو الخطأ وذلك على الإيميل ialolyan05@yahoo.com.

والله من وراء القصد.

المؤلف

المحتويات

الفصل الثالث: طريقة السمبلكس

الفصل الرابع : حالات خاصة في طريقة السمبلكس

الفصل الخامس: طريقة السمبلكس المعدلة

الفصل السادس: تحليل الحساسية

الفصل السابع: الثنائية

الفصل الثامن: مسائل النقل والتوظيف

الفصل التاسع: مسائل الشبكات

الفصل الأول

البرمجة الخطية: تعاريف وأمثلة

Linear Programming: Definitions and Examples

- لمحة تاريخية
- تعريف البرمجة الخطية
- مسائل يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية
- صياغة مسائل البرمجة الخطية

في هذا الفصل نعطي لمحة تاريخية عن نشأة البرمجة الخطية وذلك من خلال التعريف بالعلم الذي تفرعت منه البرمجة الخطية وهو علم بحوث العمليات. بعد ذلك نعرف البرمجة الخطية، ونذكر بعض الأمثلة التطبيقية عليها. وأخيرًا، نبين كيف يمكن صياغة الأمثلة التطبيقية كمسائل الإنتاج والتغذية على شكل مسائل برمجة خطية.

(١,١) لمحة تاريخية

Historical Sight

نتحدث هنا عن كيفية ظهور ونشأة علم البرمجة الخطية (LinearProgramming) وذلك من خلال إعطاء فكرة عن تطور علم بحوث العمليات (Operations Research) والذي يعتبر النواة التي تفرع منها علم البرمجة الخطية.

ترجع أساسيات علم بحوث العمليات إلى عدة قرون، وإن كانت بداية استخدامه ترجع إلى تيلور في عام ١٨٨٥م، والذي يعتبر أول من استخدم التحليل العلمي لحساب بعض مشكلات الإنتاج. ثم تطور هذا العلم منذ ذلك الوقت، وخصوصًا أثناء الحرب العالمية الثانية (١٩٣٩-١٩٤٥م). ففي الفترة التي كانت الحرب العالمية الثانية مشتعلة، كان هناك العديد من المسائل العسكرية المعقدة والتي بحاجة ماسة إلى حلول. وكان من الصعب أن يتم إيجاد حلول لهذه المسائل عن طريق شخص واحد أو حتى عن طريق عدة أشخاص في نفس التخصص.

وللتغلب على هذه المشاكل، اجتمع عدد من العلماء من تخصصات مختلفة لحل هذه المسائل وذلك بالتعاون مع القوات المسلحة. وتعتبر بريطانيا من أوائل الدول التي كونت فريقًا من العلماء في تخصصات مختلفة كالفيزياء والرياضيات والإحصاء والهندسة وعلم النفس لدراسة مشكلة الدفاع الجوي والأرضي. ثم تبعتها بعد ذلك عدة دول منها: كندا، والولايات المتحدة، وفرنسا.

وقد قام العلماء بجهود جبارة أثمرت في تحسين أداء العمليات العسكرية المعقدة، فعلى سبيل المثال قام العلماء بتطوير الرادار، وساهموا في تفعيل أجهزة مضادة للغواصات. كما استطاعوا إدارة القوافل بشكل أكثر فاعلية. ولأن جميع المسائل التي ساهم فيها العلماء كانت عسكرية فقد أطلق على هذا العلم اسم " بحوث العمليات".

بعد الحرب العالمية الثانية، استغل عدد كبير من العاملين في مجال بحوث العمليات خبراتهم العلمية والعملية لحل المشكلات الإدارية في المؤسسات الصناعية والتجارية. بينما توجه بعض العلماء إلى الجامعات لتدريس بحوث العمليات والاستفادة من الدعم الذي يقدم للجامعات لتطوير هذا العلم.

وكأي علم ناشئ تفرع علم بحوث العمليات إلى عدة فروع منها علم البرمجة الرياضية (Mathematical Programming) والذي ينقسم إلى فرعين: برمجة خطية (Linear Programming) وبرمجة غير خطية (Nonlinear Programming). وتعتبر البرمجة الخطية من أهم فروع بحوث العمليات وأكثرها تطبيقًا وهي محور حديثنا في هذا الكتاب.

يعتبر علم البرمجة الخطية (LP) من العلوم الرياضية الحديثة التي نشأت في منتصف القرن العشرين. ففي عام ١٩٣٥م، قدم فان نيومان نموذجًا خطيًا للاقتصاد المتطور وهو ما يعد من أهم الأعمال التي قدمت في مجال البرمجة الخطية. بعد ذلك قام ليونتيف بدراسة نموذج الدخل والإنفاق في الاقتصاد الأمريكي. وفي أثناء الحرب العالمية الثانية، قام مجموعة من العلماء بدراسة بعض المسائل التي كانت تحتاجها وبشدة في ذلك الوقت القوات الجوية الأمريكية، وكانت هذه المسائل تهتم بدراسة القيم العظمى والصغرى لدوال خطية. ولقد كان من بين مجموعة العلماء هؤلاء، عالماً استطاع أن يوجد الصيغة العامة لمسائل البرمجة الخطية، واستطاع حل هذه المسائل بتطوير طريقة السمبلكس مما أدى لحدوث ثورة في علم البرمجة الخطية، حدث ذلك في سنة ١٩٤٧م على يد العالم جورج دانتزج (Dantzig).

ومنذ ذلك الحين، تمت عدة دراسات لتطوير النظريات المتعلقة بمسائل البرمجة الخطية بشكل عام وطريقة السمبلكس بشكل خاص. في البداية كانت الاستفادة من البرمجة الخطية مقصورة على الشركات الكبيرة التي تستطيع أن تدعم البحوث التي يقوم بها العلماء في هذا العلم وكان في مقدمة هذه الشركات، شركات البترول التي استفادت من علم البرمجة الخطية في عملية الإنتاج. ثم تطور علم البرمجة الخطية بشكل كبير من خلال دعم الشركات الكبيرة للعلماء المهتمين بهذا العلم. بعد ذلك أصبح باستطاعة الشركات الصغيرة أن تستفيد من علم البرمجة الخطية بشكل كبير.

(١,٢) تعريف البرمجة الخطية
Definition of Linear Programming

يعد علم البرمجة الخطية من الأدوات المهمة لحل مسائل الأمثلية (optimization problems) حيث يعالج بحث أفضل ربح أو أقل تكلفة في المسائل التي تحتوي على كميات محدودة من المصادر (كعدد العمال أو كمية المواد أو مساحة الأرض... إلخ) .

ويمكن تلخيص البرمجة الخطية بأنها مسألة تحديد القيمة العظمى أو الصغرى لدالة معينة تسمى دالة الهدف (objective function) ضمن مجال معين يتم تحديده من خلال قيود (constraints) على عدد منتهٍ من المتغيرات (variables) بحيث تحقق دالة الهدف وكذلك القيود خواصًا معينة سوف يتم توضيحها لاحقًا.

ويكثر استخدام البرمجة الخطية بشكل واسع في حل المسائل العسكرية والاقتصادية والصناعية ؛ وذلك لأن معظم المسائل في الحقول المختلفة يمكن أن يعبر عنها كمسائل برمجة خطية ، أو يتم تقريبها إلى مسائل برمجة خطية. كما أن طرائق حل المسائل الخطية دقيقة ومتاحة. وأخيرًا فإنه يسهل تحليل الحساسية في حالة مسائل البرمجة الخطية كما سوف نوضح ذلك في أبواب لاحقة. فيما يلي ، نعطي تعريفًا دقيقًا للبرمجة الخطية ولكننا نحتاج في البداية أن نقوم بتعريف الدالة الخطية.

تعريف (١,١): الدالة الخطية Linear Function

تكون الدالة $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *خطية* إذا حققت الشرطين التاليين :

١. $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ $\quad f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y})$

٢. $\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}$ $\quad f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$

وبشكل عام فإن الدالة $f(x_1,\ldots,x_n)$ تكون خطية إذا وإذا فقط وجد $c_1,c_2,\ldots,c_n \in \mathbb{R}$ بحيث :

$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

إذا كانت الدالة f خطية، وكانت $b \in \mathbb{R}$ فإن الشرط $f(x_1,...,x_n) = b$ يسمى معادلة خطية (linear equality)، في حين أن الشرط $f(x_1,...,x_n) \geq b$ (أو $f(x_1,...,x_n) \leq b$) يسمى متراجحة خطية (linear inequality).

نأخذ الآن مثالاً مبسطًا لمسألة برمجة رياضية عامة (mathematical programming problem) ونقوم بتحديد دالة الهدف وكذلك القيود من خلال هذا المثال.

مثال (١,١)

لنعتبر المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \text{Maximize} \quad & z = 2x_1 + 3x_2 \\ \text{subject to} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0, \end{aligned}$$

هذه المسألة تمثل مسألة برمجة رياضية وتسمى الدالة $z = 2x_1 + 3x_2$ ***دالة الهدف*** (objective function) وهي الدالة المطلوب إيجاد القيمة العظمى لها، والمتراجحتان $x_1 + x_2 \leq 6$ و $2x_1 + 3x_2 \leq 4$ قيدان (constraints) وأخيرًا يسمى الشرط $x_1, x_2 \geq 0$ شرط الإشارة (sign restriction). في الفصول التالية سوف ندخل شرط الإشارة ضمن القيود. □

في بعض الحالات لا يكون شرط الإشارة موجودًا، أي أنه من الممكن للمتغير x_i أن يأخذ أي قيمة موجبة، سالبة أو صفر، وفي هذه الحالة يكون هذا المتغير ***غير محدد الإشارة*** (unrestricted in sign). إذا كان x غير محدد الإشارة فإننا نستطيع كتابة x بالصورة التالية: $x = x' - x''$ حيث $x', x'' \geq 0$.

بعد هذه المقدمة، نورد الآن تعريفًا لمسألة البرمجة الخطية.

تعريف (١,٢): مسألة البرمجة الخطية Linear Programming Problem

مسألة البرمجة الخطية هي محاولة إيجاد القيمة العظمى (أو الصغرى) لدالة خطية بحيث تكون جميع القيود معادلات خطية أو متراجحات خطية. بالإضافة لذلك فإن أي متغير لابد أن يكون غير سالب أو غير محدد الإشارة.

بناء على تعريف (١,٢)، فإن المسألة في المثال (١,١) هي مسألة برمجة خطية. وبشكل عام فإنه من الممكن كتابة الصيغة العامة لمسألة البرمجة الخطية التي تتكون من n من المتغيرات و m من القيود بالشكل التالي:

$$\begin{aligned} \max\ & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\ \text{s.t.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\ & \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\ \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\ & \qquad x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0 \end{aligned}$$

حيث $a_{ij}, b_i, c_j \in \mathbb{R}$ لكل $i = 1,\dots,m; j = 1,\dots,n$. ويمكن كتابة هذه المسألة بالصورة المختصرة:

$$\begin{aligned} \max\ & z = \mathbf{c}^T\mathbf{x} \\ \text{s.t.}\ & A\mathbf{x} \le \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \ge \mathbf{0} \end{aligned}$$

حيث $\mathbf{c}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ، $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ ، و A عبارة عن مصفوفة من النوع $m \times n$. في بعض الحالات قد تكون المسألة مسألة قيمة صغرى "min" بدلاً من كونها مسألة قيمة عظمى "max" ، كما أن بعض القيود قد تكون بالصورة $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \ge b_i$ أو $a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n = b_i$.

(١,٣) مسائل يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية
Problem situations to which LP Methods Apply

هناك العديد من المسائل التطبيقية التي يمكن حلها باستخدام البرمجة الخطية. ومن المفيد أن نتعرف على عينة من هذه المسائل. في هذا الفصل نعطي بعض الأمثلة على مسائل يمكن صياغتها على شكل مسائل برمجة خطية كمسائل الإنتاج وتقليل التكلفة، وغيرها.

١- مسألة الإنتاج A Product-Mix Problem

يتخصص مصنع أثاث بإنتاج الكراسي والطاولات ويملك المصنع كمية محدودة من المصادر اللازمة لإنتاجها. يرغب المصنع في معرفة الكمية التي ينبغي إنتاجها من كل نوع لكي يحقق أكبر ربح ممكن (maximum profits).

٢- مسألة تقليل التكلفة A Cost-Minimization Problem

تود إدارة الخدمات في إحدى المؤسسات تأمين وجبة غذائية تتكون من نوعين من الفواكه، موز وتفاح. كل نوع يحتوي على كمية محدودة من فيتامين A وكمية محدودة من فيتامين C. وترغب الإدارة في أن تحتوي الوجبة على كمية معينة من كل نوع من الفيتامينين بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن.

٣- مسألة ميزانية الإعلانات An Advertising-Budget Problem

تمتلك شركة مبلغًا معينًا ترغب في توظيفه في الإعلانات للسنة القادمة. وهناك عدة وسائل إعلام يمكن للشركة أن تعلن فيها كالجرائد، والمذياع، والتلفاز. وتهتم الشركة بعدد الزبائن، ونوعية الزبائن (ربات بيوت، طلاب جامعة، مدرسين، موظفين). كل طريقة من طرائق الإعلان تستطيع أن تصل إلى

شريحة معينة من الناس وعدد محدود. السؤال هو: كيف تستطيع الشركة أن تقسم الميزانية المخصصة للإعلان على وسائل الإعلام بحيث تصل إلى أكبر عدد ممكن من الشريحة أو الشرائح التي ترغب الشركة الوصول إليها باستخدام وسائل إعلام متعددة؟

٤ - مسألة النقل A Transportation Problem

تمتلك شركة مخزنين للبضائع وترغب في توزيعها على ثلاثة عملاء. تحسب تكلفة نقل البضائع حسب بعد العميل عن المخزن. وتبحث الشركة عن أفضل طريقة لنقل البضائع بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن.

٥ - مسألة التوظيف (أو التعيين) An Assignment Problem

يعمل أربعة محررين في إحدى المجلات لعدد محدود من الساعات كل شهر، ولدى رئيس التحرير أربعة مقالات يرغب في تحريرها، علمًا أن كل محرر يستطيع أن يحرر أي مقال. يدفع رئيس التحرير مبلغاً ثابتاً لكل محرر عن كل ساعة يقضيها في التحرير، ويختلف هذا المبلغ حسب المحرر وحسب نوعية المقال. المطلوب تحديد محرر لكل مقال بحيث تكون التكلفة أقل ما يمكن.

(١,٤) صياغة مسائل البرمجة الخطية
Formulation of LP Problems

نورد تحت هذا العنوان عددًا من المسائل التطبيقية التي كثيرًا ما ترد في حياتنا اليومية أو في بعض التطبيقات الصناعية ونقوم بتحويل هذه المسائل إلى مسائل برمجة خطية يسهل حلها باستخدام بعض الطرائق التي سوف نتطرق إليها في أبواب قادمة.

لكي نقوم بصياغة المسائل التطبيقية على شكل مسائل برمجة خطية يلزم القيام بالخطوات الثلاث التالية :

١- تحديد متغيرات القرار (decision variables).

٢- تحديد دالة الهدف وكتابتها كدالة خطية في متغيرات القرار. وهذه الدالة هي التي نبحث عن أكبر قيمة أو أصغر قيمة لها.

٣- تحديد جميع القيود في المسألة وكتابتها كمعادلات أو متراجحات خطية في متغيرات القرار.

سوف نقوم بتوضيح هذه الخطوات الثلاث عن طريق صياغة عدد من مسائل البرمجة الخطية والتي نبدؤها بالمثال التالي :

مثال (١,٢)

تقوم مطبعة بطباعة نوعين من الكتب هما : كتب البرمجة الخطية ، وكتب البرمجة غير الخطية. تكلفة الورق لكتاب البرمجة الخطية ٣ ريالات ولكتاب البرمجة غير الخطية ٤ ريالات. يستهلك كتاب البرمجة الخطية كميه من الحبر تكلفتها ٨ ريالات ، ويستهلك كتاب البرمجة غير الخطية ١٠ ريالات من الحبر. ربح المطبعة من الكتاب الأول ٢٠ ريالاً ومن الكتاب الثاني ٢٥ ريالاً ، وتملك المطبعة كمية من الورق بقيمة ٢٠٠ ريال وكمية من الحبر بقيمة ٤٠٠ ريال. تهدف المطبعة لتحقيق أكبر كمية ربح ممكنة عن طريق تحديد عدد الكتب الأمثل من كل نوع. أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية.

الحل

الطريقة المنطقية للتفكير في هذا السؤال تكمن في قراءة متأنية للمعطيات. لنراجع المعطيات المطروحة في هذا السؤال. هناك نوعان من الكتب تقوم المطبعة بطباعتهما ،

كتب البرمجة الخطية ويربح المصنع من كل واحدٍ منها ٢٠ ريالاً ؛ وكتب البرمجة غير الخطية يربح المصنع من كل واحدٍ منها ٢٥ ريالاً.

هناك مصدران مهمان لطباعة الكتب : المصدر الأول الورق ، والمصدر الثاني الحبر. وتملك المطبعة كمية محدودة من هذين المصدرين. في حالة استخدام معظم هذين المصدرين لطباعة كتب البرمجة الخطية ، نجد أن هذا سوف يحد من قدرة المطبعة على طباعة كتب البرمجة غير الخطية. وبالمثل لو استخدمت معظم هذه المصادر لطباعة كتب البرمجة غير الخطية فإن هذا سوف يقلل الكمية المطبوعة من كتب البرمجة الخطية.

الخطوة الأولى لصياغة هذه المسألة هي التفكير في الهدف الذي يسعى إليه صانع القرار في المطبعة. فمن الواضح أن صانع القرار يهدف إلى الحصول على أعلى كمية ربح من بيعه للكتابين.

بعد أن أخذنا صورة إجمالية عن المسألة السابقة نستطيع الآن صياغتها على شكل مسألة برمجة خطية ؛ وذلك عن طريق تحديد متغيرات القرار ، ثم دالة الهدف والقيود كدوال خطية في متغيرات القرار.

متغيرات القرار Decision Variables

عند صياغة أي مسألة برمجة خطية فإنه يلزم في البداية وصف متغيرات القرار ***وصفًا دقيقًا***. من الواضح أن المطلوب في هذه المسألة تحقيق أكبر كمية ممكنة من الربح. ولتحقيق ذلك ينبغي تحديد عدد الكتب التي يجب إنتاجها من كل نوع ؛ لذلك نقوم بتعريف متغيرات القرار x_1, x_2 كما يلي :

$x_1 :=$ عدد كتب البرمجة الخطية

$x_2 :=$ عدد كتب البرمجة غير الخطية

ملاحظة

عند وصفنا لمتغيرات القرار، لا معنى لقولنا إن x_1 هي كتب البرمجة الخطية؛ وذلك لأن x_1 في هذا المثال تحدد عدد الكتب وليس الكتب بذاتها.

دالة الهدف Objective Function

نبحث الآن عن الهدف الذي تسعى إليه المطبعة، وهو تحقيق أكبر ربح ممكن. في هذا المثال نعرف دالة الهدف z بأنها الربح الإجمالي(total profit) الذي تحصل عليه المطبعة من الكتب المباعة. ولأن المطبعة تربح في كل كتاب من كتب البرمجة الخطية مبلغ ٢٠ ريالاً، وعدد كتب البرمجة الخطية هو x_1 فيكون ربح المطبعة من كتب البرمجة الخطية المطبوعة $20x_1$، بينما تربح المطبعة من كتب البرمجة غير الخطية $25x_2$. إذًا الربح الإجمالي لمبيعات الكتب سوف يكون عبارة عن مجموع أرباح كتب البرمجة الخطية وكتب البرمجة غير الخطية، وبناء على ذلك فإن دالة الهدف تأخذ الشكل التالي:

$$z := 20x_1 + 25x_2 \quad \text{" الربح الإجمالي للكتب المباعة "}$$

وبما أن المطلوب هو زيادة الربح الإجمالي، إذًا المطلوب إيجاد أكبر قيمة ممكنة لدالة الهدف وبذلك تكون المسألة مسألة قيمة عظمى. أي أن المطلوب إيجاد:

$$\max z := 20x_1 + 25x_2$$

القيود Constraints

هناك نوعان من القيود تواجههما المطبعة ويمثلان حدًا على الربح الإجمالي للمطبعة: القيد الأول ثمن الورق، والقيد الثاني كمية الحبر.

القيد الأول: ثمن الورق

نعلم من خلال المسألة أن ثمن الورق لا يمكن أن يزيد عن ٢٠٠ ريال. وبما أن كتاب البرمجة الخطية يكلف ٣ ريالات من الورق، إذًا تكلفة الورق لكتب البرمجة الخطية تساوي $3x_1$. أما تكلفة الورق لكتب البرمجة غير خطية فإنها تساوي $4x_2$ ؛ لأن كتاب البرمجة غير الخطية يكلف ٤ ريالات من الورق. إذًا التكلفة الإجمالية للورق تساوي $3x_1 + 4x_2$. وحيث أن التكلفة الإجمالية لا يمكن أن تتعدى ثمن الورق الذي تمتلكه المطبعة ؛ لذا فإنه يمكن صياغة القيد الأول بالشكل التالي :

$$3x_1 + 4x_2 \le 200 \qquad \text{" التكلفة الإجمالية للورق "}$$

القيد الثاني: ثمن الحبر

نعلم أن ثمن الحبر الذي يمكن استخدامه للتصوير لا يمكن أن يزيد عن مبلغ ٤٠٠ ريال. ولأن تكلفة الحبر للكتب من النوع الأول تساوي عددها مضروبًا في قيمة التكلفة للكتاب الواحد ؛ إذًا قيمة الحبر المستهلكة في الكتب من النوع الأول تساوي $8x_1$ وبالنسبة للكتب من النوع الثاني فإن قيمة الحبر تساوي $10x_2$. إذًا الشرط الثاني يصبح :

$$8x_1 + 10x_2 \le 400 \qquad \text{" التكلفة الإجمالية للحبر "}$$

هناك قيد ثالث وهو أن عدد الكتب لابد أن يكون غير سالب ، أي أن :

$$x_1, x_2 \ge 0$$

الصيغة النهائية A Formal Statement of the Model

الآن أصبحت جميع المعطيات واضحة لكتابة الصيغة النهائية لمسألة البرمجةالخطية ، والتي نستطيع تلخيصها كالتالي :

$$\max\ z := 20x_1 + 25x_2$$ "الربح الإجمالي"

$x_1 :=$ عدد كتب البرمجة الخطية

$x_2 :=$ عدد كتب البرمجة غير الخطية

Subject to

$$3x_1 + 4x_2 \le 200$$ " التكلفة الإجمالية للورق "

$$8x_1 + 10x_2 \le 400$$ " التكلفة الإجمالية للحبر "

$$x_1, x_2 \ge 0$$

أو باختصار:

$$\begin{aligned} \max\ z &:= 20x_1 + 25x_2 \\ \text{s.t.}\ \ 3x_1 + 4x_2 &\le 200 \\ 8x_1 + 10x_2 &\le 400 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

□

تحت العنوانين التاليين نقوم بدراسة بعض النماذج الخاصة والتي يمكن تحويلها إلى مسائل برمجة خطية بطريقة مشابهة للمثال السابق.

(١,٤,١) مسألة الإنتاج

Production Problem

في هذا النوع من المسائل، يقوم مصنع بإنتاج n من الأصناف، ويحتاج المصنع إلى m من المصادر. كل صنف من المنتجات يحتاج إلى كمية معينة من هذه المصادر، كما أن كمية المصادر المتاحة محدودة. يهدف المصنع إلى تحقيق أكبر ربح ممكن. المثال التالي عبارة عن مسألة إنتاج.

مثال (١,٣)

ينتج مصنع خشب نوعين من الطاولات، يتطلب إنتاج طاولة واحدة من النوع الأول ٤ ساعات عمل و ٥ كجم من الخشب ويتطلب إنتاج طاولة من النوع الثاني ٦ ساعات عمل و ٣ كجم من الخشب. أوجد الصياغة المناسبة لهذه المسألة على شكل مسألة برمجة خطية، إذا علمت أن الأرباح العائدة من هذين النوعين هي ٧ و ٨ ريالات على التوالي وأن إمكانات المصنع هي ١٢٠ ساعة عمل أسبوعيًا و ١٠٠ كجم من الخشب، ويريد المصنع تحقيق أكبر كمية ممكنة من الأرباح.

الحل

في هذا المثال نهدف للحصول على أكبر كمية ممكنة من الربح في الأسبوع. وعليه فهذه المسألة عبارة عن مسألة قيمة عظمى "max". الخطوة الأولى لصياغة هذه المسألة هي تعريف متغيرات القرار كما يلي:

$x_1 :=$ عدد الطاولات المنتجة أسبوعيًا من النوع الأول

$x_2 :=$ عدد الطاولات المنتجة أسبوعيًا من النوع الثاني

دالة الهدف في هذه الحالة هي ربح المصنع من الطاولات المباعة أسبوعيًا. واضح أن المصنع يربح $7x_1$ ريالا من النوع الأول و $8x_2$ ريالا من النوع الثاني. ومن ثم تكون دالة الهدف في هذه الحالة:

$$z := 7x_1 + 8x_2 \qquad \text{"ربح المصنع الأسبوعي من الطاولات المباعة"}$$

نبحث الآن القيود المفروضة على دالة الهدف من حيث عدد ساعات العمل وكمية الخشب. بالنسبة لعدد ساعات العمل، نجد أن الطاولة الأولى تحتاج إلى ٤ ساعات، بينما تحتاج الطاولة الثانية إلى ٦ ساعات عمل. إذًا المجموع الكلي لعدد

ساعات العمل هو $4x_1 + 6x_2$ ساعة. ولأن عدد ساعات العمل الممكنة خلال أسبوع يساوي 120 ، إذًا القيد الأول على ساعات العمل يصبح

$$4x_1 + 6x_2 \leq 120 \qquad \text{"عدد ساعات العمل أسبوعيًا"}$$

أما من حيث كمية الخشب، فنجد أن الطاولة الأولى تحتاج إلى ٥ كجم من الخشب، بينما تحتاج الطاولة الثانية إلى ٣ كجم من الخشب. إذًا كمية الخشب الكلية تساوي $5x_1 + 3x_2$ كجم. ولأن كمية الخشب المتاحة 100 كجم، إذًا القيد الثاني يمكن كتابته بالصورة التالية:

$$5x_1 + 3x_2 \leq 100 \qquad \text{" كمية المواد الأولية"}$$

من الواضح أن عدد الطاولات لا يمكن أن يكون سالبًا، ومن ثم فإن:

$$x_1, x_2 \geq 0$$

فتكون الصيغة النهائية للمسألة:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 7x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t} \quad & 4x_1 + 6x_2 \leq 120 \\ & 5x_1 + 3x_2 \leq 100 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

□

(١,٤,٢) مسألة التغذية

Diet Problem

في هذا النوع من المسائل، يرغب أحد الأشخاص في تأمين وجبة غذائية من قائمة تحتوي على n من أصناف الأطعمة، بحيث تحتوي الوجبة على كميات معينة من

كل فيتامين (m من أنواع الفيتامينات)، ويرغب أن تكون تكلفة الوجبة أقل ما يمكن. المثال التالي يوضح كيفية صياغة مسائل التغذية :

مثال (١,٤)

يود أحد المرضى أن يحدد محتويات وجبته الغذائية بحيث تحتوي الوجبة على كميات معينه من فيتامينات A, C, D وهناك ثلاثة أنواع من الأغذية المتاحة وهي تفاح، وموز، وتمر. يحتوي كل نوع من هذه الأغذية على جميع أنواع الفيتامينات، ويوضح الجدول (١.١) كمية الفيتامين بالجرام الموجودة في ١ كجم من كل نوع، وكذلك كمية الفيتامين الواجب توفرها، وتكلفة الكيلوجرام لكل نوع من أنواع الأغذية.

جدول (١,١).

الفيتامين	كمية الفيتامين في 1 كجم			كمية الفيتامين الواجب توفرها
	تفاح	موز	تمر	
A	5	2	10	30
C	3	6	2	35
D	5	7	9	20
تكلفةالكيلو	5	4	8	

ما هي كمية الطعام التي يمكن للمريض تناولها بحيث تكون تكلفتها أقل ما يمكن؟ أوجد الصيغة الرياضية لهذه المسألة.

الحل

قد تبدو هذه المسألة من الوهلة الأولى مختلفة تمامًا عن المسائل السابقة، ولكن الواقع أن الفكرة واحدة. في هذه المسألة كان السؤال عن التكلفة والمطلوب تقليل هذه

التكلفـة ؛ إذًا المسألة هنـا عبـارة عـن مـسألة قيمـة صـغرى "min". نعـرف في البدايـة متغيرات القرار على النحو التالي :

$x_1 :=$ كمية التفاح بالكيلوجرام

$x_2 :=$ كمية الموز بالكيلوجرام

$x_3 :=$ كمية التمر بالكيلوجرام

بعد ذلك نقوم بتعريف دالة الهدف وهي عبارة عن التكلفة الإجمالية للفاكهـة ، ونلاحظ هنا أن تكلفة التفاح تساوي $5x_1$ ، وتكلفة الموز $4x_2$ ، أما تكلفـة التمـر فهـي $8x_3$. إذًا التكلفة الإجمالية هي :

$$z := 5x_1 + 4x_2 + 8x_3$$

وبمـا أن الكمية الواجب وجودهـا مـن فيتـامين A هـي ٣٠ جـرام علـى الأقـل ، وكميـة هـذا الفيتـامين في التفـاح هـي $5x_1$ وفي المـوز $2x_2$ وفي التمـر $10x_3$ ، فيـصبح الشرط على فيتامين A :

$$5x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 30$$

وبالمثل يكون الشرط على فيتامين C :

$$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 35$$

وأخيرًا فإن الشرط على فيتامين D يمكن صياغته بالشكل التالي :

$$5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \geq 20$$

من الواضح أن جميع الكميات غير سالبة ، إذًا :

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

وتصبح الصيغة النهائية للمسألة :

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 5x_1 + 4x_2 + 8x_3 \\ \text{s.t} \quad & 5x_1 + 2x_2 + 10x_3 \geq 30 \\ & 3x_1 + 6x_2 + 2x_3 \geq 35 \\ & 5x_1 + 7x_2 + 9x_3 \geq 20 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

□

الواقع أن هناك العديد من المسائل الأخرى والتي يمكن تحويلها إلى مسائل برمجة خطية. فعلى سبيل المثال هناك مسألة النقل (the transportation problem) وهناك أيضًا مسألة التوظيف (the assignment problem). هذه المسائل سوف نتطرق إليها بشكل أكثر عمقاً في الفصل الثامن من هذا الكتاب.

تمارين الفصل الأول

(١,١) بين هل مسائل البرمجة الرياضية التالية خطية أم لا. مع ذكر السبب.

-١

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2^2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 + 4x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

-٢

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \cos x_1 + x_2^2 \le 2 \\ & x_1 + 4\sin x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

-٣

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1 + 4x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(١,٢) تستورد مصفاة بترول نوعين من الزيت الخام، أحدهما خفيف وسعره ٤٠ دولارًا للبرميل والآخر ثقيل وسعره ٣٠ دولارًا للبرميل. تنتج هذه المصفاة غازولين، وزيتًا، وبنزينًا بكميات للبرميل الواحد موضحة حسب الجدول (١,٢). تعاقدت المصفاة مع إحدى الجهات لتزويدها بكمية ١٠٠,٠٠٠ برميل من الغازولين و ٢٠٠,٠٠٠ برميل من الزيت و ٣٠٠,٠٠٠ برميل من البنزين. تود المصفاة معرفة كمية الزيت الخام التي يجب أن تستوردها لتلبي الكمية المطلوبة بأقل تكلفة. أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة على شكل مسألة برمجة خطية.

جدول (١,٢)

	غازولين	زيت	بنزين
زيت خفيف	0.2	0.3	0.1
زيت ثقيل	0.1	0.2	0.4

(١,٣) يقوم محل عصير بإنتاج ثلاثة أنواع من العصير: عصير برتقال، وعصير تفاح، وعصير ليمون. يحتاج صنع كأس من عصير البرتقال إلى ٠,٣ كجم من البرتقال وملعقتي سكر، بينما يحتاج صنع كأس من عصير التفاح إلى ٠,٤ كجم من التفاح و ملعقة سكر، وأخيرًا يحتاج صنع كأس من عصير الليمون إلى ٠,٢ كجم من الليمون و ٤ ملاعق سكر. يقوم المحل يوميًا بشراء ١٠ كجم من البرتقال، و١٢ كجم من التفاح، و٨ كجم من الليمون، وكيس سكر يحتوي على ٤٠٠ ملعقة. كما أن صاحب المحل لا يرغب في إنتاج أكثر من ١٥ كأساً من عصير الليمون. أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية، إذا علمت أن ربح المحل من كأس عصير البرتقال ٤ ريالات، ومن عصير التفاح ٥ ريالات، ومن عصير الليمون ٣ ريالات. ويهدف المحل إلى تحقيق أكبر كمية ربح ممكنة.

(١,٤) يقوم مصنع بإنتاج ٣ أنواع من السيارات. كل سيارة تحتاج إلى كمية معينة من المواد الخام وعدد ساعات محدد كل أسبوع وفقًا للجدول (١,٣).

جدول (١,٣)

النوع	سعر المواد الخام	عدد الساعات	تكلفة الإنتاج	سعر البيع
الأول	20,000	10	50,000	70,000
الثاني	30,000	15	66,000	80,000
الثالث	55,000	20	90,000	120,000

إذا علمت أن المصنع يملك ما قيمته ١,٠٠٠,٠٠٠ من المواد الخام ويمكنه العمل ١٢٠ ساعة أسبوعيا. فأوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة بحيث يكون مجموع الربح الصافي أكبر ما يمكن. (إرشاد: الربح = سعر البيع – تكلفة الإنتاج).

(١,٥) يقوم أحد المخابز بإنتاج نوعين من الخبز، شرائح ومفرود. يحتاج رغيف الشرائح إلى ١٠٠ جرام من الطحين و ٠,١ من العمال لكل ساعة، ويحتاج رغيف المفرود على ٢٠٠ جرام من الطحين و ٠,٢ من العمال لكل ساعة. فإذا كان لدى المخبز ٩٠ كجم من الطحين، و ٢٠٠ عامل لكل ساعة في اليوم، وكانت أرباح المخبز في رغيف الشرائح ٠,٣ من الريالات وفي رغيف المفرود ٠,٤. أوجد صياغة مناسبة للمسألة السابقة كمسألة برمجة خطية إذا علمت أن المخبز يبحث عن أكبر ربح ممكن.

(١,٦) تقوم مؤسسة كيميائية بإنتاج نوعين من المواد الكيميائية السائلة A و B. يكلف إنتاج لتر من المادة A مبلغ ٣ ريالات ويكلف إنتاج لتر من المادة B مبلغ ٥ ريالات. في كل أسبوع ترغب المؤسسة إنتاج ١٠ لترات على الأقل من المادة A و ٧ لترات على الأقل من المادة B. إنتاج هذه المواد الكيميائية يحتاج إلى مادة أولية، يملك منها المصنع ١٠٠ جرام. تحتاج المادة A إلى ٤ جرامات من المادة الأولية، و تحتاج المادة B إلى ٦ جرامات من المادة الأولية. كم لترًا من المواد A و B ينبغي للمؤسسة أن تقوم بإنتاجه بحيث تكون تكلفته أقل ما يمكن وبحيث تستخدم المؤسسة جميع ما لديها من المادة الأولية؟ أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة.

(١,٧) يلزم محمد دفع ١٢ جراماً من الذهب و ١٨ جراماً من الفضة شهريًا مقابل شقة استأجرها. لكي يحصل محمد على الذهب والفضة، يوجد هناك منجمان يحتويان على الذهب والفضة. كل يوم يقضيه محمد في المنجم الأول يجد فيه جرامين من الذهب و

جرامين من الفضة. وفي كل يوم يقضيه محمد في المنجم الثاني فإنه يجد جراماً واحداً من الذهب و ٣ جرامات من الفضة. أوجد صيغة مناسبة لهذه المسألة بحيث يقضي محمد أقل وقت ممكن في المناجم.

الفصل الثاني

حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم

Graphical Method for Solving LP

- **أساسيات هندسية**
- **منطقة الحل والحل الأمثل**
- **رسم منطقة الحل (Ω)**
- **حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم**
- **حالات خاصة**

في الفصل الأول ألقينا الضوء على بعض الأمثلة لمسائل تطبيقية يمكن صياغتها كمسائل برمجة خطية. الخطوة التالية بعد أن حصلنا على مسألة برمجة خطية، أن نقوم بحل هذه المسألة لإيجاد القيمة العظمى إذا كانت المسألة مسألة قيمة عظمى "max"، أو القيمة الصغرى إذا كانت المسألة مسألة قيمة صغرى "min".

في هذا الفصل نبين كيف يمكن استخدام الرسم لإيجاد حل لمسألة البرمجة الخطية. في البداية، نقوم بدراسة بعض الخواص الهندسية للمجموعات ثم نبين كيف يمكن استخدام هذه الخواص لحل مسائل البرمجة الخطية والتي تحتوي على متغيرين حلاً هندسيًا. لحل هذه المسائل باستخدام الرسم يلزمنا عمل الخطوتين التاليتين:

١- تحديد منطقة الحل والتي تحقق جميع القيود.

٢- إيجاد الحل الأمثل من بين جميع النقاط الموجودة في منطقة الحل.

كما يمكننا من خلال الرسم تحديد ما إذا كان هناك حل للمسألة أم لا؟ وهل هذا الحل محدود؟ وهل الحل وحيد؟

الواقع أن حل المسائل باستخدام الرسم ليس الطريقة المثلى لحل الأمثلة التطبيقية، والسبب أن معظم الأمثلة التطبيقية تحتوي على أكثر من متغيرين. ولكن تفيد طريقة الرسم كثيرًا في إعطاء فكرة واضحة عن طريقة حل المسألة الخطية، وتجعل من السهل على القارئ فهم الطريقة الجبرية التي سوف نتحدث عنها في الفصل الثالث.

(٢,١) أساسيات هندسية
Geometric Principles

تحت هذا العنوان نتطرق لبعض المفاهيم الهندسية المهمة، حيث نبدأ بتعريف المجموعة المحدبة ونبين بعض خواصها مع إعطاء بعض الأمثلة على المجموعات المحدبة. ثم نعطي تعريفًا لكل من المستوى الفوقي والمجسم المضلع ونبين علاقة هذه المفاهيم بقيود مسألة البرمجة الخطية. وأخيرًا، نبين معنى النقاط الحدية والتي تلعب دورًا مهمًا في حل مسائل البرمجة الخطية.

(٢,١,١) المجموعة المحدبة
Convex Set

سنقوم بتعريف حالة خاصة من المجموعات، وهي ما تعرف بالمجموعات المحدبة، والتي سوف تكون لها أهمية كبرى في حل مسائل البرمجة الخطية.

تعريف (٢,١): المجموعة المحدبة Convex Set

تكون المجموعة **S** محدبة إذا حققت الشرط التالي:

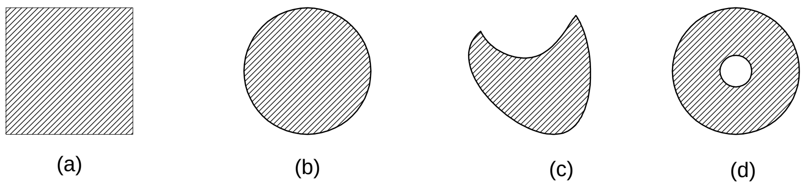
لكل نقطتين موجودتين في **S**، فإن القطعة المستقيمة الواصلة بينهما تقع كليا في **S**، أي أنه:

$$\forall\ \mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{S}: (1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y}\in\mathbf{S},\quad \forall\ \alpha\in[0,1]$$

نأخذ الآن مثالاً لبعض المجموعات ونحدد ما إذا كانت المجموعة محدبة أم غير محدبة.

مثال (٢,١)

في الشكل (٢,١)، المجموعتان (a)، و (b) محدبتان؛ وذلك لأن أي قطعة مستقيمة تربط نقطتين في **S**، فهي تقع كليًا داخل **S**. في حين أن المجموعتين (c)، و(d) غير محدبتين. (لماذا ؟) □



شكل (٢,١)

ملاحظة

في بعض الكتب يرمز للقطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{S}$ بالرمز $[\mathbf{x},\mathbf{y}]$. والتي تعرف كالتالي:

$$[\mathbf{x},\mathbf{y}]=\{\mathbf{v}\mid \mathbf{v}:=(1-\alpha)\mathbf{x}+\alpha\mathbf{y},\ \alpha\in[0,1]\}.$$

المبرهنة التالية تعطينا طريقة سهلة للحصول على مجموعات محدبة من مجموعات أخرى.

مبرهنة (٢,١): المجموعة المحدبة Convex Set

إذا كانت $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2 \subset \mathbb{R}^n$ مجموعتين محدبتين، وكان $k \in \mathbb{R}$ ، فإن المجموعات التالية جميعها محدبة:

١- $k\,\mathbf{S}_1 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = ks,\ s \in \mathbf{S}_1\}$

٢- $\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2 = \{\mathbf{x} : \mathbf{x} = s_1 + s_2,\ s_1 \in \mathbf{S}_1,\ s_2 \in \mathbf{S}_2\}$

٣- $\mathbf{S}_1 \bigcap \mathbf{S}_2$

البرهان

برهان الأجزاء الثلاثة يأتي مباشرة من تعريف المجموعة المحدبة (٢,١)، وهو متروك للقارئ. □

(٢,١,٢) المستوى الفوقي والجسم المضلع
Hyperplane and Polyhedron

يعد المستوى الفوقي (hyperplane) أحد أنواع المجموعات المحدبة، ويعتبر تعميمًا لمفهوم المستقيم (line) في الفضاء الثنائي $\mathbb{R}^2$ والمستوى (plane) في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$. حتى نقوم بتعريف المستوى الفوقي، نعطي في البداية تعريف المتعدد الخطي (linear variety).

تعريف (٢,٢): المتعدد الخطي Linear Variety

تكون المجموعة $V \subset \mathbb{R}^n$ *متعددا خطيا* إذا كان لكل $v_1, v_2 \in V$ فإن:

$$\lambda v_1 + (1-\lambda) v_2 \in V\,, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

يتضح من تعريف المتعدد الخطي أن الفرق الوحيد بينه وبين المجموعة المحدبة أن المتعدد الخطي يحتوي على المستقيم الواصل بين أي نقطتين بينما تحتوي المجموعة المحدبة على القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين. فمثلاً، في الفضاء الثلاثي $\mathbb{R}^3$ ، نجد أن المتعددات الخطية غير الخالية هي: النقاط، والمستقيمات، والمستوى الثنائي، وكذلك كامل الفضاء $\mathbb{R}^3$.

نستطيع الآن أن نتكلم عن بُعد الفضاء (dimension) للمتعدد الخطي V ويرمز له بالرمز $\dim(V)$. فعلى سبيل المثال، النقطة هي متعدد خطي ذو بُعد يساوي صفراً. أما المستقيم فهو متعدد خطي ذو بعد يساوي واحداً. وبشكل عام فإننا نستطيع تحديد بُعد المتعدد الخطي بتحريكه بحيث يحتوي على نقطة الأصل ثم تحديد بُعد المجموعة الناتجة والتي تعتبر فضاء جزئيًا (subspace) من $\mathbb{R}^n$ (يكون L فضاء جزئيًا من $\mathbb{R}^n$ إذا كان لكل $\mathbf{m},\mathbf{n} \in L,\ r \in \mathbb{R}$ فإن $\mathbf{m} + r\,\mathbf{n} \in L$). الآن وبعد هذه المقدمة عن المتعدد الخطي نقوم بتعريف المستوى الفوقي.

تعريف (٢,٣): المستوى الفوقي Hyperplane

يعرف *المستوى الفوقي* H في $\mathbb{R}^n$ بأنه متعدد خطي ذو بعد يساوي $n-1$. أي أن:

$$\dim(H) = n - 1$$

وبشكل عام فإن المستوى الفوقي هو أكبر متعدد خطي فعلي في $\mathbb{R}^n$. بعد أن اتضحت الصورة الهندسية للمستوى الفوقي، نعرف الآن المستوى الفوقي من الناحية الجبرية.

مبرهنة (٢,٢)

إذا كان $0 \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ، وكان $c \in \mathbb{R}$ فإن:

$$H := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = c\}$$

عبارة عن مستوى فوقي في $\mathbb{R}^n$.

البرهان

لتكن $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in H$ ، أي أن $\mathbf{a}^T \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}^T \mathbf{x}_2 = c$ ، إذًا $\mathbf{a}^T (\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2) = c$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$. وبناء عليه فإن $\lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \in H$ لكل $\lambda \in \mathbb{R}$. من هنا نستنتج أن H تمثل متعددًا خطيًا. نعرف الآن المجموعة M لتكون المجموعة الناتجة عن تحريك H بمقدار $-\mathbf{x}_1$ ، أي أن:

$$M = H - \mathbf{x}_1 = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_1 : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = c\}.$$

لتكن $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ ، إذا نستطيع كتابة M بالصورة:

$$M = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{y} = 0\}$$

واضح أن M فضاء جزئي من $\mathbb{R}^n$ يحتوي على جميع المتجهات العمودية على $\mathbf{a}$. إذًا نستنتج أن:

$$\dim(M) = n - 1$$

ومن ثم فإن $\dim(H) = n - 1$ ، أي أن H مستوى فوقي في $\mathbb{R}^n$. □

مبرهنة (٢,٣)

إذا كانت H مستوى فوقيًا فإنه يوجد $0 \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ ، وثابت $c \in \mathbb{R}$ بحيث

$$H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T \mathbf{x} = c\}$$

البرهان

لتكن $H \ni \mathbf{x}_1$ ، ولتكن M المجموعة الناتجة من تحريك H بمقدار $-\mathbf{x}_1$ أي أن $M = H - \mathbf{x}_1$. من البرهان السابق أثبتنا أن $\dim(M) = n-1$. ليكن $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ متجهًا عموديًا على M. واضح أن $M = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = 0\}$. لنعرف $c = \mathbf{a}^T\mathbf{x}_1$ ، ولتكن $\mathbf{x}_2 \in H$ ، في هذه الحالة نجد أن $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \in M$ ، أي أن $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}^T\mathbf{x}_1 = 0$ وهذا يقتضي أن $\mathbf{a}^T\mathbf{x}_2 = c$.

إذًا أي عنصر $\mathbf{x} \in H$ ، لا بد أن يحقق $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = c$. إذًا:

$$H \subset \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = c\} =: K$$

ولأن H فضاء فوقي، إذًا $\dim(H) = n-1$ ، ومن البرهان السابق نجد أن $\dim(K) = n-1$ وهذا يعني أن $H = K$. □

بربط المبرهنتين (٢,٢) و (٢,٣)، نجد أن المستوى الفوقي هو مجموعة حل معادلة خطية على الصورة $\mathbf{a}^T\mathbf{x} = c$. نستخدم الآن المستوى الفوقي لبناء نوع آخر من المجموعات المحدبة وهي نصف الفضاء المغلق.

تعريف (٢,٣): نصف الفضاء المغلق Closed Half Spaces

لتكن $0 \neq \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ ، ولتكن $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} = c\}$ مستوى فوقيًا، نعرف *نصف الفضاء المغلق الموجب* H_+ *والسالب* H_- كالتالي:

$$H_+ = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \geq c\}$$

$$H_- = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{a}^T\mathbf{x} \leq c\}$$

واضح أن المجموعتين H_+, H_- محدبتان تقاطعهما H ، واتحادهما الفضاء $\mathbb{R}^n$. الآن نعرف متعدد السطوح والمجسم المضلع واللذين يعتمد تعريفهما على أنصاف الفضاءات المغلقة.

تعريف (٢,٤): متعدد السطوح Polytope

يعرف *متعدد السطوح* بأنه تقاطع لعدد منته من أنصاف الفضاءات المغلقة.

إذا كان متعدد السطوح محدودًا (bounded) فإنه يسمى مجسمًا مضلعًا كما يبين التعريف التالي :

تعريف (٢,٥): المجسم المضلع Polyhedron

يعرف الجسم المضلع بأنه تقاطع محدود لعدد منته من أنصاف الفضاءات المغلقة. أو بصورة أخرى الجسم المضلع هو متعدد سطوح محدود.

(٢,١,٣) النقاط الحدية
Corner Points

في دراستنا للبرمجة الخطية ، هناك نقاط معينة في المجموعة المحدبة لها أهمية بالغة في تحديد حل مسألة البرمجة الخطية ، هذه النقاط هي *النقاط الحدية* (corner points). فيما يلي نعطي تعريفًا للنقاط الحدية.

تعريف (٢,٦): النقاط الحدية Corner Points

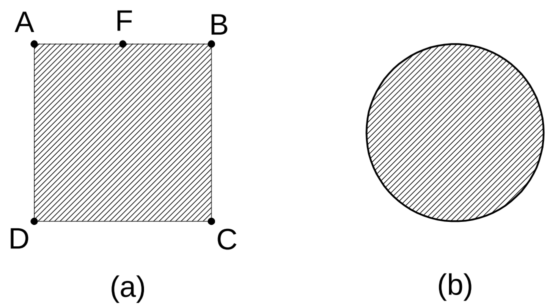
لأي مجموعة محدبة $\mathbf{S}$ ، تكون النقطة $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ نقطة حدية إذا حققت الشرط :

لأي قطعة مستقيمة تقع كليًا داخل $\mathbf{S}$ وتحوي النقطة $\mathbf{s}$ ، فإن النقطة $\mathbf{s}$ طرف لهذه القطعة المستقيمة.

أي أن النقطة $\mathbf{s} \in \mathbf{S}$ تكون نقطة حدية للمجموعة $\mathbf{S}$ ، إذا كان من المستحيل إيجاد نقطتين مختلفتين $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbf{S}$ ، وقيمة $0 < \alpha < 1$ ، بحيث $\mathbf{s} = \alpha \mathbf{s}_1 + (1-\alpha)\mathbf{s}_2$.

مثال (٢,٢)

في الشكل (٢,٢) (a) النقاط A, B, C, D تمثل نقاطاً حدية ، بينما النقطة F ليست نقطة حدية لأن F تقع على القطعة المستقيمة AB والنقطة F ليست طرفًا لهذه القطعة المستقيمة. بينما في شكل (b)، نجد أن النقاط الحدية هي حدود الدائرة. □



شكل (٢,٢)

ملاحظة

لأي مسألة برمجة خطية بـ n من المتغيرات ، فإن النقاط الحدية تنتج عن تقاطع n من القيود على الأقل.

(٢,٢) منطقة الحل والحل الأمثل
Feasible Region and Optimal Solution

حتى نقوم بحل مسألة برمجة خطية يلزمنا في البداية أن نحدد النقاط التي تحقق جميع القيود ثم نختار أفضل قيمة لتكون حلاً للمسألة. فيما يلي نعطي تعريفًا لهذه المفاهيم.

تعريف (٢,٧): منطقة الحل Feasible Region (Ω)

تعرف منطقة الحل (Ω) في مسألة البرمجة الخطية بأنها مجموعة النقاط التي تحقق جميع القيود.

ملاحظة

منطقة الحل قد لا تحتوي على أي نقطة، أي أنه من الممكن أن تكون $\Omega = \phi$.
وفي هذه الحالة لا يوجد أي نقطة تحقق جميع القيود.

المثال التالي يعطي فكرة مبسطة عن منطقة الحل من خلال تحديد ما إذا كانت نقطة معطاة داخل منطقة الحل أم لا. أما تحديد منطقة الحل تحديدًا دقيقًا فتتم مناقشته في فصول تالية.

مثال (٢,٣)

لنأخذ مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad & x_1 + x_2 \le 5 \\ & 2x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

في هذه المسألة نجد أن النقطة $(1,1)$ ، تحقق جميع القيود الأربعة ؛ لذا فهي تقع داخل Ω. بينما لا تحقق النقطة $(3,4)$ القيد الأول، فهي تقع خارج Ω. □

عند قيامنا بحل مسألة برمجة خطية، نهتم بإيجاد أفضل حل للمسألة بحيث يكون هذا الحل موجودًا داخل منطقة الحل. نطلق على هذا الحل اسم *الحل الأمثل* (optimal solution). ويمكن تعريفه كالتالي :

تعريف (٢,٨): الحل الأمثل Optimal Solution

يعرف الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية في حالة مسألة القيمة العظمى "max" بأنه أحد نقاط منطقة الحل بحيث تكون دالة الهدف عند هذه النقطة أكبر ما يمكن. وفي حالة مسألة القيمة الصغرى "min" ، يعرف الحل الأمثل بأنة أحد نقاط منطقة الحل بحيث تكون دالة الهدف عند هذه النقطة أصغر ما يمكن.

ملاحظة

معظم مسائل البرمجة الخطية لها حل أمثلي وحيد. لكن في بعض الأحيان قد يكون للمسألة أكثر من حل، أو قد لا يوجد للمسألة حل أمثل. كما أن الحل الأمثل في بعض الحالات قد لا يكون محدودًا.

(٢,٣) رسم منطقة الحل (Ω)

Plotting the Feasible Region

إن أي مسألة برمجة خطية بمتغيرين يمكن حلها باستخدام الرسم. في هذا الفصل نبين كيفية رسم منطقة الحل لمسألة برمجة خطية. نلاحظ أن النقطة (x_1, x_2) تنتمي إلى منطقة الحل إذا كانت هذه النقطة تحقق جميع القيود. إذًا عند قيامنا برسم منطقة الحل نحتاج أن نرسم جميع القيود ثم تكون منطقة الحل هي منطقة تقاطع القيود. في المثال التالي نقوم برسم قيد واحد وهو عبارة عن متراجحة خطية.

مثال (٢,٤)

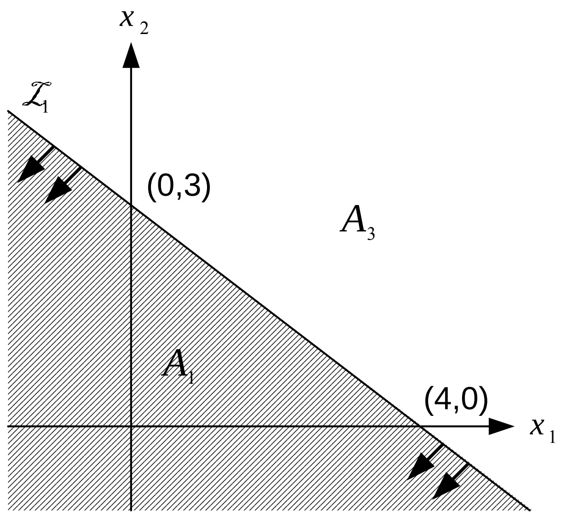
لنفرض أنه لدينا القيد التالي :

$$3x_1 + 4x_2 \leq 12$$

ونريد إيجاد قيم (x_1, x_2) التي تحقق هذه المتراجحة. في البداية نقوم برسم الخط المستقيم $\mathcal{L}_1 : 3x_1 + 4x_2 = 12$ ، وذلك بتحديد نقطتين تقعان على الخط المستقيم. في البداية نقوم بوضع $x_2 = 0$ فنحصل على $x_1 = 4$ وهي نقطة تقاطع المستقيم مع محور x_1. إذًا المستقيم يمر بالنقطة $(4,0)$. ثم بعد ذلك نضع $x_1 = 0$ فنحصل على تقاطع المستقيم مع المحور x_2 ونجد أن المستقيم يمر بالنقطة $(0,3)$. □

في الشكل (٢,٣) قمنا برسم المستقيم $\mathcal{L}_1$. هذا المستقيم يقسم المستوى إلى ثلاث مجموعات :

$$A_1 := \{(x_1, x_2) : 3x_1 + 4x_2 < 12\}$$
$$A_2 := \{(x_1, x_2) : 3x_1 + 4x_2 = 12\} = \mathcal{L}_1$$
$$A_3 := \{(x_1, x_2) : 3x_1 + 4x_2 > 12\}$$



شكل (٢,٣)

من الواضح أنه إذا كانت المنطقة A_1 تقع تحت المستقيم $\mathcal{L}_1$ ، فإن المنطقة A_3 سوف تقع فوق المستقيم. أما لو كانت A_1 تقع فوق المستقيم $\mathcal{L}_1$ ، فإن A_3 سوف تقع تحت المستقيم. ولتحديد أي المنطقتين تقع أعلى المستقيم وأيها تقع أسفله، نقوم بالتعويض بأي نقطة لا تقع على الخط المستقيم، ولتكن النقطة $(0,0)$. وبما أن النقطة $(0,0)$ تحقق المتراجحة $3x_1 + 4x_2 < 12$ ، إذًا المنطقة A_1 هي المنطقة التي تقع أسفل المستقيم. وعليه فإن حل المتراجحة يمثل المستقيم $\mathcal{L}_1$ مع المنطقة الواقعة أسفل المستقيم، أي أن حل المتراجحة هو المنطقة $A_1 \cup A_2$. □

في المثال السابق بينا كيفية تحديد منطقة الحل إذا كان القيد عبارة عن متراجحة خطية. ولكن بشكل عام نجد أن القيود المحددة لمنطقة الحل تمثل مجموعة من المعادلات أو المتراجحات الخطية وكذلك شرط الإشارة. ولكي نقوم بتحديد منطقة الحل علينا أن نوجد المنطقة التي تحدد كل قيد ثم نأخذ تقاطع هذه المناطق.

المثال التالي يوضح طريقة تحديد منطقة الحل لمجموعة من القيود عن طريق الرسم.

مثال (٢,٥)

أوجد منطقة الحل للقيود التالية :

$$\begin{aligned} &4x_1 + 18x_2 \le 36 \\ &2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ &x_1 \ge 0 \\ &x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

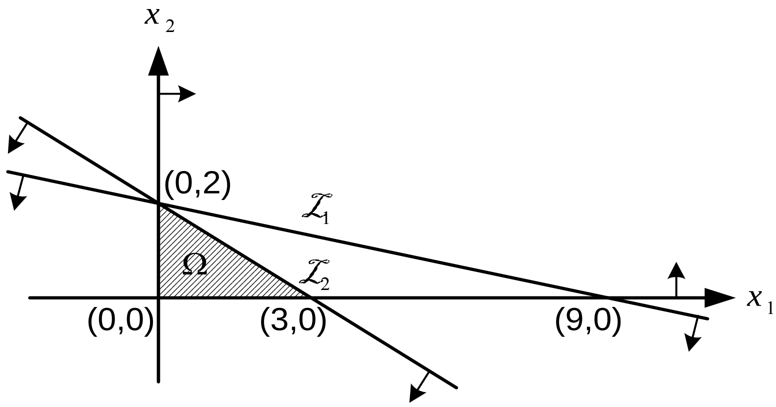
الحل

حتى نحدد منطقة الحل لهذه المسألة يجب أن نوجد جميع النقاط (x_1, x_2) التي تحقق جميع القيود. واضح من الشرطين الأخيرين $x_1 \ge 0$ و $x_2 \ge 0$ أن منطقة الحل لابد أن تكون في الربع الأول(first quadrant) . لهذا قمنا بوضع سهم متجه نحو الأعلى على المحور x_1 ، وسهم متجه نحو اليمين على المحور x_2. لتحديد المنطقة المحددة بالمتراجحتين $4x_1 + 18x_2 \le 36$ و $2x_1 + 3x_2 \le 6$ ، نقوم برسم المستقيمين :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &: \quad 4x_1 + 18x_2 = 36 \\ \mathcal{L}_2 &: \quad 2x_1 + 3x_2 = 6 \end{aligned}$$

لرسم المستقيم $\mathcal{L}_1$ ، نجد أن المستقيم يمر بالنقطتين $(9,0)$ و $(0,2)$. ولأن النقطة $(0,0)$ تحقق المتراجحة $4x_1 + 18x_2 < 36$ ، إذًا $4x_1 + 18x_2 \le 36$ تمثل الخط المستقيم $\mathcal{L}_1$ مع المنطقة الواقعة تحته. ولذا تم وضع سهم على المستقيم $\mathcal{L}_1$ متجهٍ نحو الأسفل ليبين اتجاه المنطقة الذي تحدده المتراجحة. وبالنسبة للمستقيم الثاني $\mathcal{L}_2$ نجد أنه يمر بالنقطتين $(3,0)$ و $(0,2)$ ، كما أن النقطة $(0,0)$ تحقق المتراجحة

$2x_1 + 3x_2 < 6$ ، وعليه فالمتراجحة $2x_1 + 3x_2 \leq 6$ تمثل المستقيم $\mathcal{L}_2$ والمنطقة الواقعة تحته. ولذا تم وضع سهم على المستقيم $\mathcal{L}_2$ متجهٍ نحو الأسفل ليبين اتجاه المنطقة الذي تحدده المتراجحة. بعد ذلك نحدد *نقطة التقـاطع* وذلك بحل معادلتي المستقيمين فنجد أن نقطة التقاطع هي النقطة $(0,2)$.



شكل (٢,٤)

في الشكل (٢,٤)، تم رسم المستقيمين $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{L}_2$ ومن ثم تحديد المنطقة المحدودة بالمستقيمات الأربعة. في هذه الحالة تكون منطقة الحل عبارة عن المثلث الذي رؤوسه $(0,0),(0,2),(3,0)$. □

وفيما يلي نعطي نظرية مهمة في البرمجة الخطية ونكتفي بنص النظرية دون برهان.

نظرية (٢,١)

١- منطقة الحل في أي مسألة برمجة خطية هي منطقة محدبة.
٢- منطقة الحل في أي مسألة برمجة خطية لها عدد منتهٍ من النقاط الحدية.

(٢,٤) حل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم
Graphical Method for Solving LP

بعد تحديد منطقة الحل لمسألة البرمجة الخطية ، نقوم بالبحث عن نقطة أو مجموعة نقاط تكون عندها دالة الهدف أفضل ما يمكن (أكبر ما يمكن في حالة مسألة القيمة العظمى "max" وأقل ما يمكن في حالة مسألة القيمة الصغرى "min"). لإيجاد الحل الأمثل نقوم برسم مستقيم بحيث تكون جميع النقاط الواقعة على هذا المستقيم لها نفس قيمة z ، أي المستقيم $z = c$ حيث c عدد ثابت. يسمى هذا المستقيم ***مستقيم الربح*** (isoprofit line) في حالة مسألة القيمة العظمى "max" ويسمى ***مستقيم التكلفة*** (isocost line) في حالة مسألة القيمة الصغرى "min".

لكي نحدد الحل الأمثل في مسألة القيمة العظمى ، نقوم بتحريك مستقيم الربح نحو الاتجاه الذي يزيد من قيمة دالة الهدف. حتى نصل إلى النقطة أو مجموعة النقاط التي يخرج عندها مستقيم الربح من منطقة الحل. وتكون هذه النقطة أو مجموعة النقاط هي الحل الأمثل. وبطريقة مشابهة ، فإننا في حالة مسألة القيمة الصغرى نقوم بتحريك مستقيم التكلفة في الاتجاه الذي يقلل من قيمة دالة الهدف حتى نصل إلى النقطة أو مجموعة النقاط التي يخرج عندها مستقيم التكلفة من منطقة الحل. وتكون هذه النقطة أو مجموعة النقاط هي الحل الأمثل.

المثال التالي يوضح طريقة رسم مستقيم الربح في حالة مسألة القيمة العظمى "max" ، وكيفية تحريكه داخل منطقة الحل وذلك لإيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية.

مثال (٢,٦)

أوجد باستخدام الرسم حل المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1 - x_2 \le 3 \\ & x_1 \ge 0 \\ & x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

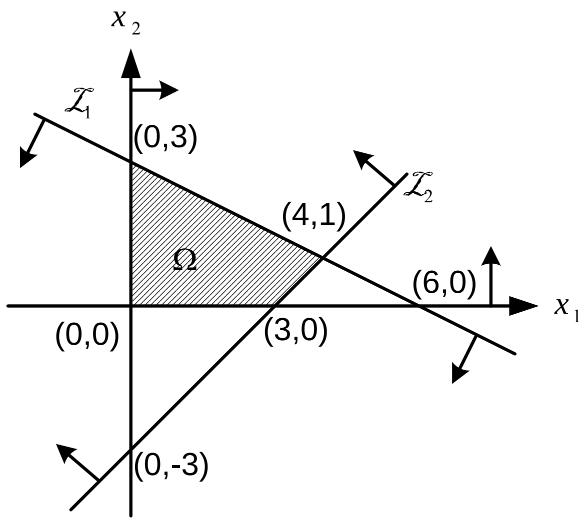
الحل

واضح من الشرطين الأخيرين $x_1 \ge 0$ و $x_2 \ge 0$ ، أن منطقة الحل لابد أن تكون في الربع الأول. الآن نقوم برسم منطقة الحل المحدودة بالمستقيمات التالية :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &: x_1 + 2x_2 = 6 \\ \mathcal{Z}_2 &: x_1 - x_2 = 3 \end{aligned}$$

نلاحظ أن المستقيمين $\mathcal{Z}_1$ و $\mathcal{Z}_2$ يتقاطعان عند نقطة. ولإيجاد هذه النقطة نقوم بحل معادلتي المستقيمين (وذلك بضرب المعادلة الثانية في -1 ثم الجمع فنحصل على $x_2 = 1$ ثم التعويض في أحد المعادلتين فنحصل على $x_1 = 4$). إذًا نقطة التقاطع هي $(4,1)$ كما هو موضح في الشكل (٢.٥). ومن ثم، تكون النقاط الحدية لمنطقة الحل هي $(0,0)$ ، و $(0,3)$ ، و $(3,0)$ و $(4,1)$.

لرسم مستقيم الربح، نقوم باختيار أي نقطة في منطقة الحل ثم نقوم بحساب قيمة z عند هذه النقطة. فمثلاً لو اخترنا النقطة $(0,1)$ نجد أن $z = 5$. إذًا النقطة $(0,1)$ تقع على خط الربح $z = 5$. نلاحظ أن ميل الخط المستقيم $z = 5$ يمكن حسابه بالشكل التالي :

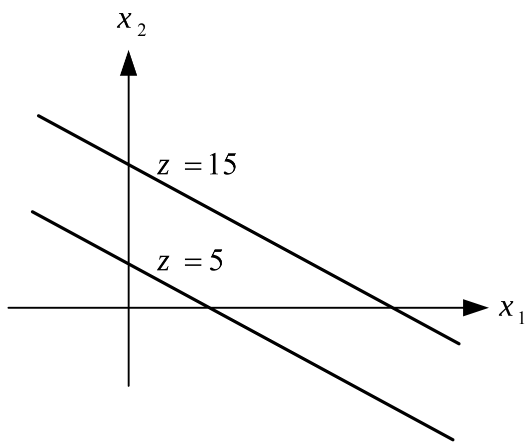


شكل (٢,٥)

بما أن $z = 3x_1 + 5x_2 = 5$ ، إذًا $x_2 = \frac{-3}{5}x_1 + 1$. أي أن ميل المستقيم $z = 5$ يساوي $\frac{-3}{5}$. وبما أن جميع مستقيمات الربح $3x_1 + 5x_2 = c$ لها نفس الميل، إذًا متى ما قمنا برسم أحد مستقيمات الربح فما علينا إلا تحريكه بشكل موازٍ للحصول على مستقيم ربح آخر. وفي الشكل (٢,٦)، قمنا برسم المستقيمين $z = 5$ و $z = 15$.

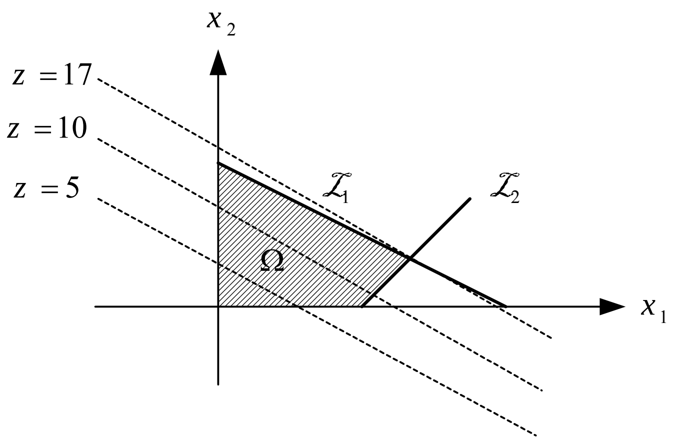
الآن أصبح من الواضح كيف نوجد القيمة الأمثلية لمسألة البرمجة الخطية. بعد أن نرسم أحد مستقيمات الربح، نقوم بتوليد مستقيمات ربح أخرى بتحريك المستقيم المرسوم في الاتجاه الذي سوف يزيد من قيمة z (لأن المسألة مسألة قيمة عظمى "max")، وبعد نقطة معينة نجد أن مستقيم الربح لن يتقاطع مع منطقة الحل؛ إذًا آخر خط ربحي يمس منطقة الحل سوف يكون هو القيمة العظمى للدالة z. ونلاحظ في هذا المثال أن قيمة دالة الهدف $z = 3x_1 + 5x_2$ سوف تزداد كلما زدنا x_1 و x_2؛ لذلك

نقوم برسم مستقيمات أخرى في الاتجاه الذي يزيد من قيمة الدالة z وهو شمال شرق المستقيم $z = 3x_1 + 5x_2 = 5$.



شكل (٢,٦)

في الشكل (٢,٧)، نجد أن المستقيم $z = c$ سوف يتقاطع مع منطقة الحل حتى يصل إلى النقطة $(4,1)$ ، ثم بعد ذلك لن يكون هناك تقاطع بين مستقيم الربح ومنطقة الحل.



شكل(٢,٧)

لبيان ذلك نلاحظ أن ميل المستقيم $z = c$ يساوي $\frac{-3}{5}$ وميل المستقيم $\mathcal{Z}_1$ يساوي $\frac{-1}{2}$.وبما أن ميل المستقيم $z = c$ أقل من ميل المستقيم $\mathcal{Z}_1$ ، إذًا عن يمين نقطة التقاطع $(4,1)$ سوف تكون قيمة x_2 على المستقيم $z = c$ أقل من قيمتها على المستقيم $\mathcal{Z}_1$ ، بينما عن يسار نقطة التقاطع $(4,1)$ سوف تكون قيمة x_2 على المستقيم $z = c$ أكبر من قيمتها على المستقيم $\mathcal{Z}_1$.

ومن خلال الرسم، يتضح أن الحل سوف يكون عند النقطة $(0,3)$ أو $(4,1)$. نقوم الآن برسم المستقيم $z = c$ عند أحد هاتين النقطتين ولتكن $(4,1)$. ونلاحظ أن المستقيم $z = c$ سوف يتقاطع مع محور x_2 في نقطة أعلى من النقطة $(0,3)$ كما هو واضح في الشكل (٢،٧). ومن ثم فإن الحل الأمثل سوف يكون عند النقطة $(4,1)$ ، أي عندما $x_1^* = 4, x_2^* = 1$ وقيمة دالة الهدف عند هذه النقطة $z^* = 3x_1^* + 5x_2^* = 3.4 + 5.1 = 17$. إذًا الحل الأمثل هو $z^* = 17$. □

تسمى النقطة $(4,1)$ في المثال السابق، *نقطة تكبير دالة الهدف* **(**maximizer**)**. أما إذا كانت المسألة مسألة قيمة صغرى " $\min z$" فتسمى النقطة التي تكون عندها دالة الهدف أصغر ما يمكن *نقطة تصغير دالة الهدف* (minimizer). وأخيرًا يطلق على z^* الحل الأمثل **(**optimal solution**).**

نأخذ الآن مثالاً آخر نبين فيه طريقة استخدام الرسم في حل مسألة قيمة صغرى.

مثال (٢،٧)

أوجد حل المسألة التالية :

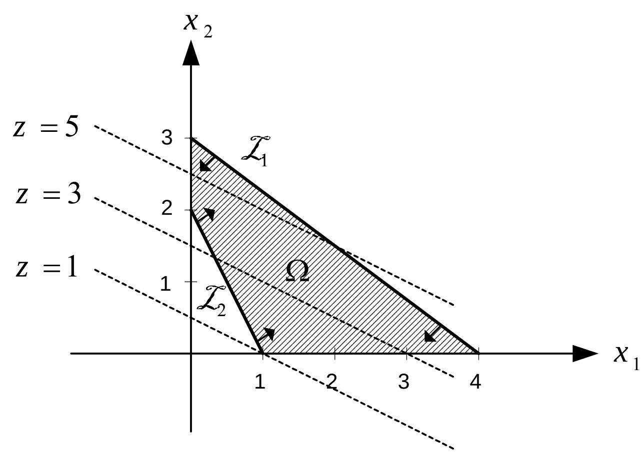
$$\begin{aligned} \min\ \ z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\qquad 3x_1 + 4x_2 &\le 12 \\ 2x_1 + x_2 &\ge 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

في البداية نقوم برسم منطقة الحل الموجودة في الربع الأول والمحدودة بالمستقيمات التالية :

$$\mathcal{L}_1 : 3x_1 + 4x_2 = 12$$
$$\mathcal{L}_2 : 2x_1 + x_2 = 2$$

في الشكل (٢,٨)، قمنا برسم منطقة الحل Ω ، وبعض مستقيمات التكلفة $z = c$ لقيم مختلفة للثابت c.



شكل (٢,٨)

واضح من الرسم أن النقاط $(0,2)$, $(0,3)$, $(4,0)$, $(1,0)$ هي النقاط الحدية. ولكي نقوم برسم مستقيم التكلفة، نقوم باختيار أي نقطة في منطقة الحل ثم نقوم بحساب قيمة z عند هذه النقطة. فمثلاً لو اخترنا النقطة $(3,0)$ نجد أن $z = 3$. والآن نقوم بتوليد مستقيمات تكلفة أخرى بتحريك المستقيم المرسوم $z = 3$ في الاتجاه الذي سوف يقلل من قيمة z. في الشكل (٢،٨) قمنا برسم المستقيمات $z = 1$ ، و $z = 3$ ، و $z = 5$. نلاحظ في هذا المثال أن قيمة دالة الهدف $z = x_1 + 2x_2$ سوف تقل كلما قللنا x_1 و x_2 ؛ لذلك نقوم برسم مستقيمات أخرى جنوب غرب المستقيم $z = x_1 + 2x_2 = 3$.

بعد نقطة معينة نجد أن مستقيم التكلفة لن يتقاطع مع منطقة الحل. إذًا آخر خط تكلفة يمس منطقة الحل سوف يكون هو القيمة الصغرى للدالة z. نلاحظ أن المستقيم $z = c$ سوف يتقاطع مع منطقة الحل حتى يصل إلى النقطة $(1,0)$ ، ثم بعد ذلك لن يكون هناك تقاطع بين مستقيم التكلفة ومنطقة الحل.

ولبيان ذلك نلاحظ أن ميل المستقيم $z = c$ يساوي $\frac{-1}{2}$ وميل المستقيم $\mathcal{Z}_2$ يساوي -2. وبما أن ميل المستقيم $z = c$ أكبر من ميل المستقيم $\mathcal{Z}_2$ ، إذًا المستقيم $z = c$ يتقاطع مع محور x_2 (يسار نقطة التقاطع $(1,0)$) في نقطة تحت النقطة $(0,2)$ كما هو واضح في الشكل (٢،٨). إذًا الحل الأمثل سوف يكون عند النقطة $(1,0)$ أي عندما $x_1^* = 1, x_2^* = 0$ وقيمة دالة الهدف عند هذه النقطة $z^* = x_1^* + 2x_2^* = 1 + 2.0 = 1$. إذًا الحل الأمثل هو $z^* = 1$. □

توجد هناك طريقة أخرى لحل مسائل البرمجة الخطية باستخدام الرسم، وتعتمد هذه الطريقة على النظرية التالية:

نظرية (٢,٢): نظرية النقاط الحدية Extreme Points Theorem

إذا كان لدينا مسألة برمجة خطية وكانت منطقة الحل محدودة، فإن الحل الأمثل يكون موجودًا عند نقطة حدية، فإن لم تكن منطقة الحل محدودة فإن الحل إما أن يكون عند نقطة حدية أو أن المسألة ليس لها حل.

مثال (٢,٨)

باستخدام النظرية السابقة بإمكاننا حل المثال (٢,٦)، وذلك بالتعويض عن النقاط الحدية $(0,0)$ ، و $(0,3)$ ، و $(3,0)$ ، و $(4,1)$ في دالة الهدف $z = 3x_1 + 5x_2$. نقوم الآن بحساب قيمة دالة الهدف لكل نقطة من هذه النقاط ثم نأخذ أكبر قيمة لتكون هي الحل الأمثل:

$$
\begin{aligned}
z(0,0) &= 0 \\
z(0,3) &= 15 \\
z(3,0) &= 9 \\
z(4,1) &= 17 \ ^{*}
\end{aligned}
$$

ولأن $z(4,1) = 17$ هي أكبر قيمة لدالة الهدف إذًا $z^* = 17$ هي القيمة العظمى. □

بعد قيامنا بإيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية، نقوم بتقسيم القيود حسب علاقتها بالحل الأمثل إلى نوعين قيد ملزم (binding constraint) وقيد غير ملزم (nonbinding constraint).

تعريف (٢,٩): القيود الملزمة Binding Constraints

يكون القيد *ملزما* إذا كان الطرف الأيسر من القيد مساويًا للطرف الأيمن عندما نعوض عن القيم الأمثلية لمتغيرات القرار في القيد. ويكون القيد *غير ملزم* إذا لم يتساو الطرفان عند تعويضنا عن القيم الأمثلية لمتغيرات القرار.

فمثلاً في المثال (٢,٧)، كان الحل الأمثلي هو النقطة $(1,0)$. وعليه فإن القيدين $2x_1 + x_2 \geq 2$ و $x_2 \geq 0$ ملزمان، أما القيدان $3x_1 + 4x_2 \leq 12$ و $x_1 \geq 0$ فهما غير ملزمين.

(٢,٥) حالات خاصة

Special Cases

رأينا في الأمثلة السابقة بعض مسائل البرمجة الخطية والتي كان لها حل وحيد. وتحت هذا العنوان سنتطرق إلى ثلاث حالات من مسائل البرمجة الخطية لا يكون لها حل وحيد.

١- بعض مسائل البرمجة الخطية لها عدد لانهائي من الحلول الأمثلية.

٢- بعض مسائل البرمجة الخطية ليس لها حل.

٣- بعض مسائل البرمجة الخطية غير محدودة الحل.

(٢,٥,١) وجود أكثر من حل

Alternative Optimal Solutions

في بعض مسائل البرمجة الخطية تكون هناك أكثر من قيمة أمثلية لمتغيرات القرار. وفي هذه الحالة يوجد للمسألة أكثر من حل كما يوضح ذلك المثال التالي:

مثال (٢,٩)

أوجد حل المسألة التالية :

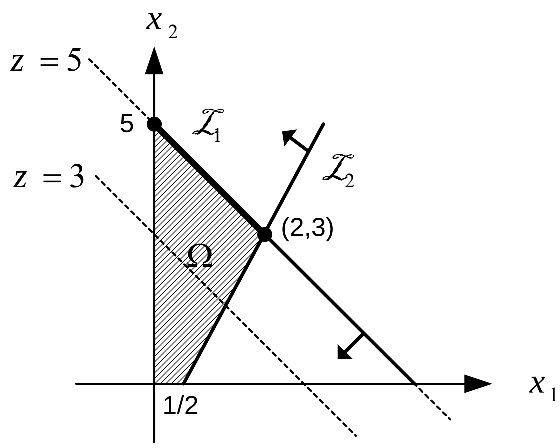
$$\begin{aligned} \max\ & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & 2x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل

لنعرف المستقيمين $\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2$ كالتالي :

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_1 &: x_1 + x_2 = 5 \\ \mathcal{Z}_2 &: 2x_1 - x_2 = 1 \end{aligned}$$

بعد ذلك نقوم برسم منطقة الحل ومستقيم الربح $z = 3$ والذي يمر بالنقطة $(0,3)$ ، كما في الشكل (٢,٩).



شكل (٢,٩)

ثم نقوم بتحريك المستقيم $z = c$ نحو الأعلى. نلاحظ أن ميل المستقيم $\mathcal{Z}_1$ يساوي ميل المستقيم $z = c$ ويساوي -1 ، كما أن المستقيم سوف يخرج من منطقة الحل عندما $z = 5$. وفي هذه الحالة نجد أن المستقيم يمس منطقة الحل عند القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,5)$ و $(2,3)$. والسبب في ذلك أن المستقيم $z = c$ يوازي المستقيم $\mathcal{Z}_1$.

إذًا الحل هو القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,5)$ و $(2,3)$ كما هو موضح في الشكل (٢.٩). أي أن هذه المسألة لها عدد لانهائي من الحلول.

كما يمكن حل هذا المثال باستخدام نظرية النقطة الحدية، وذلك بالتعويض في دالة الهدف z عن النقاط الحدية فنحصل على:

$$z(0,0) = 0$$
$$z(1/2,0) = 1/2$$
$$z(2,3) = 5^*$$
$$z(0,5) = 5^*$$

نلاحظ أن القيمة العظمى لدالة الهدف z تساوي 5 ، وهناك نقطتان لهما نفس قيمة دالة الهدف وهما $(0,5)$ و $(2,3)$. ولأن قيمة z تساوي 5 على الخط المستقيم الواصل بين النقطتين، إذًا حل هذه المسألة هو تقاطع الخط المستقيم $z = 5$ مع منطقة الحل، أي القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,5)$ و $(2,3)$. □

في المثال (٢.٩) كان للمسألة عدد لانهائي من الحلول (alternative optimal solutions)، والسبب أن مستقيم الربح عندما يغادر منطقة الحل، فإنه سوف يتقاطع مع القطعة المستقيمة الواصلة بين $(0,5)$ و $(2,3)$ ، إذًا الحل هو القطعة المستقيمة الواصلة بين $(0,5)$ و $(2,3)$. وبشكل عام نجد أنه إذا كان $\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*$ حلين أمثليين لمسألة البرمجة الخطية، فإن $\mathbf{t}^* = (1-\alpha)\mathbf{x}^* + \alpha\,\mathbf{y}^*$ هو حل أمثلي لكل $0 \le \alpha \le 1$.

من السهل إثبات أنه إذا كان هناك حلاَّن أمثليَّان فإن أي نقطة تقع على القطعة المستقيمة الواصلة بين هذين الحلين، سوف تكون أيضا حلا أمثليا.

(٢,٥,٢) عدم إمكانية الحل
Infeasible LP

في بعض مسائل البرمجة الخطية تكون منطقة الحل مجموعة خالية، أي أنه لا يوجد أي نقطة تحقق قيود المسألة المعطاة. وفي هذه الحالة لا يوجد حل أمثلي للمسألة كما يوضح ذلك المثال التالي:

مثال (٢,١٠)

أوجد حل المسألة التالية:

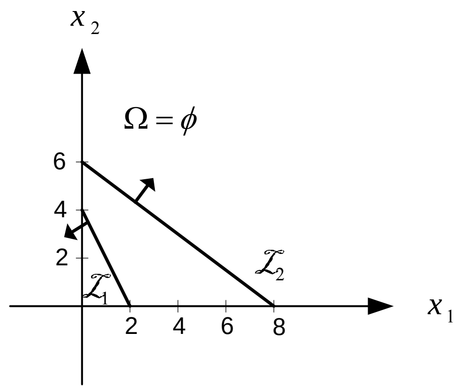
$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ 3x_1 + 4x_2 &\ge 24 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

لنعرف المستقيمين $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ كالتالي:

$$\mathcal{L}_1 : 2x_1 + x_2 = 4$$
$$\mathcal{L}_2 : 3x_1 + 4x_2 = 24$$

بعد ذلك نقوم برسم القيود كما في الشكل (٢,١٠).



شكل(٢,١٠)

نلاحظ أنه لا يوجد تقاطع بين هذه القيود. وبناء عليه فإن منطقة الحل هي المجموعة الخالية $\Omega = \varnothing$ ، أي أن هذه المسألة ليس لها حل. تسمى المسألة التي تكون فيها منطقة الحل مجموعة خالية ، مسألة غير مقبولة أو مسألة عدم قابلة للحل (infeasible LP). □

(٢,٥,٣) المسائل غير محدودة الحل
Unbounded LP

تكون مسألة القيمة العظمى "max" غير محدودة الحل إذا كان من الممكن زيادة دالة الهدف دون حد عند التعويض بنقاط موجودة في منطقة الحل. وتكون مسألة القيمة الصغرى "min" غير محدودة الحل إذا كان من الممكن تقليل دالة الهدف دون حد عند التعويض بنقاط في منطقة الحل.

ولمعرفة ما إذا كانت مسألة قيمة عظمى "max" محدودة الحل أم لا نقوم بتحريك مستقيم الربح في الاتجاه الذي يزيد قيمة دالة الهدف ، فإذا كنا نستطيع تحريك

المستقيم بدون أن نخرج من منطقة الحل فإن المسألة تكون غير محدودة كما في المثال التالي:

مثال (٢,١١)

أوجد حل المسألة التالية:

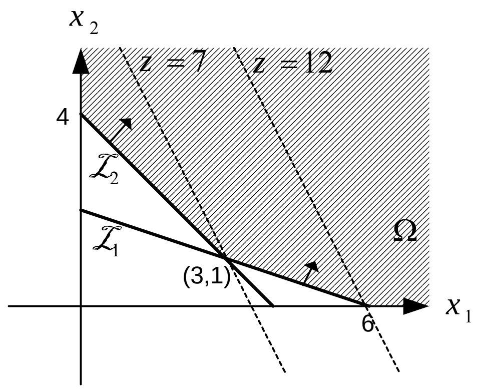
$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + 3x_2 &\ge 6 \\ x_1 + x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

لنعرف المستقيمين $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ كالتالي:

$$\mathcal{L}_1 : x_1 + 3x_2 = 6$$
$$\mathcal{L}_2 : x_1 + x_2 = 4$$

نقوم في البداية برسم منطقة الحل Ω ونلاحظ كما في الشكل (٢,١١) أن Ω غير محدودة (unbounded). بعد ذلك، نقوم برسم المستقيمين $z = 7$ و $z = 12$، ونلاحظ أن قيمة دالة الهدف تزداد كلما اتجهنا نحو اليمين أو نحو الأعلى. وبما أن منطقة الحل غير محدودة في هذين الاتجاهين، إذًا قيمة دالة الهدف تزداد بدون حد كلما زدنا قيمة المتغيرات x_1, x_2. وينتج من ذلك أن هذه المسألة غير محدودة الحل. □



شكل(٢,١١)

في المثال السابق كانت منطقة الحل غير محدودة وكانت قيمة دالة الهدف غير محدودة أيضًا، في هذه الحالة نقول إن المسألة غير محدودة الحل. لكن في بعض الحالات قد تكون منطقة الحل غير محدودة ولكن دالة الهدف لها حل أمثلي.

مثال (٢,١٢)

أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned} \min\ & z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \geq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل

منطقة الحل في هذا المثال هي منطقة الحل في المثال السابق، ولكن نلاحظ أن المسألة هنا مسألة قيمة صغرى "min". بتحريك مستقيم التكلفة نحو اليسار نجد أن أقل قيمة للدالة سوف تظهر عند النقطة $(x_1^*, x_2^*) = (0,4)$ وقيمة دالة الهدف $z^* = 4$. إذًا الحل الأمثل هو $z^* = 4$.

ملاحظة

في بعض الحالات قد يكون حل مسألة البرمجة الخطية مساويًا لمنطقة الحل كما سوف نوضح في المثال التالي:

مثال (٢,١٣)

أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + 3x_2 &\geq 6 \\ x_1 + x_2 &= 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

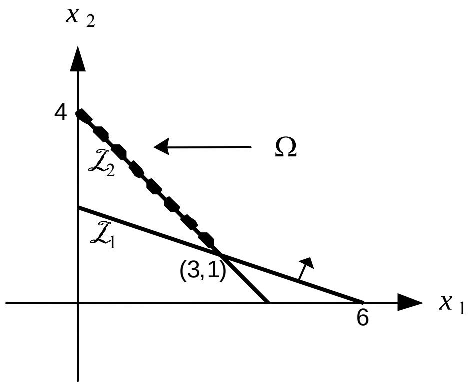
الحل

لنعرف المستقيمين $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ كالتالي:

$$\mathcal{L}_1 : x_1 + 3x_2 = 6$$
$$\mathcal{L}_2 : x_1 + x_2 = 4$$

نقوم في البداية برسم منطقة الحل Ω كما في الشكل (٢,١٢).

نلاحظ في الشكل (٢,١٢) أن منطقة الحل Ω تمثل القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين $(0,4)$ و $(3,1)$. لنأخذ أي نقطة في منطقة الحل ولتكن النقطة $(3,1)$، قيمة z عند هذه النقطة تساوي 8. الآن نقوم برسم المستقيم $z = 8$ والمار بالنقطة $(3,1)$. نلاحظ أن هذا المستقيم ينطبق على القطعة المستقيمة والسبب أن ميل المستقيم $z = 8$ يساوي ميل المستقيم $\mathcal{L}_2$. إذًا المستقيم $z = 8$ سوف يخرج عن منطقة الحل عند تحريكه في أي اتجاه. كما أن المستقيم يغطي منطقة الحل بالكامل. إذًا القيمة الصغرى للدالة z هي 8 وذلك لأي قيمة (x_1, x_2) تقع داخل منطقة الحل. □



شكل(٢,١٢)

نستخلص من هذا الباب أن هناك أربع حالات لمسألة البرمجة الخطية :

١- مسألة برمجة خطية لها حل وحيد

٢- مسألة برمجة خطية لها عدد لانهائي من الحلول الأمثلية.

٣- مسألة برمجة خطية ليس لها حل.

٤- مسألة برمجة خطية غير محدودة.

تمارين الفصل الثاني

(٢.١) في مسائل البرمجة الخطية اشترطنا أن تكون القيود على الصورة $\le$ أو $\ge$ أو $=$ ، لماذا لا نسمح للقيود أن تأخذ الصورة $>$ أو $<$ ؟

(٢.٢) إذا كانت لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1 + 4x_2 \ge 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

بيِّن أي النقاط التالية $(0,1), (2,2), (0,5), (-5,15)$ تقع داخل منطقة الحل.

(٢.٣) بيِّن أياً من الأشكال التالية عبارة عن مجموعة محدبة :

١- المستقيم. ٢- المثلث.

٣- نصف الدائرة. ٤- اتحاد مجموعتين محدبتين.

٥- المجموعة $\{(x,y) \mid y = x^2, -1 \le x \le 1\}$.

(٢.٤) وضح النقاط الحدية لكل من :

١- المستقيم ٢- المثلث ٣- القطعة المستقيمة

٤- المجموعة $\{(x,y) \mid y = x^2, -1 \le x \le 1\}$.

(٢.٥) حدد منطقة الحل في القيود التالية إذا علمت أن $x_1, x_2 \ge 0$.

١- $-2x_1 + 6x_2 \le 5$ ٢- $x_1 - x_2 \le 0$ ٣- $-x_1 + x_2 \ge 0$

(٢,٦) إذا كانت لدينا مسألة قيمة عظمى "max" ، وكان أحد القيود عبارة عن متراجحة من النوع $\leq$ وغيرنا القيد إلى معادلة = ، هل من الممكن أن تزداد قيمة دالة الهدف؟ علل.

(٢,٧) باستخدام الرسم أوجد حل المسألة التالية ، ثم حدد نوع المسألة (وحيدة الحل ، لها أكثر من حل ، غير محدودة الحل ، ليس لها حل).

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + 3x_2 &\leq 6 \\ x_1 + \ \ x_2 &\leq 4 \\ x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(**تلميح** : لاحظ هنا أن المتغير x_1 غير محدد الإشارة)

(٢,٨) باستخدام الرسم أوجد حل المسألة التالية ، ثم حدد نوع المسألة (وحيدة الحل ، لها أكثر من حل ، غير محدودة الحل ، ليس لها حل).

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_1 - x_2 &\geq 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

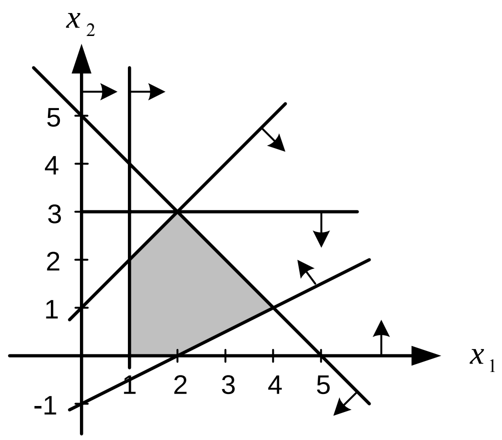
(٢,٩) باستخدام الرسم أوجد حل المسألة التالية ، ثم حدد نوع المسألة (وحيدة الحل ، لها أكثر من حل ، غير محدودة الحل ، ليس لها حل).

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad 8x_1 + 2x_2 &\leq 16 \\ 5x_1 + 2x_2 &\leq 12 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

(٢,١٠) باستخدام الرسم أوجد حل المسألة التالية، ثم حدد نوع المسألة (وحيدة الحل، لها أكثر من حل، غير محدودة الحل، ليس لها حل).

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1 + 2x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٢,١١) في الشكل (٢,١٣)، قمنا برسم بعض القيود لتحديد منطقة الحل. اكتب جميع القيود الموجودة في الشكل.



شكل(٢,١٣)

(٢,١٢) أوجد حل المسائل التالية باستخدام القيود الموجودة في التمرين (٢,١١).

١- $\max\ z = 2x_1 + 6x_2$.   ٢- $\max\ z = -3x_1 + 4x_2$.

٣- $\max\ z = 2x_1$.   ٤- $\min\ z = 3x_1 + 4x_2$.

٥- $\min\ z = x_1 - 2x_2$ ٦- $\min\ z = 3x_1$.

(٢,١٣) بدون استخدام الرسم وبمجرد النظر، حدد نوع المسألة (وحيدة الحل، لها أكثر من حل، غير محدودة الحل، ليس لها حل). ثم تأكد من حلّك وذلك عن طريق رسم منطقة الحل ثم تحريك المستقيم $z = c$.

$$\begin{aligned} \max\ \ & z = 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 + 3x_2 \le 9 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٢,١٤) أوجد القيمة الصغرى "min" والقيمة العظمى "max" لدالة الهدف التالية بطريقتين مختلفتين (طريقة تحريك المستقيم $z = c$ وطريقة النقاط الحدية).

$$\begin{aligned} & z = 6x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.}\ \ & x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ & -x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٢,١٥) حدد فيما يلي اتجاه تزايد z.

١- $\max\ z = x_1 - x_2$.

٢- $\max\ z = -x_1 - 2x_2$.

٣- $\max\ z = 2x_1$.

٤- $\max\ z = 3x_1 + 4x_2$.

٥- $\max\ z = -x_1 + 2x_2$

(٢,١٦) حدد فيما يلي اتجاه تناقص z

١- $\min\ z = 3x_1 - 2x_2$.

٢- $\min\ z = -x_1 + 2x_2$.

٣- $\min\ z = 2x_1 + x_2$.

(٢,١٧) باستخدام الرسم أوجد حل المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \max\ & z = 5x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1 = 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٢,١٨) أوجد حل المسألة (٢,١٧) إذا استبدلنا القيد الثاني بالقيد $x_1 \le 5$.

(٢,١٩) لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ & z = 6x_1 - 2x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 - x_2 \le 1 \\ & 3x_1 - x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

بيِّن باستخدام الرسم أنه عند الحل الأمثل ، نستطيع زيادة x_1 و x_2 إلى مالا نهاية ، ومع ذلك تظل قيمة دالة الهدف ثابتة.

(٢,٢٠) أوجد الشروط الضرورية (necessary) والكافية (sufficient) على المتغيرات s,t ، لكي تكون المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \max\ & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & sx_1 + tx_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

١- لها حل وحيد
٢- غير ممكنة الحل
٣- غير محدودة الحل
٤- لها أكثر من حل

(٢,٢١) باستخدام الرسم أوجد حل المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \min\ z &= 10x_1 + 9x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 \quad &\le 8 \\ x_2 &\le 10 \\ 5x_1 + 3x_2 &\ge 45 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٢,٢٢) لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 &\le \alpha \\ -x_1 + x_2 &\le -1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

١- بيِّن أن منطقة الحل في المسألة السابقة غير خالية إذا كانت $\alpha \ge 1$.

٢- أوجد حل المسألة كدالة في α لجميع قيم $\alpha \ge 1$.

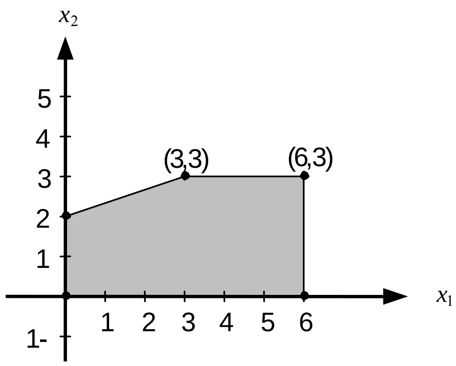
(٢,٢٣) ١- استخدم الرسم لبيان أن أي حل للقيود التالية :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4 \\ 2x_1 - x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

هو حل للقيد $2x_1 + x_2 \le 6$.

٢- أوجد صياغة مناسبة لمسألة برمجة خطية لإثبات أن أي حل لمجموعة القيود أعلاه هو حل للقيد $2x_1 + x_2 \le 6$.

(٢,٢٤) في الشكل (٢,١٤)، تمثل المنطقة المظللة منطقة حل لمسألة برمجة خطية ومطلوب إيجاد القيمة العظمى لدالة الهدف.



شكل(٢,١٤)

بيِّن هل الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مع التعليل باستخدام الرسم. ثم أوجد دالة هدف تدعم إجابتك لكل جملة.

١- إذا كانت قيمة دالة الهدف عند النقطة $(3,3)$ أكبر من قيمتها عند النقاط $(0,2)$ و $(6,3)$ ، فإن النقطة $(3,3)$ لا بد أن تكون الحل الأمثلي الوحيد.

٢- إذا كانت النقطة $(3,3)$ عبارة عن حل أمثلي، وكان للمسألة أكثر من حل فإن أحد النقطتين $(0,2)$ أو $(6,3)$ لا بد أن تكون حلاً أمثلياً.

٣- النقطة $(0,0)$ لا يمكن أن تكون حلاً أمثلياً.

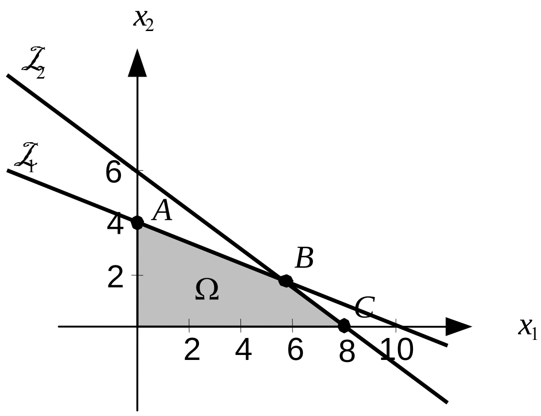
(٢,٢٥) هل العبارات التالية صائبة أم خاطئة؟ مع التعليل:

١- إذا كانت مسألة البرمجة الخطية غير محدودة الحل، فإن منطقة الحل غير محدودة كذلك.

٢- إذا كانت منطقة الحل غير محدودة فإن المسألة غير محدودة الحل.

٣- يمكن لمسألة برمجة خطية أن يكون لها حلان أمثليان فقط.

(٢,٢٦) إذا كانت منطقة الحل لمسألة قيمة عظمى "max" عبارة عن المنطقة الموضحة في الشكل (٢,١٥)، و كانت $z(x) \geq 0$ لكل $x \in \Omega$ ، وكان ميل المستقيم $z = c$ يساوي $-1/5$ وميل المستقيم $\mathcal{L}_1$ يساوي $-2/5$ ، وأخيرًا ميل المستقيم $\mathcal{L}_2$ يساوي $-3/4$.



شكل(٢,١٥)

١- بيِّن أي النقاط A, B, C تمثل حلاً أمثليًّا، مع شرح السبب.

٢- إذا كانت قيمة دالة الهدف عند الحل الأمثل $z^* = 40$ ، فاكتب مسألة البرمجة الخطية موضحًا دالة الهدف والقيود.

الفصل الثالث

طريقة السمبلكس

The Simplex Algorithm

- الصيغة القياسية
- المتغيرات الأساسية والحل الأساسي
- طريقة السمبلكس

في الفصل السابق، بينا كيف يمكن حل مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرين باستخدام طريقة الرسم. ولكن نظرًا لأن معظم مسائل البرمجة الخطية تحتوي على أكثر من متغيرين، كان لا بد من إيجاد طريقة أخرى غير الرسم لحل مسائل البرمجة الخطية.

في هذا الفصل سوف نتطرق إلى أحد أشهر طرائق حل المسائل الخطية وأكثرها انتشارًا وهي *طريقة السمبلكس* (The Simplex Method). هذه الطريقة تم تطويرها على يد العالم جورج دانتزيج (George Dantzig) وذلك في عام ١٩٤٧م. ومنذ ذلك العام، أثبتت هذه الطريقة فاعليتها في حل مسائل البرمجة الخطية. وتعتبر طريقة السمبلكس طريقة جبرية (Algebraic Procedure) إلا أن مفهومها يعتمد بشكل كبير على الطريقة الهندسية كما سوف نوضح لاحقًا.

حتى نستطيع استخدام طريقة السمبلكس لحل مسألة برمجة خطية، لابد من تحويل المسألة إلى صيغة مكافئة تسمى الصيغة القياسية. تحت العناوين التالية نبيِّن كيف يمكن تحويل مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية ثم نشرح الآلية التي تتبعها طريقة السمبلكس لإيجاد الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية. وسوف نفترض في هذا الفصل أن جميع القيود عبارة عن متراجحات على الصورة ≤ ، وجميع المتغيرات غير سالبة، بالإضافة لذلك فإن الطرف الأيمن في جميع القيود غير سالب. وبقية الحالات سوف تتم معالجتها في الفصل الرابع.

(٣,١) الصيغة القياسية
Standard Form

في تعريفنا لمسألة البرمجة الخطية، بينا أن القيود من الممكن أن تكون معادلات أو متراجحات، كما أن المتغيرات قد تكون غير سالبة أو غير محددة الإشارة. حتى نستخدم طريقة السمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية، لا بد أن نقوم بتحويل المسألة إلى صيغة مكافئة بحيث تحقق شروطًا معينة، تعرف هذه الصيغة ***بالصيغة القياسية*** ويمكن تعريفها كالتالي:

تعريف (٣,١): الصيغة القياسية Standard Form

تكون مسألة البرمجة الخطية في *الصيغة القياسية* ، إذا كانت جميع القيود عبارة عن معادلات طرفها الأيمن غير سالب، وكانت جميع المتغيرات غير سالبة.

مثال (٣,١)

المسألة التالية:

$$\begin{aligned} \max \ z &= x_1 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &\geq 3 \\ x_1 + 3x_2 &= 5 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ليست في الصيغة القياسية ؛ وذلك لأن القيد الأول عبارة عن متراجحة.

وكذلك المسألة التالية:

$$\begin{aligned} \max \ z &= x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 &= -5 \\ x_1 + 3x_2 &= 2 \\ x_1 &\geq 0 \end{aligned}$$

ليست في الصيغة القياسية لأن الطرف الأيمن في القيد الأول عدد سالب، كما أن المتغير x_2 غير محدد الإشارة. □

حتى نقوم بتحويل أي مسألة برمجة خطية إلى الصيغة القياسية يلزمنا تحويل المتراجحات إلى معادلات طرفها الأيمن غير سالب، وتحويل أي متغير غير محدد الإشارة إلى حاصل طرح متغيرين غير سالبين كما بينا في الفصل الأول. السؤال الآن: *كيف نحول متراجحة إلى معادلة*؟ نفرق هنا بين نوعين من المتراجحات ، المتراجحات من النوع "$\leq$" والمتراجحات من النوع "$\geq$".

(٣,١,١) تحويل المتراجحات من النوع "$\leq$" إلى معادلات

لتكن لدينا المتراجحة التالية $x_1 + x_2 \leq 3$ ، والتي نرغب في تحويلها إلى معادلة. في هذه الحالة نحتاج إلى تعريف المتغير المكمل s (slack variable) ليمثل الكمية غير المستخدمة

في القيد، ولأن الكمية التي تم استخدامها تساوي $x_1 + x_2$، والكمية المتاحة هي 3، إذًا s تعرف كالتالي:

$$s = 3 - x_1 - x_2$$

فمثلاً لو كانت $x_1 = 0,\ x_2 = 1$، فإن $s = 2$. نلاحظ أن x_1 و x_2 تحقق المتراجحة إذا وفقط إذا كانت $s \geq 0$. وعليه فالمتراجحة تصبح مكافئة للمعادلة:

$$x_1 + x_2 + s = 3 \quad ,s \geq 0$$

أي أن:

$$x_1 + x_2 \leq 3 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + s = 3,\ s \geq 0$$

(٣,١,٢) تحويل المتراجحات من النوع "$\geq$" إلى معادلات

لتكن لدينا المتراجحة التالية $x_1 + x_2 \geq 3$، ونريد تحويلها إلى معادلة. في هذه الحالة نعرف المتغير الزائد e (excess variable) بأنه الكمية التي تم استخدامها في القيد وتزيد عن 3. أي أن:

$$e = x_1 + x_2 - 3$$

فمثلاً لو كان $x_1 = 2, x_2 = 3$ فإن $e = 2$. وتصبح المتراجحة $x_1 + x_2 \geq 3$ مكافئة للمعادلة:

$$x_1 + x_2 - e = 3,\ \ e \geq 0.$$

(٣,١,٣) خطوات تحويل مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية

حتى نستخدم طريقة السمبلكس لحل مسائل البرمجة الخطية، يلزمنا في البداية تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية باستخدام الخطوات التالية:

١- التأكد أن الطرف الأيمن في كل قيد غير سالب. إذا كان هناك قيد يحتوي على طرف أيمن سالب فإننا نقوم بضرب طرفي القيد في -1.

٢- التأكد أن جميع المتغيرات غير سالبة، وإذا وجد متغير غير محدد الإشارة فإننا نقوم بكتابته كحاصل طرح متغيرين غير سالبين.

٣- نقوم بتحويل المتراجحات إلى معادلات وننقل المتغيرات في دالة الهدف إلى الطرف الأيسر. فمثلاً دالة الهدف $z = a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n$ تكتب بالصورة $z - a_1x_1 - a_2x_2 - ... - a_nx_n = 0$.

مثال (٣,٢)

حول المسألة التالية إلى الصيغة القياسية:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 14x_1 + 9x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 \le 10 \\
& x_1 + 2x_2 \le 5 \\
& 2x_1 + x_2 \ge 3 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

الحل

لتحويل هذه المسألة إلى الصيغة القياسية نقوم بنقل المتغيرات في دالة الهدف إلى الطرف الأيمن، كما نقوم بإضافة متغيرين مكملين للقيدين الأول والثاني، وطرح متغير زائد في القيد الأخير، فنحصل على:

$$\begin{aligned}
\max\ z - 14x_1 - 9x_2 \qquad &= 0 \\
\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 + s_1 \qquad &= 10 \\
x_1 + 2x_2 \quad + s_2 \qquad &= 5 \\
2x_1 + x_2 \qquad - e_1 &= 3 \\
x_1, x_2 \ge 0\ ,\ s_1, s_2 \ge 0\ ,\ e_1 \ge 0 &
\end{aligned}$$

□

مثال(٣,٣)

حول المسألة التالية إلى الصيغة القياسية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + x_2 = 2 \\ & x_1 - 2x_2 \le -1 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2 \text{ urs} \end{aligned}$$

الحل

نلاحظ أن الطرف الأيمن في القيد الثاني عبارة عن عدد سالب لذلك نقوم بضرب القيد الثاني في -1 فنحصل على القيد $-x_1 + 2x_2 \ge 1$. كما أن المتغير x_2 غير محدد الإشارة، لذلك نقوم بكتابته كالتالي :

$$x_2 = x_2^{'} - x_2^{''}, \qquad x_2^{'}, x_2^{''} \ge 0$$

الآن نستبدل x_2 بقيمته، فنحصل على :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + 3(x_2^{'} - x_2^{''}) \\ \text{s.t.}\quad & x_1 + (x_2^{'} - x_2^{''}) = 2 \\ & -x_1 + 2(x_2^{'} - x_2^{''}) \ge 1 \\ & x_1 \ge 0,\ x_2^{'}, x_2^{''} \ge 0 \end{aligned}$$

ونلاحظ أن جميع المتغيرات أصبحت غير سالبة. بعد ذلك نقوم بطرح متغير زائد من الطرف الأيسر في القيد الثاني فنحصل على :

$$\begin{aligned}
\max\ z - 4x_1 - 3x_2' + 3x_2'' &= 0 \\
\text{s.t.} \quad x_1 + x_2' - x_2'' &= 2 \\
-x_1 + 2x_2' - 2x_2'' - e_1 &= 1 \\
x_1, x_2', x_2'' \geq 0, e_1 &\geq 0
\end{aligned}$$

□

ملاحظة

من خلال الأمثلة السابقة، بينا كيف يمكن تحويل المتراجحات إلى معادلات وذلك بإضافة متغير مكمل أو طرح متغير زائد. لعله من المفيد أن نبين كيف يمكن تحويل المعادلات إلى متراجحات. إن أي معادلة يمكن تحويلها إلى متراجحتين أحدهما بإشارة $\geq$ والأخرى بإشارة $\leq$ بدلاً من إشارة المساواة. كمثال على ذلك، ليكن لدينا القيد $x_1 + 2x_2 = 4$ هذا القيد مكافئ للقيدين التاليين $x_1 + 2x_2 \leq 4$ و $x_1 + 2x_2 \geq 4$.

(٣,٢) المتغيرات الأساسية والحل الأساسي

Basic Variables and Basic Solution

إن المتغيرات الأساسية والحل الأساسي تلعب دورًا مهمًا في حل مسائل البرمجة الخطية، وخصوصًا طريقة السمبلكس. لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية المكتوبة في الصيغة القياسية:

$$\begin{aligned}
\max\ z - \mathbf{c}^T \mathbf{x} &= 0 \\
\text{s.t.} \quad A\mathbf{x} &= \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

المتغيرات الأساسية والحل الأساسي تعتمد على قيود المسألة والتي تتكون من نظام المعادلات $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$. في البداية، نقوم بتعريف الحل الأساسي، والمتغيرات الأساسية للنظام $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$.

تعريف(٣,٢): الحل الأساسي Basic Solution

ليكن لدينا النظام $A\mathbf{x}=\mathbf{b}$ (system) حيث A عبارة عن مصفوفة من النوع $m\times n$ $(n\geq m)$. *الحل الأساسي* لهذا النظام يمكن الحصول عليه بوضع $n-m$ من المتغيرات مساوية للصفر وتسمى *المتغيرات غير الأساسية* **(**NonBasic Variables, NBV**)** **،** ثم إيجاد قيمة بقية المتغيرات والتي تسمى *المتغيرات الأساسية* **(**Basic Variables, BV**)**.

التعريف (٣.٢)، يوضح لنا أحد طرائق حل نظام من المعادلات يحتوي على m من القيود، في n من المتغيرات، بحيث يكون عدد المتغيرات أكبر من أو يساوي عدد القيود، أي $(n\geq m)$. في البداية، نضع $n-m$ من المتغيرات مساوية للصفر فنحصل على m من القيود في m من المتغيرات (هذه هي المتغيرات الأساسية)، وهنا يمكن حل النظام الجديد مباشرة.

مثال (٣,٤)

أوجد حلا أساسيا للنظام:

$$\begin{aligned} x_1+x_2 \quad\quad &= 3 \\ -x_2+x_3 &= -1 \end{aligned}$$

الحل

هذا النظام يتكون من 3 متغيرات في معادلتين. لإيجاد الحل الأساسي نقوم باختيار $3-2=1$ من المتغيرات ونساويه بالصفر. يمكن اختيار أي متغير ليكون المتغير غير الأساسي. إذا اخترنا المتغير غير الأساسي ليكون $NBV=\{x_1\}$ ، (أي أن $x_1=0$)، فإن المتغيرات الأساسية تصبح $BV=\{x_2,x_3\}$. وفي هذه الحالة نحصل على الحل $x_2=3,\ x_3=2$ ، وعليه فالحل الأساسي في هذه الحالة:

$$\mathbf{v}_1=\begin{bmatrix}0\\3\\2\end{bmatrix}$$

أما إذا اخترنا المتغير غير الأساسي ليكون $NBV=\{x_2\}$ والمتغيرات الأساسية $BV=\{x_1,x_3\}$ ، فإن الحل الأساسي في هذه الحالة يكون:

$$\mathbf{v}_2=\begin{bmatrix}3\\0\\-1\end{bmatrix}$$

□

في بعض الحالات ينتج من اختيارنا للمتغيرات غير الأساسية، عدم إمكانية حل النظام الناتج، كما يوضح المثال التالي:

مثال (٣,٥)

لنأخذ النظام التالي:

$$\begin{aligned}5x_1+2x_2+3x_3&=9\\10x_1+4x_2+2x_3&=13\end{aligned}$$

ولتكن x_3 هي المتغير غير الأساسي (أي أن $x_3 = 0$)، في هذه الحالة نحصل على النظام:

$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &= 9 \\ 10x_1 + 4x_2 &= 13 \end{aligned}$$

وهذا النظام ليس له حل (لماذا؟)، وعليه فليس هناك حل أساسي في حالة اختيارنا للمتغير x_3 كمتغير غير أساسي. بينما لو اخترنا x_1 ليكون متغيرًا غير أساسي، فإننا نحصل على الحل الأساسي:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 21/8 \\ 5/4 \end{bmatrix}$$

□

هناك حالات خاصة من الحلول الأساسية تلعب دورًا هامًا في حل مسائل البرمجة الخطية، تعرف هذه الحلول باسم الحلول الأساسية المقبولة، وتعرف كما يلي:

تعريف(٣,٣): الحل الأساسي المقبول Basic Feasible Solution

أي حل أساسي للنظام $Ax = b$ تكون فيه جميع المتغيرات غير سالبة يسمى ***حلاً أساسياً مقبولاً*** (basic feasible solution) أو اختصارًا **(**bfs**)** .

في المثال (٣,٤)، كان الحل الأساسي $\mathbf{v}_1$ حلاً أساسيًا مقبولاً، بينما الحل الأساسي $\mathbf{v}_2$ لم يكن مقبولاً.

نعلم من نظرية النقاط الحدية (٢,٢) في الفصل الثاني، أنه إذا كان لمسألة البرمجة الخطية حل، فإنه لابد أن تكون هناك نقطة حدية أمثلية. النظرية التالية تبين أن هناك علاقة وثيقة بين النقاط الحدية لمسألة ما والحلول الأساسية المقبولة.

نظرية (٣,١)

في أي مسألة برمجة خطية، يوجد في منطقة الحل نقطة حدية وحيدة مقابل كل حل أساسي مقبول (bfs). بالإضافة لذلك، يوجد في منطقة الحل على الأقل حل أساسي مقبول (bfs) مقابل كل نقطة حدية.

المثال التالي يوضح العلاقة بين الحلول الأساسية المقبولة والنقاط الحدية:

مثال (٣,٦)

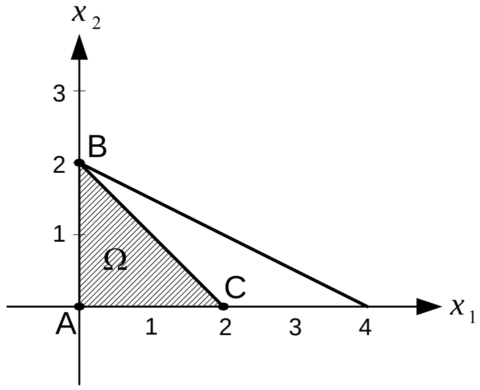
لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad 2x_1 + 4x_2 &\le 8 \\
x_1 + x_2 &\le 2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

ولكي نقوم بتحديد الحلول الأساسية المقبولة، يلزمنا في البداية كتابة المسألة في الصيغة القياسية:

$$\begin{aligned}
\max\ z - 3x_1 - 2x_2 \qquad &= 0 \\
\text{s.t.}\quad 2x_1 + 4x_2 + s_1 \qquad &= 8 \\
x_1 + x_2 \qquad + s_2 &= 2 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\ge 0.
\end{aligned}$$

ولتحديد النقاط الحدية، نقوم برسم منطقة الحل Ω كما في الشكل (٣,١).



شكل (٣,١)

نلاحظ أن النقاط الحدية لمنطقة الحل هي A, B, C. الآن نقوم بحساب جميع الحلول الأساسية، ثم نأخذ الحلول الأساسية المقبولة. مثلاً أحد الحلول الأساسية يمكن الحصول عليه باعتبار x_1, x_2 متغيرات غير أساسية، أي $x_1 = x_2 = 0$ ، ثم التعويض في القيود السابقة فنحصل على $s_1 = 8, \ s_2 = 2$. الجدول (٣,١) يبين العلاقة بين الحلول الأساسية المقبولة والنقاط الحدية:

جدول (٣,١).

المتغيرات الأساسية (BV)	المتغيرات غير الأساسية (NBV)	الحل الأساسي (bs) x_1	x_2	s_1	s_2	هل الحل مقبول؟	النقطة الحدية (EP)
s_1, s_2	x_1, x_2	0	0	8	2	نعم	A
x_1, s_1	x_2, s_2	2	0	4	0	نعم	C
x_1, s_2	x_2, s_1	4	0	0	-2	لا	_
x_2, s_1	x_1, s_2	0	2	0	0	نعم	B
x_2, s_2	x_1, s_1	0	2	0	0	نعم	B
x_1, x_2	s_1, s_2	0	2	0	0	نعم	B

نلاحظ في هذا المثال أن كل نقطة حدية تتفق مع حل أساسي مقبول على الأقل، فمثلاً النقطة الحدية B تتفق مع الحل الأساسي المقبول $x_1 = 0, x_2 = 2,$ $s_1 = 0, s_2 = 0$. □

تكمن أهمية النظرية (٣,١)، أنه عند حل مسألة برمجة خطية تحتوي على القيود $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ، فإنه يكفي أن نقوم بإيجاد الحلول الأساسية المقبولة للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ، ثم نقوم بحساب أفضل حل أساسي مقبول للنظام $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ (أي الحل الذي يجعل قيمة z أكبر ما يمكن في حالة مسألة القيمة العظمى "max" أو أصغر ما يمكن في حالة مسألة القيمة الصغرى "min").

نوضح الآن مفهومًا مهمًا سوف نحتاج إليه عند شرحنا لطريقة السمبلكس، ذلك هو الحل الأساسي المقبول المجاور.

تعريف(٣,٤): الحل الأساسي المقبول المجاور Adjacent bfs

لأي مسألة برمجة خطية تحتوي على m من القيود و n من المتغيرات، يقال إن حلين أساسيين مقبولين *متجاورين* **(**adjacent**)**، إذا كان الحلان يشتركان في $m-1$ من المتغيرات الأساسية، طبعًا مع احتمال اختلاف قيمة المتغيرات (أي أن الحلين يشتركان في جميع المتغيرات الأساسية ما عدا واحداً).

مثال (٣,٧)

لنعتبر نظام المعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 6 \\
4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 &= 8 \\
8x_1 - x_2 + 7x_3 + x_4 + 3x_5 &= 14
\end{aligned}$$

ولتكن لدينا الحلول الأساسية :

$$bfs_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix},\quad bfs_2=\begin{bmatrix}0\\2\\1\\0\\3\end{bmatrix},\quad bfs_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\4\\1\end{bmatrix}$$

نجد أن الحلين الأساسيين bfs_1 و bfs_2 متجاوران لأنهما يشتركان في $3-1=2$ من المتغيرات الأساسية (وهما المتغيران x_2 و x_3 كمتغيرين أساسيين). وكذلك الحلين الأساسيين bfs_2 و bfs_3 فهما متجاوران. أما الحلاَّن الأساسيَّان bfs_1 و bfs_3 فهما ليسا متجاورين. □

لو عدنا إلى المثال (٣,٦)، لوجدنا أن جميع الحلول الأساسية متجاورة وذلك لأن منطقة الحل عبارة عن مثلث. وبشكل عام، يكون الحلان الأساسيان المقبولان متجاورين إذا كان الحلان يقعان على نفس الضلع في حدود منطقة الحل.

(٣,٣) طريقة السمبلكس
The Simplex Method

تعتمد طريقة السمبلكس على إيجاد حل أساسي مقبول يسمى الحل الأساسي المبدئي (initial basic feasible solution) bfs_1، ثم بعد ذلك يتم تحديد ما إذا كان هذا الحل الأساسي أمثليًا أم لا. إذا كان هذا الحل أمثليًا ، فإن طريقة السمبلكس تتوقف. أما إذا لم يكن أمثليًا، فإن طريقة السمبلكس تنتقل إلى حل أساسي مقبول آخر (bfs_2) بحيث يكون مجاورًا للحل الأساسي المبدئي وتكون قيمة دالة الهدف عند

هذا الحل أفضل من أو تساوي قيمة دالة الهدف عند الحل bfs_1. بعد ذلك يتم بحث ما إذا كان الحل الأساسي bfs_2 أمثليا أم لا، إذا كان bfs_2 حلاً أمثليًا فإن الطريقة تتوقف، أما إذا لم يكن bfs_2 حلاً أمثليًا فإن الطريقة تستمر وذلك بالبحث عن حل أساسي مجاور ... وهكذا، حتى تتوصل إلى الحل الأمثل.

إن فكرة طريقة السمبلكس في حل مسائل البرمجة الخطية ترتكز على القاعدة التالية والتي يسهل إثباتها وذلك بملاحظة أن منطقة الحل مجموعة محدبة كما أن دالة الهدف دالة خطية.

نظرية (٣,٢): قاعدة اختبار الأمثلية Optimality Test

إذا كان bfs_k حلاً أساسياً مقبولاً في مسألة برمجة خطية لها على الأقل حل أمثلي، ولم يوجد حل أساسي مقبول مجاور لهذا الحل ذو قيمة أفضل لدالة الهدف فإن هذا الحل هو الحل الأمثل.

نستطيع تلخيص خطوات حل مسألة البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس كما يلي:

١- تحويل مسألة البرمجة الخطية إلى الصيغة القياسية.

٢- إيجاد أحد الحلول الأساسية المقبولة، يسمى حلاً مبدئيًا (initial bfs).

٣- تحديد ما إذا كان هذا الحل أمثليًا. إذا لم يكن كذلك فإننا نوجد حلاً أساسياً مقبولاً مجاوراً بحيث تكون قيمة دالة الهدف z عند هذا الحل أفضل منها عند الحل السابق.

٤- نعيد الخطوة ٣ باستخدام الحل الجديد.

إذا كانت مسألة البرمجة الخطية تتكون من m من القيود و n من المتغيرات فإن عدد طرائق اختيار m من المتغيرات الأساسية هو $\binom{n}{m}$، وعليه فإن عدد الحلول الأساسية المقبولة هو $\binom{n}{m}$ على الأكثر. وهذا عدد كبير؛ فمثلاً $\binom{25}{10} = 3,268,760$. ولكن من خلال التجارب في استخدام طريقة السمبلكس فإن هذه الطريقة لا تتطلب أكثر من اختبار $3m$ من الحلول الأساسية المقبولة.

عند استخدامنا لطريقة السمبلكس، نقوم بتحويل القيود ودالة الهدف إلى صيغة مكافئة للقيود ودالة الهدف الأصلية؛ وذلك لتسهيل إيجاد قيمة المتغيرات الأساسية، تسمى هذه الطريقة *الشكل القياسي*.

تعريف(٣,٥): الشكل القياسي Canonical Form

نقول إن نظاماً من معادلات خطية في *الشكل القياسي* إذا كانت كل معادلة تحتوي على متغير ذي معامل 1 في هذه المعادلة و 0 في بقية المعادلات.

في المثال التالي نشرح بالتفصيل طريقة السمبلكس ونبين آلية عمل هذه الطريقة من خلال الرسم.

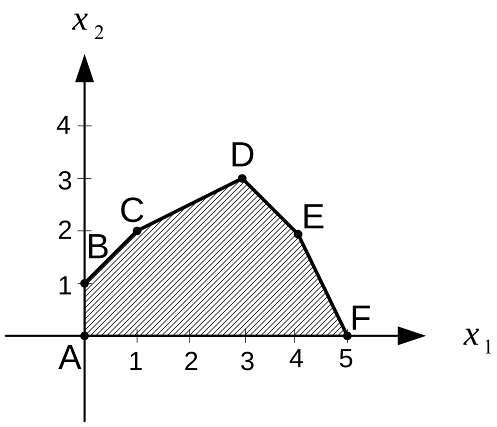
مثال(٣,٨)

أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned}
\max\ & z = x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\ & -x_1 + x_2 \le 1 \\
& -x_1 + 2x_2 \le 3 \\
& x_1 + x_2 \le 6 \\
& 2x_1 + x_2 \le 10 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

الحل

في البداية نقوم برسم منطقة الحل ونبين النقاط الحدية كما هو موضح في الشكل (٣،٢). بعد ذلك نقوم بعمل الخطوات الأربع السابقة لإيجاد حل لهذه المسألة.



شكل (٣،٢)

نعلم أن طريقة السمبلكس سوف تبدأ بحل أساسي مقبول وهو الحل المبدئي ؛ وللحصول عليه نقوم في البداية بتحويل المسألة إلى الصيغة القياسية.

تحويل المسألة للصيغة القياسية

بما أن جميع قيود هذه المسألة على الصورة "≤" ، إذًا يلزم أن نضيف متغيرًا مكملاً لكل قيد من القيود الأربعة ؛ وذلك للحصول على الصيغة القياسية ، كما نقوم بكتابة دالة الهدف بالصورة :

$$z - x_1 - 2x_2 = 0$$

$$\begin{aligned}
\max \quad & z - x_1 - 2x_2 && = 0 \\
\text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 + s_1 && = 1 \\
& -x_1 + 2x_2 \quad + s_2 && = 3 \\
& x_1 + x_2 \qquad + s_3 && = 6 \\
& 2x_1 + x_2 \qquad\quad + s_4 && = 10 \\
& x_i, s_j \geq 0 \quad \forall\, i = 1,2; \\
& \qquad\qquad\qquad j = 1,2,3,4
\end{aligned}$$

هذه الصيغة القياسية يمكن التعبير عنها على شكل جدول (tableau) كما هو موضح في الجدول (٣,٢).

جدول (٣,٢)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs
Row 0	⟦1⟧	-1	-2	0	0	0	0	0
Row 1		-1	1	⟦1⟧	0	0	0	1
Row 2		-1	2	0	⟦1⟧	0	0	3
Row 3		1	1	0	0	⟦1⟧	0	6
Row 4		2	1	0	0	0	⟦1⟧	10

في هذا الجدول، rhs ترمز لقيمة الطرف الأيمن في المعادلة (right hand side). نلاحظ أن نظام المعادلات الخطية في الجدول السابق كان على الشكل القياسي لأن معامل z في الصف Row 0 يساوي 1 وفي بقية الصفوف يساوي صفراً. بينما معامل s_1 في الصف Row 1 يساوي 1 وفي بقية الصفوف يساوي صفراً. وكذلك الحال بالنسبة لـ s_2 ، s_3 و s_4 في الصفوف Row 2 ، Row 3 و Row 4 على الترتيب.
الآن نختار هذه المتغيرات لتكون هي المتغيرات الأساسية ؛ إذًا :

$$\text{BV} = \{z, s_1, s_2, s_3, s_4\}$$

ومن ثَم تكون المتغيرات x_1 و x_2 غير أساسية، أي أن:

$$\text{NBV}=\{x_1,x_2\}$$

بهذا الاختيار للمتغيرات الأساسية وغير الأساسية بإمكاننا إيجاد قيمة المتغيرات الأساسية بوضع $x_1=x_2=0$ ، ثم حل المعادلات بالنسبة للمتغيرات الأساسية s_1,s_2,s_3,s_4. نلاحظ أن قيمة s_i تساوي الطرف الأيمن من القيد i. وبشكل عام فإن المتغيرات الأساسية دائمًا تساوي الطرف الأيمن من القيود؛ وذلك لأنها لا تظهر إلا في قيد واحد كما أن معاملتها في هذا القيد تساوي 1. فمثلاً نجد أن s_1 هو المتغير الأساسي في الصف Row 1 وقيمته تساوي الطرف الأيمن في هذا الصف أي $s_1=1$.

في الجدول (٣,٣)، أضفنا عمودًا وضعنا فيه قيمة المتغيرات الأساسية لكل صف. بالنسبة للصف Row 0 فإن المتغير الأساسي سوف يكون z ولكن لا يشترط أن يكون غير سالب على العكس من المتغيرات الأساسية الأخرى والتي يشترط أن تكون غير سالبة.

جدول (٣,٣)

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV
Row 0	⟦1⟧	-1	-2	0	0	0	0	0	$z=0$
Row 1		-1	1	⟦1⟧	0	0	0	1	$s_1=1$
Row 2		-1	2	0	⟦1⟧	0	0	3	$s_2=3$
Row 3		1	1	0	0	⟦1⟧	0	6	$s_3=6$
Row 4		2	1	0	0	0	⟦1⟧	10	$s_4=10$

إذًا الحل الأساسي المبدئي (bfs_1) هو الحل الذي يكون فيه $z=0$ ، $s_1=1$ ، $s_2=3$ ، $s_3=6$ ، $s_4=10$ ، $x_1=0$ ، $x_2=0$. نلاحظ أن هذا الحل يتفق مع النقطة A.

هل هذا الحل الأساسي المبدئي أمثلي؟ Is the Current BFS Optimal ?

متى ما حصلنا على حل أساسي مبدئي، فإننا نحتاج لتحديد ما إذا كان هذا الحل أمثليًا أم لا ؛ إذا لم يكن الحل أمثليًا ، فإننا نحاول البحث عن حل أساس مقبول مجاور تكون عنده قيمة دالة الهدف أكبر من الحل الحالي.

وللقيام بهذه الخطوة، نحاول أن نحدد ما إذا كان هناك طريقة لزيادة قيمة دالة الهدف عن طريق زيادة أحد المتغيرات غير الأساسية من قيمته الحالية وهي 0، وإبقاء بقية المتغيرات غير الأساسية مساوية للصفر. نلاحظ أن دالة الهدف $z = x_1 + 2x_2$ بالإمكان زيادتها بزيادة x_1 أو x_2. ولنفرض أننا زدنا x_1 بمقدار 1 وأبقينا x_2 مساوية للصفر، في هذه الحالة قيمة z سوف تزداد بمقدار 1. وبنفس الطريقة، لو أننا زدنا x_2 بمقدار 1 وأبقينا x_1 مساوية للصفر، فإن قيمة z سوف تزداد بمقدار 2. إذًا $z = 0$ ليس حلاً أمثليًا.

وللبحث عن حل أفضل نقوم باختيار حل أساسي مقبول مجاور bfs_2 بحيث تكون دالة الهدف عند هذا الحل أكبر منها عند bfs_1. ولكي نقوم بذلك، نختار أحد المتغيرات غير الأساسية ليكون متغيرًا أساسيًا ويسمى *المتغير الداخل* (Entering Variable)، كما نقوم باختيار أحد المتغيرات الأساسية ونجعله متغيرًا غير أساسي ويسمى *المتغير الخارج* (Leaving Variable). فيما يلي نبين الطريقة التي يتم بها اختيار المتغير الداخل والمتغير الخارج.

تحديد المتغير الداخل Determining the Entering Variable

لتحديد المتغير الداخل نلاحظ أن دالة الهدف $z = x_1 + 2x_2$ سوف تزداد بمقدار وحدة واحدة إذا زدنا x_1 بمقدار وحدة واحدة بينما تزداد z بمقدار وحدتين إذا زدنا x_2 بمقدار وحدة واحدة.

من هنا نلاحظ أنه من الأفضل اختيار x_2 كمتغير داخل. *وباختصار فإننا نختار المتغير الداخل (في مسألة القيمة العظمى "max") ليكون المتغير غير الأساسي الذي معامله في الصف* Row 0 *أكبر ما يمكن بإشارة سالبة* (إذا كان هناك أكثر من متغير يحقق هذه الخاصية، نختار أيًّا منهم بشكل عشوائي ليكون متغيرًا داخلاً). نلاحظ في مثالنا السابق أن معامل x_2 في الصف Row 0 كان مساويًا لـ -2 ، وهو أكبر عدد بإشارة سالبة. ومنه فإن x_2 سوف يكون متغيرا داخلا. وعليه فلابد أن نختار متغيرًا أساسيًا ليكون متغيرًا غير أساسي. *كيف نحدد المتغير الخارج؟*

تحديد المتغير الخارج Determining the Leaving Variable

لتحديد المتغير الخارج، يلزمنا معرفة أكبر كمية نستطيع أن نزيد بها x_2 بحيث تظل جميع المتغيرات الأساسية الأخرى غير سالبة. نلاحظ أنه عند زيادتنا لـ x_2 فإن قيمة المتغيرات الأساسية s_1,s_2,s_3,s_4 سوف تتغير. أي أن زيادة المتغير x_2 قد تؤدي إلى جعل أحد المتغيرات الأساسية سالبًا. ولملاحظة ذلك ننظر إلى الصف Row 1 ، والذي يمكن كتابته بالصورة التالية:

$$-x_1+x_2+s_1=1$$

ولأن x_1 متغير غير أساسي، إذاً $x_1=0$. وتصبح المعادلة $x_2+s_1=1$. وبما أن x_2 سوف يكون متغيرًا أساسيًا فإن قيمة s_1 سوف تتغير. فمثلاً لو زدنا x_2 بمقدار 1 فإن s_1 سوف تصبح مساوية للصفر. بينما لو زدنا x_2 بمقدار 2 فإن s_1 سوف تساوي -1 ، ... وهكذا.

بما أننا نبحث دائمًا عن حل أساسي مقبول إذًا لا بد أن تكون قيمة s_1 غير سالبة. أي $s_1\geq 0$. ومنه نحصل على:

$$s_1=1-x_2\geq 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2\leq 1$$

وبتطبيق هذه الطريقة على بقية الصفوف نحصل على الشروط التالية:

$$\text{Row 2}: \quad s_2 = 3 - 2x_2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \le 3/2$$
$$\text{Row 3}: \quad s_3 = 6 - x_2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \le 6$$
$$\text{Row 4}: \quad s_4 = 10 - x_2 \ge 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 \le 10$$

إذًا أكبر كمية نستطيع بها زيادة x_2 هي $\min\{1, 3/2, 6, 10\} = 1$ ؛ وذلك لأننا لو زدنا x_2 بمقدار أكبر من 1 لأصبحت s_1 سالبة ولن يكون الحل الأساسي الناتج مقبولاً.

نلاحظ أن الشروط على x_2 في الصف i هي عبارة عن حاصل القسمة التالي:

$$Ratio = \frac{rhs}{\text{معامـل المتغـير الـداخل}}$$

أي حاصل قسمة الطرف الأيمن في الصف i على معامل المتغير الداخل في الصف i بشرط أن يكون معامل المتغير الداخل موجبًا (لو كان معامل المتغير الداخل سالبًا أو مساويًا للصفر فإن المتغير الأساسي في هذا الصف سوف يظل موجبًا مهما زدنا قيمة المتغير الداخل، أي أنه لا يوجد قيود على الكمية التي نستطيع بها زيادة قيمة المتغير الداخل كما سوف نبين ذلك بالتفصيل لاحقًا). يسمى هذا الاختبار اختبار النسبة (Ratio Test). بعد ذلك نختار المتغير الخارج ليكون المتغير ذا اختبار النسبة الأقل، فمثلاً:

في الصف Row 1 نجد أن الحد الأعلى لزيادة x_2 هو $1/1=1$

في الصف Row 2 نجد أن الحد الأعلى لزيادة x_2 هو $3/2$

في الصف Row 3 نجد أن الحد الأعلى لزيادة x_2 هو $6/1 = 6$

في الصف Row 4 نجد أن الحد الأعلى لزيادة x_2 هو $10/1 = 10$

الآن نختار المتغير الخارج ليكون المتغير الذي فيه اختبار النسبة أقل ما يمكن. وفي هذه الحالة المتغير الخارج هو s_1. نقوم الآن بإضافة اختبار النسبة للجدول السابق فنحصل على جدول (٣,٤).

جدول (٣,٤)

z	x_1	$[\![x_2]\!]$	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV	Ratio
1	-1	-2	0	0	0	0	0	$z=0$	
	-1	[[1]]	1	0	0	0	1	$s_1=1$	[[1]]
	-1	2	0	1	0	0	3	$s_2=3$	3/2
	1	1	0	0	1	0	6	$s_3=6$	6
	2	1	0	0	0	1	10	$s_4=10$	10

إذًا x_2 هو المتغير الداخل و s_1 هو المتغير الخارج كما هو واضح في الجدول السابق. ويسمى العمود الذي يحوي المتغير الداخل، ***العمود المحوري*** (pivot column) ويسمى الصف الذي يحوي المتغير الخارج، ***الصف المحوري***(pivot row) . وأخيرًا، نطلق على العنصر الناتج من تقاطع العمود المحوري بالصف المحوري اسم ***العنصر المحوري***(pivot term) .

في الجدول (٣,٤) قمنا بوضع علامة ⟦ ⟧ على كل من المتغير الداخل، أصغر عدد في اختبار النسبة وكذلك العنصر المحوري. للانتقال من الحل الأساسي bfs_1 إلى حل أساسي آخر bfs_2 نقوم بجعل x_2 متغيرًا أساسيًا مساويًا للواحد (أصغر عدد في اختبار النسبة) وذلك في الصف المحوري Row1. ولعمل ذلك، نقوم باستخدام العمليات الصفية (row operations) لكي يكون معامل x_2 مساويًا للواحد في الصف Row1 بينما معامل x_2 يساوي 0 في الصفوف الأخرى. تسمى هذه العملية، ***تحوير*** (pivot) .

لكي نقوم بعمل تحوير للعنصر المحوري نستخدم طريقة جاوس جوردن للحذف (Gauss- Jordan elimination) والتي يمكن تلخيصها كالتالي :

١- ضرب الصف المحوري بعدد ثابت غير صفري وذلك لجعل العنصر المحوري مساويا لـ 1.

٢- ضرب الصف المحوري في عدد وإضافته إلى الصفوف الأخرى لجعل جميع عناصر العمود المحوري مساوية للصفر ماعدا العنصر المحوري.

في مثالنا، نجد أن معامل x_2 في الصف Row 1 يساوي 1 إذًا هذا الصف جاهز. ولكي نجعل معامل x_2 يساوي صفرًا في الصف Row 0 نقوم بضرب الصف Row 1 في العدد 2 وجمعه مع الصف Row 0 ، وكذلك نقوم بضرب الصف Row 1 في -2 وجمعه مع الصف Row 2، ثم نقوم بضرب الصف Row 1 في -1 وجمعه مع الصف Row 3، وأخيرًا نقوم بضرب الصف Row 1 في -1 وجمعه مع الصف Row 4 ، فنحصل على الجدول (٣,٥)، والذي يكون فيه x_2 متغيرًا أساسيًا في الصف Row 1 قيمته 1.

جدول (٣,٥).

z	x_1	$[\![x_2]\!]$	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV
1	-3	0	2	0	0	0	2	$z=2$
	-1	1	1	0	0	0	1	$x_2=1$
	1	0	-2	1	0	0	1	$s_2=1$
	2	0	-1	0	1	0	5	$s_3=5$
	3	0	-1	0	0	1	9	$s_4=9$

الذي حصل في هذه الخطوة، أن x_2 انتقل من قائمة المتغيرات غير الأساسية إلى قائمة المتغيرات الأساسية بينما انتقل s_1 من المتغيرات الأساسية إلى المتغيرات غير الأساسية.

BV	NBV
$s_1 \rightarrow$	x_1
s_2	$\leftarrow x_2$
s_3	
s_4	

أي أن المتغيرات الأساسية في هذه المرحلة هي $\text{BV} = \{z, x_2, s_2, s_3, s_4\}$ ، والمتغيرات غير الأساسية $\text{NBV}=\{x_1, s_1\}$. إذًا الحل الأساسي المقبول الثاني bfs_2 هو الحل الذي تكون فيه قيمة المتغيرات كالتالي: $z = 2$ ، $s_1 = 0$ ، $s_2 = 1$ ، $s_3 = 5$ ، $s_4 = 9$ ، $x_1 = 0$ ، $x_2 = 1$. نلاحظ أن هذا الحل يتفق مع النقطة B.

ملاحظة

نلاحظ أن طريقة السمبلكس بدأت من نقطة الأصل A كما هو موضح في الشكل (٣،٢)، ثم بعد ذلك كان هناك احتمالان للنقطة المجاورة التالية، فإما أن تنتقل إلى النقطة B أو النقطة F. في هذا المثال، تم الانتقال إلى النقطة B لأن معامل x_2 في دالة الهدف $z = x_1 + 2x_2$ أكبر من معامل x_1. إذًا طريقة السمبلكس سوف تتحرك في الاتجاه الذي تزيد فيه قيمة x_2 لنصل إلى النقطة الحدية B.

ولتحديد ما إذا كان الحل bfs_2 أمثليًا، نقوم بحساب قيمة z. فمن الصف الأول، نجد أن $z = 2 + 3x_1 - 2s_1$ ، ونلاحظ هنا أن زيادة s_1 سوف يقلل من قيمة z ، بينما زيادة x_1 سوف يزيد من قيمة z (أو مباشرة من الجدول نجد أن معامل x_1

هو أكبر عدد بإشارة سالبة في الصف Row 0). إذًا نختار x_1 ليكون المتغير الداخل. ولتحديد المتغير الخارج نحسب اختبار النسبة فنحصل على الجدول (٣،٦).

جدول (٣،٦).

z	$[\![x_1]\!]$	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV	Ratio
1	-3	0	2	0	0	0	2	$z=2$	
	-1	1	1	0	0	0	1	$x_2=1$	-
	$[\![1]\!]$	0	-1	1	0	0	1	$s_2=1$	$[\![1]\!]$
	2	0	-1	0	1	0	5	$s_3=5$	2/5
	3	0	-1	0	0	1	9	$s_4=9$	3

ملاحظة

في الصف الثاني وضعنا علامة "-" مكان اختبار النسبة ومعنى ذلك أنه في هذا الصف لا يوجد أي قيد على x_1 وذلك لأن معامل x_1 في هذا الصف سالب. لتوضيح ذلك نجد أن الشرط على x_1 في الصف الثاني هو $-x_1+x_2+s_1=1$ ، ولكن s_1 متغير غير أساسي فقيمته تساوي 0 ، ومن ثم يمكن كتابة هذا الشرط بالصورة $x_2=1+x_1$ ، ولأن $x_1 \geq 0$ إذا x_2 سوف يظل موجبًا مهما زدنا x_1 ؛ إذًا في هذا الصف لا يوجد أي حد أعلى لزيادة x_1 (وبالمثل لو كان معامل x_1 يساوي صفرًا مثلاً في أحد الصفوف، في هذه الحالة x_1 لن تظهر في هذا الصف وعليه فهذا الصف لا يمثل أي شرط على x_1).

إذًا المتغير الداخل في هذه الحالة هو x_1 ولأن أقل اختبار نسبة ظهر في الصف الثاني، إذًا الصف الثاني هو الصف المحوري، فيكون المتغير s_2 هو المتغير الخارج. نقوم الآن بتحوير الصف الثالث بالنسبة لـ x_1 (أي نضع معامل x_1 مساويًا للواحد في الصف الثاني، ومساويًا للصفر في الصفوف الأخرى) فنحصل على الجدول (٣،٧).

جدول (٣,٧).

z	x_1	x_2	$[\![s_1]\!]$	s_2	s_3	s_4	rhs	BV	Ratio
1	0	0	-4	3	0	0	5	$z=5$	
	0	1	-1	1	0	0	2	$x_2=2$	-
	1	0	-2	1	0	0	1	$x_1=1$	-
	0	0	$[\![3]\!]$	-2	1	0	3	$s_3=3$	$[\![1]\!]$
	0	0	5	-3	0	1	6	$s_4=6$	6/5

الذي حصل في هذه الخطوة أن x_1 قد انتقل من قائمة المتغيرات غير الأساسية إلى قائمة المتغيرات الأساسية بينما انتقل المتغير s_2 من المتغيرات الأساسية إلى المتغيرات غير الأساسية.

BV	NBV
x_2	$\leftarrow x_1$
$s_2 \rightarrow$	s_1
s_3	
s_4	

في هذه المرحلة أصبحت المتغيرات الأساسية $\text{BV}=\{z,x_2,x_1,s_3,s_4\}$ ، والمتغيرات غير الأساسية $\text{NBV}=\{s_2,s_1\}$. إذًا الحل الأساسي المقبول الثالث bfs_3 هو الحل الذي تكون فيه قيمة المتغيرات كالتالي: $z=5$ ، $s_1=0$ ، $s_2=0$ ، $s_3=3$ ، $s_4=6$ ، $x_1=1$ ، $x_2=2$. نلاحظ أن هذا الحل يتفق مع النقطة C.

ولتحديد ما إذا كان هذا الحل أمثليًا نلاحظ أن معامل s_1 في الصف Row 0 من الجدول (٣,٧) عدد سالب، إذًا نستطع زيادة دالة الهدف z بزيادة قيمة s_1 ، أي أن s_1 سوف يكون المتغير الداخل. ولتحديد المتغير الخارج نقوم بعمل اختبار النسبة كما هو مبين في الجدول السابق فنجد أن الصفين Row 1 و Row 2 لا يمثلان أي قيد

على المتغير s_1 بينما نجد أن الصف Row 3 لا يسمح بزيادة s_1 أكثر من 1 والصف Row 4 لا يسمح بزيادة s_1 أكثر من 6/5. إذًا الصف Row 3 هو الصف المحوري وعليه فإن s_3 هو المتغير الخارج. ومن ثم نقوم بعمل تحوير للصف Row 3 بالنسبة للمتغير s_1 ، كما هو مبين في الجدول (٣,٨).

جدول (٣,٨).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV
1	0	0	0	1/3	4/3	0	9	$z=9$
	0	1	0	1/3	1/3	0	3	$x_2=3$
	1	0	0	-1/3	2/3	0	3	$x_1=3$
	0	0	1	-2/3	1/3	0	1	$s_1=1$
	0	0	0	1/3	-5/3	0	1	$s_4=1$

الذي حصل في هذه الخطوة أن s_1 قد انتقل من قائمة المتغيرات غير الأساسية إلى قائمة المتغيرات الأساسية بينما انتقل المتغير s_3 من المتغيرات الأساسية إلى المتغيرات غير الأساسية ؛ إذًا الحل الأساسي المقبول الرابع bfs_4 هو الحل الذي تكون فيه قيمة المتغيرات كالتالي: $z=9$ ، $s_1=1$ ، $s_2=0$ ، $s_3=0$ ، $s_4=1$ ، $x_1=3$ ، $x_2=3$. نلاحظ أن هذا الحل يتفق مع النقطة D.

نأتي الآن للسؤال المعتاد *هل هذا الحل أمثلي*؟ الجواب نعم. والسبب أن معاملات المتغيرات في الصف Row 0 جميعها غير سالبة. ولتوضيح ذلك نلاحظ أن:

$$z=9-\frac{1}{3}s_2-\frac{4}{3}s_3$$

الآن لو زدنا أياً من s_2 أو s_3 فإن قيمة z سوف تقل. إذًا الحل الذي توصلنا إليه $z^*=9$ ، هو الحل أمثلي. وتكون فيه قيمة المتغيرات كالتالي: $z^*=9$ ، $s_1^*=1$ ، $s_2^*=0$ ، $s_3^*=0$ ، $s_4^*=1$ ، $x_1^*=3$ ، $x_2^*=3$.

يسمى الجدول (٣,٨) جدولاً أمثليًا ؛ وذلك لأنه لا يوجد متغير غير أساسي يمكن أن يزيد من قيمة z . □

تعريف(٣,٦): الجدول الأمثلي ("max") Optimal Tableau

يكون جدول السمبلكس أمثليًا في مسألة القيمة العظمى "max" إذا كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Row 0 غير سالبة.

في المثال السابق وضحنا خطوات طريقة السمبلكس لحل مسألة القيمة العظمى "max" بالتفصيل. الآن نأخذ مثالاً على مسألة قيمة صغرى "min" ونبين كيف يمكن حل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس:

مثال (٣,٩)

باستخدام طريقة السمبلكس ، أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned} &\min\ z = -3x_1 + x_2 \\ &\text{s.t.}\quad x_1 + x_2 \le 5 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 \le 8 \\ &\qquad x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

الحل

هناك طريقتان لحل المسألة ؛ الطريقة الأولى تعتمد على تحويل المسألة إلى مسألة قيمة عظمى وحل المسألة ومن ثم إيجاد الحل لمسألة القيمة الصغرى. الطريقة الثانية

تستخدم طريقة السمبلكس مباشرة لحل مسألة القيمة الصغرى مع تغيير شرط المتغير الداخل.

الطريقة الأولى

نلاحظ أن الحل الأمثلي لهذه المسألة هو النقطة (x_1,x_2) الموجودة في منطقة الحل والتي تجعل الدالة $z=-3x_1+x_2$ أقل ما يمكن. من الواضح أن هذه النقطة سوف تجعل الدالة $-z=3x_1-x_2$ أكبر ما يمكن (لماذا؟). أي أننا نستطيع حل المسألة السابقة عن طريق إيجاد قيمة $-z$ والتي تحقق :

$$\begin{aligned} \max\ -z &= 3x_1-x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1+x_2 &\le 5 \\ 2x_1+x_2 &\le 8 \\ x_1,x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الآن نستخدم جدول السمبلكس لحل هذه المسألة مع الأخذ بعين الاعتبار أن المتغير الأساسي في الصف Row 0 هو $-z$. نقوم الآن بإضافة متغيرات مكملة على القيود ثم نضعها في جدول فنحصل على الجدول (٣,٩).

جدول (٣,٩).

$-z$	$[\![x_1]\!]$	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
1	-3	1	0	0	0	$-z=0$	
	1	1	1	0	5	$s_1=5$	5
	$[\![2]\!]$	1	0	1	8	$s_2=8$	$[\![4]\!]$

في الجدول السابق نجد أن x_1 سوف يكون متغيرًا داخلاً، بينما s_2 سوف يكون متغيرًا خارجًا. ثم نقوم بعمل تحوير للعنصر 2. فنحصل على الجدول (٣,١٠).

جدول (٣,١٠).

BV	rhs	s_2	s_1	x_2	x_1	$-z$
$-z=12$	12	3/2	0	5/2	0	0
$s_1=1$	1	-1/2	1	1/2	0	
$x_1=4$	4	1/2	0	1/2	1	

الجدول (٣,١٠) هو جدول أمثلي، فيكون الحل الأمثلي لمسألة القيمة العظمى هو $-z^*=12$ ، $s_2^*=0$ ، $s_1^*=1$ ، $x_2^*=0$ ، $x_1^*=4$. إذًا حل المسألة الأصلية سوف يكون $z^*=-12$ ، $s_2^*=0$ ، $s_1^*=1$ ، $x_2^*=0$ ، $x_1^*=4$.

نستطيع تلخيص الطريقة الأولى أنه عند حل مسألة قيمة صغرى، نقوم بضرب دالة الهدف في -1 ثم نحول المسألة إلى $\max -z$. وبعد أن نحصل على الحل الأمثل لمسألة القيمة العظمى نقوم بضرب الحل الأمثل لدالة الهدف في العدد -1. أي أن:

$$\min z = -\max -z$$

الطريقة الثانية

نستخدم طريقة السمبلكس لحل هذه المسألة مع الأخذ بعين الاعتبار أننا نختار المتغير الداخل ليكون المتغير *ذا الإشارة الموجبة الأكبر* في الصف Row 0. ونتوقف إذا كانت جميع الأعداد في الصف Row 0 أقل من أو تساوي الصفر.

نبدأ الآن حل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس. بعد إضافة متغيرات مكملة للقيود نستطيع كتابة الصيغة القياسية للمسألة على شكل جدول كما هو موضح في الجدول (٣,١١).

جدول (٣,١١).

z	$[\![x_1]\!]$	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
1	3	-1	0	0	0	$z=0$	
	1	1	1	0	5	$s_1=5$	5
	$[\![2]\!]$	1	0	1	8	$s_2=8$	$[\![4]\!]$

في الجدول (٣,١٠)، نجد أن x_1 هو أكبر عدد بإشارة موجبة، إذًا x_1 سوف يكون متغيرًا داخلاً، بينما s_2 سوف يكون متغيرًا خارجًا لأن اختبار النسبة يساوي 4 وهو أصغر عدد. ثم نقوم بعمل تحوير للعنصر 2. فنحصل على الجدول (٣,١٢).

جدول (٣,١٢).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	BV
1	0	-5/2	0	-3/2	-12	$z=-12$
	0	1/2	1	-1/2	1	$s_1=1$
	1	1/2	0	1/2	4	$x_1=4$

الجدول (٣,١٢) هو جدول أمثلي لمسألة القيمة الصغرى لأن جميع المعاملات في الصف Row 0 غير موجبة. إذًا الحل الأمثلي لهذه المسألة سوف يكون $z^*=-12$ ، $s_2^*=0$ ، $s_1^*=1$ ، $x_2^*=0$ ، $x_1^*=4$.

تعريف(٣,٧): الجدول الأمثلي ("min") Optimal Tableau

يكون جدول السمبلكس أمثليًا في مسألة القيمة الصغرى "min" إذا كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Row 0 غير موجبة.

في ختام هذا الفصل، نجد أنه من المناسب أن نوضح بعض الملاحظات المهمة على طريقة السمبلكس ونبين الحالات التي من الممكن أن تظهر عند حل مسائل البرمجة الخطية. هذه الحالات سوف نتطرق لمعظمها بشكل أكثر توسعًا في الفصل الرابع (سوف يقتصر شرحنا على مسألة القيمة العظمى "max").

ملاحظات

١- تعتبر طريقة السمبلكس طريقة تكرارية (iterative algorithm) أي تقوم بإعادة الإجراء للحصول على إجابة أفضل كل مرة.

٢- تعتمد طريقة السمبلكس على تجميع معلومات عن الحل المجاور للحل الحالي بدلاً من فحص الحلول الأخرى.

٣- معاملات المتغيرات الأساسية (غير z) في الصف الأول لابد أن تكون مساوية للصفر.

٤- بشكل عام نجد أن طريقة السمبلكس تتوقف إذا كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف الأول أكبر من الصفر. إلا أنه في بعض الحالات قد يكون معامل أحد المتغيرات غير الأساسية مساويًا للصفر. وفي هذه الحالة نستطيع إدخال هذا المتغير للأساس دون تغيير قيمة z. فنحصل على حل أساسي مقبول آخر. وبهذا تكون مسألة البرمجة الخطية لها أكثر من حل (alternative optimal solutions) كما سوف نبين في الفصل القادم.

٥- إذا كانت معاملات المتغير الداخل في جميع القيود أقل من أو تساوي الصفر، ففي هذه الحالة لا يوجد أي شرط على الكمية التي نستطيع أن نزيد هذا المتغير بها؛ ولذلك فمسألة البرمجة الخطية في هذه الحالة تكون غير محدودة (unbounded LP).

٦- وأخيرًا فإننا نعلم أنه إذا كانت قيمة المتغيرات الأساسية في الحل الأساسي المقبول أكبر من الصفر فإنه في كل خطوة من خطوات السمبلكس سوف تزداد دالة الهدف. لكن لو كان أحد المتغيرات الأساسية مساويًا للصفر فإن دالة الهدف لن تتغير قيمتها في حالة خروج هذا المتغير. وفي هذه الحالة يكون الحل غير منتظم (degenerate). والمشكلة التي قد تظهر هنا هي أنه من الممكن أن نستمر في الانتقال من حل أساسي مقبول إلى آخر دون أن تتغير قيمة دالة الهدف. وقد نعود إلى الحل الأساسي الأول الذي بدأنا به وفي هذه الحالة يحصل دوران (cycling) ولن نستطيع أن نصل إلى الحل الأمثل أبدًا.

٧- إذا كان أحد القيود في المسألة الأصلية على الصورة $\geq$ أو $=$ أو إذا كان الطرف الأيمن من القيود عددًا سالبًا ففي هذه الحالات قد لا يكون الحل الصفري حلاً مبدئياً مقبولاً. لذلك يلزمنا أن نقوم بإيجاد حل أساسي مبدئي آخر، كما سوف نوضح في الفصل القادم.

تمارين الفصل الثالث

(٣،١) حوِّل مسألة البرمجة الخطية التالية للصيغة القياسية :

$$\begin{aligned}
\max\ \ & z = 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\ \ & 2x_1 + x_2 \le 5 \\
& x_1 + 4x_2 \ge 6 \\
& x_1 - x_2 = 6 \\
& x_1, x_2 \ge 0.
\end{aligned}$$

(٣،٢) حوِّل مسألة البرمجة الخطية التالية للصيغة القياسية :

$$\begin{aligned}
\max\ \ & z = x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\ \ & x_1 - 2x_2 \le -1 \\
& x_1 + 3x_2 \le 4 \\
& x_1 \ge -4,\ x_2\ urs.
\end{aligned}$$

(**تلميح:** استبدل x_1 بمتغير آخر بحيث يكون هذا المتغير غير سالب)

(٣،٣) أوجد حل المسألة التالية :

$$\begin{aligned}
\max\ z &= \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
\text{s. t.}\ \ \mathrm{A}\mathbf{x} &\le \mathbf{b} \\
\mathbf{x} &\ge \mathbf{0}
\end{aligned}$$

إذا علمت أن :

$$c = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 60 \\ 10 \\ 60 \end{bmatrix}$$

(٣،٤) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned} \max\ \ & z = x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(٣،٥) بدون استخدام طريقة السمبلكس، أوجد حل المسألة (٣،٤) إذا كانت دالة الهدف:

$$\max\ \ z = x_1 + 3x_2 + 5$$

(٣،٦) أوجد حل المسألة التالية بطريقتين مختلفتين باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned} \min\ \ & z = 4x_1 - x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_2 \le 5 \\ & x_1 - x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(٣،٧) ١- أوجد حل المسألة التالية باستخدام الفحص (inspection):

$$\begin{aligned} \max\ \ & z = x_1 \\ \text{s.t.}\ \ & 5x_1 + x_2 = 4 \\ & 6x_1 + x_3 = 8 \\ & 3x_1 + x_4 = 3 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0. \end{aligned}$$

٢- أوجد حل المسألة في فقرة (أ) إذا كانت دالة الهدف $\min\ \ z = x_1$.

(٣,٨) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned} \max\ \ z &= x_1 + 2x_2 + 5 \\ \text{s.t.}\qquad x_1 + x_2 &\le 2 \\ 2x_1 + 2x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

(٣,٩) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned} \max\ \ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 6 \\ x_1 + 3x_2 &\le 9 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٣,١٠) أوجد حل المسألة التالية معتمدًا على الحل الأمثل للمسألة (٣,٩).

$$\begin{aligned} \max\ \ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 5 \\ x_1 + 3x_2 &\le 6 \\ x_1 &\ge 0 \\ x_2 &\ge -1 \end{aligned}$$

(**تلميح:** استبدل x_2 بمتغير آخر بحيث يكون هذا المتغير أكبر من أو يساوي 0)

(٣,١١) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس:

$$\begin{aligned} \max\ \ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\qquad x_1 + x_2 &\le 6 \\ 2x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

(٣,١٢) لتكن لدينا المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \max \quad & z = x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \le 2 \\ & x_2 \le 2 \\ & x_1 + x_2 \le 3 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

١- ارسم منطقة الحل وبين النقاط الحدية.

٢- حدد جميع الحلول الأساسية المقبولة.

٣- اربط كل حل أساسي مقبول مع النقطة الحدية التي تمثله.

٤- أوجد حل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس مع توضيح خطوات السمبلكس باستخدام الرسم.

(٣,١٣) أوجد حل المسألة التالية باستخدام الفحص (inspection) :

$$\begin{aligned} \min \quad & z = x_1 - 3x_2 + 2x_3 \\ \text{s.t.} \quad & -2 \le x_1 \le 3 \\ & 0 \le x_2 \le 4 \\ & 2 \le x_3 \le 5 \end{aligned}$$

(٣,١٤) ضع علامة صح أو خطأ أمام العبارات التالية مع التعليل :

١- في مسألة القيمة الصغرى، إذا كانت قيمة دالة الهدف عند حل أساسي مقبول bfs_1 أقل من قيمتها عند أي حل أساسي مقبول مجاور فإن هذا الحل bfs_1 يكون أمثليًا.

٢- قاعدة السمبلكس في اختيار المتغير الداخل تستخدم لأنها دائمًا تقود إلى أفضل حل أساسي مجاور (أي الحل الأساسي المجاور ذي أفضل قيمة لـ z).

٣- في اختبار النسبة نختار أصغر عدد لأننا لو اخترنا عددًا أكبر لحصلنا على حل أساسي قد لا يكون مقبولاً.

٤- النقطة $(1,1,1)$ هي حل أساسي مقبول للنظام:

٥-
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 \quad\quad &= 2 \\ -x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

٦- الجدول التالي هو أحد جداول طريقة السمبلكس:

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Rhs
1	1	-1	1	0	10
	0	0	0	1	2
	0	-2	1	0	3

(٣,١٥) اشرح السبب في أن الطرف الأيمن rhs في جدول السمبلكس لا يمكن أن يكون سالبًا بعد عمل أي تحوير.

الفصل الرابع

حالات خاصة في طريقة السمبلكس

Special Cases of the Simplex Algorithm

- **وجود أكثر من حل**
- **المسائل غير محدودة الحل**
- **الحل غير المنتظم**
- **طريقة M - الكبيرة**
- **طريقة المرحلتين**

في الفصل الثالث قمنا بشرح طريقة السمبلكس وذلك في حالة كون القيود على الشكل $\leq$ ، كما أن المسائل المطروحة كانت وحيدة الحل وكان الحل المبدئي هو النقطة $\mathbf{x = 0}$. يعد هذا الفصل تكملة للفصل السابق وسوف يتم من خلاله مناقشة الحالات الأخرى والتي لم تظهر معنا في الفصل السابق.

في هذا الفصل نناقش حالات خاصة قد تظهر في طريقة السمبلكس بحيث يوجد للمسألة أكثر من حل، أو تكون المسألة غير محدودة، أو يكون الحل غير منتظم. كما نناقش الحالات التي تكون فيها القيود على الشكل $\geq$ أو $=$.

وبشكل أكثر تفصيلاً ، نجد أن طريقة السمبلكس بشكل عام تحتاج إلى تدقيق في كل جدول للتثبُّت من أن جميع المتغيرات الأساسية لا تساوي الصفر وإلا كانت

المسألة غير منتظمة. في بعض الحالات قد يكون هناك متغيرًا داخلاً ولكن لا يوجد عليه أي شروط في اختبار النسبة، وفي هذه الحالة تكون المسألة غير محدودة. وأخيرًا في حال توصلنا إلى حل أمثلي فإننا نتثبَّت من أن معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف الأول غير مساوية للصفر؛ فإذا كان أحد هذه المتغيرات مساويًا للصفر فإن المسألة لها أكثر من حل.

كما أنه من الممكن أن تكون القيود على الشكل $\geq$ أو $=$، وفي هذه الحالة قد لا يكون الحل المبدئي الصفري مقبولاً. ولهذا نستخدم طريقة M–الكبيرة أو طريقة المرحلتين.

(٤,١) وجود أكثر من حل

Alternative Optimal Solutions

بينا في الفصل الثاني (٢,٥,١) من خلال الرسم، أن هناك بعض مسائل البرمجة الخطية لها أكثر من حل أمثلي. تحت هذا العنوان نبين كيف يمكن استخدام طريقة السمبلكس لتحديد ما إذا كانت المسألة لها حل وحيد أو لها أكثر من حل.

نعلم من خلال شرحنا لطريقة السمبلكس في مسألة القيمة العظمى أن معاملات المتغيرات الأساسية (غير z) في الصف الأول لابد أن تكون مساوية للصفر. كما أن طريقة السمبلكس تتوقف إذا كانت معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف الأول أكبر من أو تساوي الصفر.

إذا كانت جميع المعاملات في الصف الأول أكبر من الصفر فإن المسألة لها حل وحيد، أما إذا كان معامل أحد المتغيرات غير الأساسية مساويًا للصفر فإننا في هذه الحالة نستطيع اعتبار هذا المتغير متغيرًا داخلاً دون أن يحدث ذلك تغييرًا في قيمة دالة

الهدف z ، وبذلك نحصل على حل أساسي مقبول آخر ويكون لمسألة البرمجة الخطية أكثر من حل (alternative optimal solutions).

مثال (٤,١)

سوف نأخذ بعين الاعتبار المثال (٢,٩) الوارد في الفصل الثاني، حيث كانت مسألة البرمجة الخطية معطاة بالصورة:

$$\begin{aligned} \max\ & z = x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\ & x_1 + x_2 \le 5 \\ & 2x_1 - x_2 \le 1 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

والمطلوب حل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس.

الحل

هذه المسألة كما بينا في المثال (٢,٩) لها أكثر من حل، وهذه الحلول هي القطعة المستقيمة التي تربط النقطتين $(2,3)$ و $(0,5)$.

لحل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس نقوم بكتابة المسألة بالصيغة القياسية، ثم نضعها في جدول فنحصل على الجدول (٤,١).

جدول (٤,١).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
1	-1	-1	0	0	0	$z = 0$	
	1	1	1	0	5	$s_1 = 5$	5
	⟦2⟧	-1	0	1	1	$s_2 = 1$	1/2

في هذا الجدول نستطيع أن نختار x_1 أو x_2 كمتغير داخل، سوف نختار x_1 ليكون المتغير الداخل وفي هذه الحالة يكون s_2 متغيرًا خارجًا. بعد ذلك نقوم بعمل تحوير للعنصر المحوري 2 فنحصل على الجدول (٤,٢).

جدول (٤,٢).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
1	0	-3/2	0	1/2	1/2	$z=1/2$	
	0	⟦3/2⟧	1	-1/2	9/2	$s_1=9/2$	3
	1	-1/2	0	1/2	1/2	$x_1=1/2$	-

في هذا الجدول نجد أن x_2 سوف يكون المتغير الداخل و s_1 سوف يكون المتغير الخارج، وبعمل تحوير حول العنصر المحوري 3/2، نحصل على الجدول (٤,٣).

جدول (٤,٣).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
1	0	0	1	⟦0⟧	5	$z=5$	
	0	1	2/3	-1/3	3	$x_2=3$	-
	1	0	1/3	1/3	2	$x_1=2$	6

نلاحظ أننا استطعنا في الجدول السابق التوصل إلى الحل الأمثل $z^*=5$ عند الحل الأساسي المقبول $x_1^*=2, x_2^*=3, s_1^*=0, s_2^*=0$ وهذا الحل يتفق مع النقطة $(2,3)$.

نعلم أن معاملات المتغيرات الأساسية لابد أن تكون مساوية للصفر في الصف Row 0. ولكن في هذه المسألة نجد أنه يوجد متغير غير أساسي (s_2) معامله في الصف Row 0 يساوي 0. إذًا بإمكاننا أن نعتبر s_2 متغيرًا داخلاً دون أن يؤثر دخوله على

قيمة z ، *وذلك لأننا لن نحتاج إلى عمل أي تغـيير في الـصف* Row 0 . بعد ذلك وباعتبار s_2 متغيرًا داخلاً نستخدم اختبار النسبة ونجد أن المتغير الخارج هو x_1 . وبعمل تحوير حول العنصر المحوري 1/3 نحصل على الجدول (٤،٤).

جدول (٤،٤).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	BV
1	0	0	1	0	5	$z=5$
	1	1	1	0	5	$x_2=5$
	3	0	1	1	6	$s_2=6$

نلاحظ أن هناك حلاً أساسياً مقبولاً آخر وهو $x_1^*=0,\ x_2^*=5,\ s_1^*=0,\ s_2^*=6$ ويتفق هذا الحل مع النقطة (0,5) ، وقيمة z^* عند هذا الحل أيضًا تساوي 5.

وبما أننا استطعنا إيجاد حلين مختلفين لهذه المسألة ، فالمسألة لها أكثر من حل. وبما أن الحلين (2,3) و (0,5) هما حلان أمثليان لهذه المسألة ، إذًا القطعة المستقيمة الواصلة بينهما هي أيضًا حل أمثلي. إذًا ، الحل الأمثلي لهذه المسألة هو مجموعة النقاط :

$$\{(x,y):(x,y)=(1-\alpha)(2,3)+\alpha(0,5),\ 0\le\alpha\le1\} \quad \square$$

تسمى النقطة (x,y) *تركيباً محدباً* (convex combination) من النقطتين (2,3) و (0,5). فعلى سبيل المثال لو وضعنا $\alpha=0.5$ ، فإننا نحصل على الحل $(x_1,x_2)=(1,4)$.

(٤,٢) المسائل غير محدودة الحل
Unbounded LP

بينا في الفصل الثاني (٢,٥,٣) باستخدام الرسم أن هناك بعض المسائل التي تكون فيها دالة الهدف غير محدودة الحل. وذكرنا أن هذه الحالة تحدث في مسألة القيمة العظمى إذا كان من الممكن إيجاد نقاط في منطقة الحل تجعل دالة الهدف z تأخذ قيمًا متزايدة دون توقف.

تحت هذا العنوان سوف نوضح إمكانية معرفة ما إذا كانت المسألة محدودة الحل أم لا باستخدام طريقة السمبلكس. إذا كانت المسألة مسألة قيمة عظمى، وكان معامل أحد المتغيرات غير الأساسية في الصف الأول سالبًا، فإن المتغير غير الأساسي ذا أكبر معامل في الصف الأول بإشارة سالبة سوف يكون متغيرًا داخلاً. ولتحديد المتغير الخارج نستخدم اختبار النسبة (Ratio). إذا كانت معاملات هذا المتغير في جميع القيود أقل من أو تساوي الصفر، ففي هذه الحالة لا يوجد أي شرط على الكمية التي نستطيع أن نزيد بها هذا المتغير، ولذلك فمسألة البرمجة الخطية في هذه الحالة تكون مسألة غير محدودة الحل (unbounded LP).

المثال التالي يحتوي على مسألة برمجة خطية غير محدودة الحل:

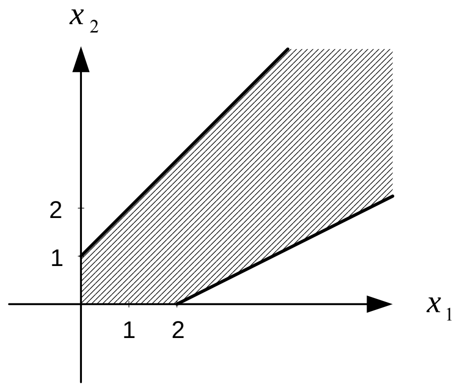
مثال(٤,٢)

أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس.

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 2x_1 + x_2 \\
\text{s.t.}\quad -x_1 + x_2 &\le 1 \\
x_1 - 2x_2 &\le 2 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

الحل

في البداية قمنا برسم القيود وتحديد منطقة الحل كما هو موضح في الشكل (٤,١). وبما أن المستقيمين لا يتقاطعان في الربع الأول، فإن منطقة الحل في هذه المسألة تكون غير محدودة.



شكل (٤,١)

نقوم الآن بتحويل المسألة إلى الصيغة القياسية وذلك بإضافة متغير مكمل لكل قيد. بعد ذلك نعيد كتابة كل من دالة الهدف والقيود في جدول، كما هو موضح في الجدول (٤,٥).

جدول (٤,٥).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
1	-2	-1	0	0	0	$z=0$	
	-1	1	1	0	1	$s_1=1$	-
	[[1]]	-2	0	1	2	$s_2=2$	2

من الواضح أن المتغير الداخل هو x_1 والمتغير الخارج هو s_2. نقوم بعمل تحوير للعنصر المحوري 1، فنحصل على الجدول (٤,٦).

جدول (٤,٦).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
1	0	-5	0	2	4	$z=4$	
	0	-1	1	1	3	$s_1=3$	-
	1	-2	0	1	2	$x_1=2$	-

في هذه الحالة x_2 سوف يكون المتغير الداخل. ولتحديد المتغير الخارج نجد أن اختبار النسبة لا يعطي أي قيود على الكمية التي نستطيع بها زيادة x_2 ؛ إذًا المسألة غير محدودة الحل. ولشرح ذلك نعيد كتابة الجدول السابق كالتالي:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_2 - 2s_2 + 4 \\ \text{s.t.}\quad -x_2 + s_1 + s_2 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 + s_2 &= 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

ولأن s_2 متغير غير أساسي في هذه المرحلة، إذًا $s_2 = 0$ ، ويمكننا كتابة المسألة بالصورة التالية:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 5x_2 + 4 \\ \text{s.t.}\quad -x_2 + s_1 &= 3 \\ x_1 - 2x_2 &= 2 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

أي أن القيود على الكمية التي نستطيع زيادة x_2 بها هي:

$$\begin{aligned} s_1 &= 3 + x_2 \\ x_1 &= 2 + 2x_2 \end{aligned}$$

نلاحظ من القيود أننا مهما زدنا x_2 فإن المتغيرات x_1 و s_1 سوف تظل غير سالبة. أي أنه ليس هناك أي شرط على الكمية التي نستطيع أن نزيد بها x_2. إذًا دالة الهدف

□

$z = 5x_2 + 4$ سوف تكون غير محدودة لأننا نستطيع زيادتها بزيادة قيمة x_2 والتي ليس عليها أي قيود.

(٤,٣) الحل غير المنتظم
Degeneracy

من ناحية نظرية، نجد أن طريقة السمبلكس قد تفشل في إيجاد الحل الأمثلي لمسألة البرمجة الخطية. ولكن في الواقع فإنه من النادر جدًا أن تفشل طريقة السمبلكس. سنتكلم تحت هذا العنوان عن الحالات التي قد تفشل فيها طريقة السمبلكس.

في مسألة القيمة العظمى، نستطيع أن نحدد قيمة z الجديدة (أي قيمة z بعد عمل تحوير للجدول الحالي) من خلال معرفتنا لقيمة المتغير الداخل الحالي وقيمة z الحالية. العلاقة التالية هي التي تربط بين قيمة z الجديدة وقيمتها الحالية:

قيمة z الجديدة = قيمة z الحالية – (قيمة المتغير الداخل في الحل الجديد) × (معامل المتغير الداخل في الصف $Row\ 0$ الحالي).

إذًا في مسألة القيمة العظمى، نجد أن زيادة المتغير الداخل بمقدار وحدة واحدة سوف يزيد دالة الهدف z بمقدار – (معامل المتغير الداخل في الصف $Row\ 0$ الحالي). كما نلاحظ أن (معامل المتغير الداخل في الصف $Row\ 0$ الحالي) < 0، بينما (قيمة المتغير الداخل في الحل الجديد) ≥ 0. نستنتج مما سبق أن هناك حالتين:

١- إذا كانت (قيمة المتغير الداخل في الحل الجديد) > 0، فإن (قيمة z الجديدة) $>$ (قيمة z الحالية).

٢- إذا كانت (قيمة المتغير الداخل في الحل الجديد) $= 0$، فإن (قيمة z الجديدة) $=$ (قيمة z الحالية).

في جميع المسائل السابقة كانت قيمة المتغيرات الأساسية أكبر من الصفر دائمًا. وفي هذه الحالة تسمى مسألة البرمجة الخطية *مسألة منتظمة* (nondegenerate LP). إذا كانت المسألة منتظمة، نجد أن قيمة z سوف تزداد في كل جدول عن الجدول الذي يسبقه؛ أي أنه من المستحيل، في حالة المسألة المنتظمة، أن نحصل على نفس الحل الأساسي المقبول في جدولين مختلفين. ولبيان ذلك نفرض أن قيمة $z = 18$ عند الحل الأساسي المقبول bfs_1، بعد عمل تحوير والحصول حل أساسي مقبول آخر bfs_2، نجد أن قيمة z عند هذا الحل سوف تكون $z > 18$. ولأنه من المستحيل أن تقل قيمة z في الجداول التالية، إذًا من المستحيل أن نعود للحل bfs_1. ولأن عدد الحلول الأساسية المقبولة منتهٍ، إذًا في هذه الحالة نضمن أن نصل للحل في عدد منتهٍ من الخطوات. ولكن إذا لم تكن المسألة منتظمة، فإنه من الممكن أن تفشل طريقة السمبلكس في الوصول للحل.

تعريف (٤,١): عدم الانتظام Degenerate

نقول إن مسألة البرمجة الخطية غير منتظمة، إذا كان هناك على الأقل حل أساسي مقبول بحيث يكون فيه أحد المتغيرات الأساسية مساويًا للصفر.

نأخذ الآن مثالاً نوضح فيه أحد حالات عدم الانتظام.

مثال (٤,٣)

أوجد حل المسألة التالية:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 6x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1 - 2x_2 &\le 0 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

بعد تحويل المسألة إلى الصيغة القياسية سوف نحصل على حل أساسي مقبول يكون فيه المتغير الأساسي s_2 مساويًا للصفر ؛ إذًا هذه المسألة غير منتظمة. نبين الآن كيفية حل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس ، ونشرح الصعوبات التي قد تواجهنا لكون هذه المسألة غير منتظمة.

جدول (٤,٧).

	z	$[\![x_1]\!]$	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
Row 0	1	-6	-5	0	0	0	$z=0$	
Row 1		1	1	1	0	3	$s_1=3$	3
Row 2		$[\![1]\!]$	-2	0	1	0	$s_2=0$	$[\![0]\!]$

من الجدول السابق يتضح أن المتغير الداخل سوف يكون x_1 بينما المتغير الخارج s_2. نقوم الآن بتحوير العنصر 1 في الصف Row 2 ، فنحصل على الجدول (٤,٨).

جدول (٤,٨).

	z	x_1	$[\![x_2]\!]$	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
Row 0	1	0	-17	0	12	0	$z=0$	
Row 1		0	$[\![3]\!]$	1	-1	3	$s_1=3$	$[\![1]\!]$
Row 2		1	-2	0	1	0	$x_1=0$	-

نلاحظ في الجدول السابق ، أن قيمة المتغيرات الأساسية z و s_1 لم تتغير، والسبب في ذلك أن المتغير الخارج في الخطوة السابقة كان مساويًا للصفر. في الجدول (٤,٨)، سوف

يكون x_2 متغيرًا داخلاً و s_1 متغيرًا خارجًا. وبعمل تحوير للعنصر 3 نحصل على الجدول الأمثلي (٤،٩).

جدول (٤،٩).

	z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs	BV	Ratio
Row 0	1	0	0	17/3	19/3	17	$z=17$	
Row 1		0	1	1/3	-1/3	1	$x_2=1$	
Row 2		1	0	2/3	1/3	2	$x_1=2$	

وبما أن جميع الأعداد في الصف الأول غير سالبة، إذًا الحل الذي حصلنا عليه $z^*=17$ هو حل أمثلي وبذلك توصلنا إلى حل السؤال. □

الآن نستطيع توضيح السبب في أن طريقة السمبلكس قد تواجه صعوبات عند حل مسألة برمجة خطية غير منتظمة.

لنفرض أننا بدأنا بحل مسألة برمجة خطية بحيث يكون الحل الأمثل فيها $z^*=15$. وليكن الحل المبدئي هو الحل الأساسي المقبول bfs_1 وقيمة دالة الهدف عند هذا الحل $z=10$. نظرا لأن هناك متغيرًا أساسيًا واحدًا على الأقل مساويًا للصفر فإنه من الممكن أن ننتقل إلى حل أساسي آخر bfs_2 ، وتكون قيمة دالة الهدف عند هذا الحل $z=10$ ، ثم بعد ذلك ننتقل إلى حل أساسي آخر bfs_3 ، وتكون قيمة دالة الهدف عند هذا الحل $z=10$ ، وهكذا ...، المشكلة التي قد نواجهها أن طريقة السمبلكس قد تعود بنا إلى الحل الأساسي المبدئي bfs_1 وهنا يحدث دوران (cycling). في حالة حدوث دوران، فإننا سوف نستمر بالدوران إلى ما لا نهاية في مجموعة من المتغيرات الأساسية المقبولة ولن تتغير قيمة دالة الهدف أبدًا؛ أي أننا لن نصل أبدا إلى $z^*=15$.

لنأخذ مثالاً آخر يبين لنا كيفية ظهور الحل غير المنتظم على الرغم من أن الجدول المبدئي لا يحوي متغيرًا أساسيًا مساويًا للصفر.

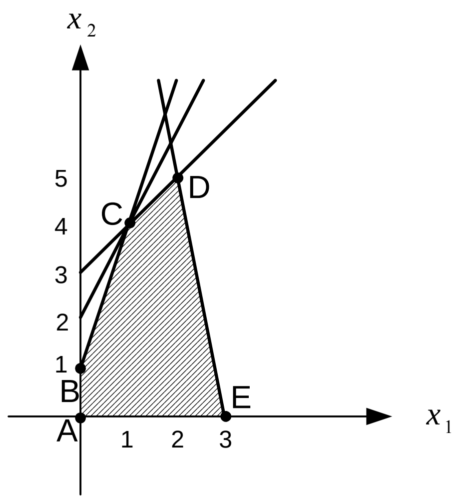
مثال (٤,٤)

أوجد حل المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad -3x_1 + x_2 &\le 1 \\ -2x_1 + x_2 &\le 2 \\ -x_1 + x_2 &\le 3 \\ 5x_1 + x_2 &\le 15 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

في البداية نقوم برسم المستقيمات التي تحدد منطقة الحل كما هو موضح في الشكل (٤,٢). نلاحظ أن النقطة C هي عبارة عن تقاطع ثلاثة مستقيمات.



شكل (٤,٢)

لحل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس ، نقوم في البداية بكتابة مسألة البرمجة الخطية في الصيغة القياسية ثم بعد ذلك نضعها في جدول ، كما هو موضح في الجدول (٤,١٠).

جدول (٤,١٠).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV	Ratio
1	-1	-2	0	0	0	0	0	$z=0$	
	-3	[[1]]	1	0	0	0	1	$s_1=1$	1
	-2	1	0	1	0	0	2	$s_2=2$	2
	-1	1	0	0	1	0	3	$s_3=3$	3
	5	1	0	0	0	1	15	$s_4=15$	15

نلاحظ أن الحل الأساسي المقبول الأول bfs_1 يتفق مع النقطة A الموضحة في الشكل (٤,٢). في هذه الحالة نجد أن المتغير x_2 سوف يكون هو المتغير الداخل بينما s_1 سيكون متغيرًا خارجًا. وبعمل تحوير للعنصر 1 ، نحصل على الجدول (٤,١١).

جدول (٤,١١).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV	Ratio
1	-7	0	2	0	0	0	2	$z=2$	
	-3	1	1	0	0	0	1	$x_2=1$	-
	[[1]]	0	-1	1	0	0	1	$s_2=1$	1
	2	0	-1	0	1	0	2	$s_3=2$	1
	8	0	-1	0	0	1	14	$s_4=14$	14/8

أي أننا انتقلنا الآن من الحل الأساسي bfs_1 إلى حل أساسي آخر bfs_2 وهذا الحل متفق مع النقطة B. ولتحديد المتغير الداخل ، نلاحظ أن قيمة معامل x_1 هي أكبر عدد بإشارة سالبة في الصف Row 0 ، إذًا x_1 هو المتغير الداخل. نلاحظ في هذا الجدول

أمرا مهما ، وهو أن اختبار النسبة في الصفين Row 2, Row 3 يساوي 1 ؛ إذًا نستطيع أن نختار أيًّا من المتغيرين s_2, s_3 ليكون متغيرًا خارجًا. وسوف نختار s_2 ليكون متغيرًا خارجًا ، ثم نقوم بعمل تحوير للعنصر 1 ، فنحصل على الجدول (٤,١٢).

جدول (٤,١٢).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV	Ratio
1	0	0	-5	7	0	0	9	$z=9$	
	0	1	-2	3	0	0	4	$x_2=4$	-
	1	0	-1	1	0	0	1	$x_1=1$	-
	0	0	⟦1⟧	-2	1	0	0	$s_3=0$	0
	0	0	7	-8	0	0	6	$s_4=6$	6/7

نلاحظ في الجدول السابق أن قيمة $s_3 = 0$ ، أي أن هذه المسألة غير منتظمة. كما نلاحظ أيضًا أن الحل الأساسي bfs_3 يتفق مع النقطة C . في هذا الجدول ، نجد أن المتغير s_1 سوف يكون متغيرًا داخلاً و s_3 متغيرًا خارجًا. ولأن المتغير الخارج متغير مكمل قيمته تساوي 0 ؛ إذًا قيمة الحل الأمثل في الجدول الجديد لا بد أن تتفق أيضًا مع النقطة C ، كما أن قيمة المتغيرات الأساسية الأخرى z, x_1, x_2, s_3 لن تتغير في الجدول الجديد والمتغير الداخل s_1 سوف تكون قيمته مساوية للصفر. نقوم الآن بعمل تحوير للعنصر 1 ، فنحصل على الجدول (٤,١٣).

جدول (٤,١٣).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV	Ratio
1	0	0	0	-3	5	0	9	$z=9$	
	0	1	0	-1	2	0	4	$x_2=4$	-
	1	0	0	-1	1	0	1	$x_1=1$	-
	0	0	1	-2	1	0	0	$s_1=0$	-
	0	0	0	⟦6⟧	-7	1	6	$s_4=6$	1

نلاحظ في هذا الجدول أن قيم المتغيرات الأساسية لم تتغير وبالأخص أن قيمة z ظلت ثابتة. هذا الحل الأساسي bfs_4 يتفق مع النقطة C ؛ وسبب ذلك أن النقطة C كانت تقاطع أكثر من مستقيمين كما هو واضح في الشكل (٤.٢). في الجدول السابق، s_2 سوف يكون متغيرًا داخلاً و s_4 متغيرًا خارجًا. وبعمل تحوير للعنصر المحوري 6، نحصل على الجدول (٤.١٤).

جدول (٤,١٤).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	s_4	rhs	BV
1	0	0	0	0	3/2	1/2	12	$z=12$
	0	1	0	0	5/6	1/6	5	$x_2=5$
	1	0	0	0	-1/6	1/6	2	$x_1=2$
	0	0	1	0	-4/3	1/3	2	$s_1=2$
	0	0	0	1	-7/6	1/6	1	$s_2=1$

هذا الجدول جدول أمثلي لأن معاملات الصف Row 0 غير سالبة، وبهذا تنتهي طريقة السمبلكس بإيجاد الحل الأمثل $z^*=12$ عند النقطة D.

ملاحظة

في المثال السابق كانت النقطة C عبارة عن تقاطع ثلاث مستقيمات لذلك فإن طريقة السمبلكس اعتبرت أن النقطة C تقاطع المستقيمين الأول والثاني ، ثم تقاطع المستقيم الثاني مع المستقيم الثالث ونتج من ذلك حلاّن أساسيان متفقان مع النقطة C باعتبارهما نقطتين مختلفتين.

وبشكل عـام نـستطيع إثبـات أنـه لكـي تكـون مـسألة البرمجـة الخطيـة بــ n مـن المتغيرات غير منتظمة ، فإنـه يلـزم أن يتقـاطع $n+1$ مـن القيـود علـى الأقـل عنـد نقطـة حدية.

(٤,٤) طريقة M الكبيرة

The Big M Method

نعلـم أن طريقة السمبلكس تعتمد على اختيار حل أساسـي مقبـول مبـدئياً *bfs* ثم الانتقال إلى حل أساسي آخر. في الأمثلة السابقة ، كنا نوجد الحـل الأساسـي المبـدئي باستخدام المتغيرات المكملة كمتغيرات أساسية ؛ وذلك لأن كل قيد كان علـى الـصورة $\leq$.

إذا كان أحد القيود من النوع $\geq$ أو $=$ ، أو كان الطرف الأيمـن في أحـد القيـود سالبًا ، فإنه في هذه الحالة قـد لا يكـون الحـل الأساسـي المبـدئي واضـحًا. ولكـي نحـصل علـى حـل أساسـي مبـدئي فإننـا نلجـأ إلى طريقـة M الكـبيرة (Big M Method)، أو طريقة المرحلتين (Two Phase Method) (والـتي سـوف نناقـشها في الفـصل القـادم). وتعتبر هاتان الطريقتان أحد طرائق السمبلكس.

إن طريقـة M الكـبيرة أحـد طرائـق الـسمبلكس الـتي تبـدأ بإيجـاد حـل مبـدئي بإضافة متغيرات اصطناعية (artificial variable) للمـسألة. وفي هـذه الحالـة لابـد مـن عمل تعديل على دالة الهدف لنحصل في النهاية علـى مـسألة مكافئـة للمـسألة الأصـلية بحيـث نـضمن أن تكـون المتغيرات الاصـطناعية مـساوية للـصفر .نوضـح ذلـك في المثـال التالي :

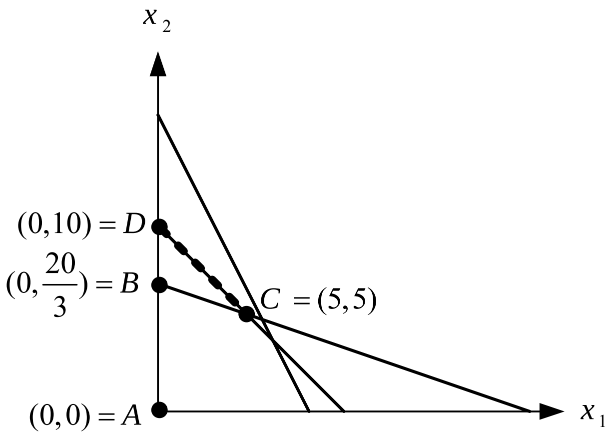
مثال (٤,٥)

أوجد حل مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ -x_1 - 3x_2 &\le -20 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

في البداية نقوم برسم منطقة الحل كما في الشكل (٤،٣).



شكل (٤،٣)

نلاحظ أن منطقة الحل هي القطعة المستقيمة الواصلة بين النقطتين C و D. من الواضح أن منطقة الحل لا تمر بنقطة الأصل. ولحل هذه المسألة، نستخدم طريقة السمبلكس ولكن نلاحظ أن الطرف الأيمن في القيد الثاني سالب؛ لذلك لابد من ضرب القيد الثاني في -1 ليصبح $x_1 + 3x_2 \ge 20$. بعد ذلك نقوم بكتابة الصيغة القياسية لمسألة البرمجة الخطية كالتالي:

$$\begin{aligned}
&Row\ 0: \quad z - 2x_1 - 3x_2 &&= 0\\
&Row\ 1: \quad 2x_1 + x_2 + s_1 &&= 16\\
&Row\ 2: \quad x_1 + 3x_2 \quad -e_1 &&= 20\\
&Row\ 3: \quad x_1 + x_2 &&= 10\\
&\qquad x_1, x_2, s_1, e_1 \ge 0
\end{aligned}$$

للبحث عن حل أساسي مقبول (bfs) فإنه بالإمكان اختيار $s_1 = 16$ كمتغير أساسي للصف Row1 . أما بالنسبة للصف Row 2 فإنه ليس من الممكن اعتبار e_1 كمتغير أساسي لأننا في هذه الحالة نحصل على $e_1 = -20$ وهذا يخالف شرط الإشارة $e_1 \ge 0$. وأخيرًا فإنه في الصف الثالث لا يظهر أي متغير يمكن فرضه كمتغير أساسي.

ولكي نتمكن من استخدام طريقة السمبلكس لابد من وجود متغيرات أساسية مقبولة في الصفين Row 2 و Row 3 . ولحل هذه المشكلة نضيف لكل قيد يحتوي على "$\ge$" أو "$=$" متغيرًا اصطناعيًا (artificial variable) لكي يكون متغيرًا أساسيًا في المرحلة الأولى. في هذه المسألة نحتاج لإضافة متغير اصطناعي للصفوف Row 2 و Row 3 . وهنا تصبح القيود بالشكل التالي :

$$\begin{aligned}
&Row\ 0: \quad z - 2x_1 - 3x_2 &&= 0\\
&Row\ 1: \quad 2x_1 + x_2 + s_1 &&= 16\\
&Row\ 2: \quad x_1 + 3x_2 \quad -e_1 + a_1 &&= 20\\
&Row\ 3: \quad x_1 + x_2 \quad + a_2 &&= 10\\
&\qquad x_1, x_2, s_1, e_1, a_1, a_2 \ge 0
\end{aligned}$$

وفي هذه الحالة نستطيع أن نختار الحل الأساسي المقبول bfs_1 والذي تكون فيه قيمة المتغيرات الأساسية كما يلي $bfs_1 : z = 0,\ s_1 = 16,\ a_1 = 20,\ a_2 = 10$.

بما أننا أضفنا متغيرات اصطناعية a_1 و a_2 للقيود ؛ إذًا لا نستطيع أن نضمن أن حل المسألة الأصلية مساوٍ لحل المسألة بعد إضافة المتغيرات الاصطناعية. وبناء عليه

فإن الحل النهائي لا بد أن يكون خاليًا من المتغيرات الاصطناعية ، أي أن قيمتها لابد أن تساوي صفرًا عند وصولنا للحل الأمثل وإلا فإن المسألة ليس لها حل.

ولكي نضمن أن جميع المتغيرات الاصطناعية سوف تكون مساوية للصفر نقوم بطرح Ma_i من دالة الهدف لكل متغير اصطناعي a_i (أما لو كانت المسألة min فإننا نضيف Ma_i لدالة الهدف عن كل متغير اصطناعي a_i). في هذه الحالة M ترمز لعدد موجب كبير جدًا. إذًا في هذا المثال سوف تكون دالة الهدف :

$$\max\ z = 2x_1 + 3x_2 - Ma_1 - Ma_2$$

أي أن الصف Row 0 سوف يتغير إلى :

$$\max\ z - 2x_1 - 3x_2 + Ma_1 + Ma_2 = 0$$

بعد أن قمنا بتغيير دالة الهدف بطرح Ma_i ، سوف تكون التكلفة عالية جدًا إذا كان أحد المتغيرات الاصطناعية موجبًا ؛ لأنه إذا كانت a_1 أو a_2 أكبر من الصفر فإن قيمة z سوف تكون صغيرة جدًا ؛ فمثلاً لو كانت $a_1 = 1\ ,\ a_2 = 0\ ,$ $M = 1000,000$ فإن $z \approx -1000,000$. إذًا في نهاية الحل لابد أن تكون قيمة جميع المتغيرات الاصطناعية مساوية للصفر. هذه الطريقة تسمى طريقة M الكبيرة (The Big M-Method).

نبين الآن خطوات حل مسألة البرمجة الخطية باستخدام طريقة M الكبيرة :

١- التثبُّت من أن الطرف الأيمن في كل قيد عبارة عن عدد غير سالب. فإذا كان الطرف الأيمن لأحد القيود سالبًا ، فإننا نقوم بضرب الطرفين في -1 .

٢- تحويل المسألة للصيغة القياسية ، ثم إضافة متغيرات اصطناعية للقيود التي من النوع "$\geq$" أو "$=$".

٣- القيام بإضافة $-Ma_i$ لدالة الهدف لكل متغير اصطناعي a_i في مسألة القيمة العظمى max، أو إضافة Ma_i في مسألة القيمة الصغرى min.

٤- بما أن المتغيرات الاصطناعية سوف تكون متغيرات أساسية مبدئية، إذًا لا بد من حذفها من الصف Row 0 في الجدول الأولي. ولاختيار المتغير الداخل في مسألة القيمة العظمى نبحث عن أكبر عدد بإشارة سالبة، مع الأخذ بعين الاعتبار أن M عدد كبير جدًا. فمثلاً نجد أن $M + 300 < 2M - 500$.

٥- بعد ذلك نحل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس. فإذا كانت جميع المتغيرات الاصطناعية في الجدول الأمثلي مساوية للصفر، فإننا نكون قد توصلنا إلى حل المسألة. أما إذا وجد متغير اصطناعي أكبر من الصفر فإن المسألة تكون غير ممكنة الحل.

ملاحظة

إن أي متغير اصطناعي يخرج من الأساس، يمكن حذف عموده من جدول السمبلكس؛ وذلك لأن الهدف من المتغيرات الاصطناعية هو إيجاد حل أساسي مقبول مبدئياً، ومتى ما خرج المتغير الاصطناعي من الأساس، فإننا لسنا بحاجة إليه في الجداول التالية.

نأتي الآن لحل المسألة السابقة. في البداية نقوم بكتابة المسألة على شكل جدول كما هو مبين في الجدول (٤،١٥).

جدول (٤,١٥).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs
1	-2	-3	0	0	M	M	0
	2	1	1	0	0	0	16
	1	3	0	-1	1	0	20
	1	1	0	0	0	1	10

وبما أن كلاً من a_1 و a_2 متغيران أساسيان في الصفين Row 2 و Row 3 على التوالي فلا بد من حذف معاملاتهما في الصف Row 0. وللقيام بذلك نقوم بضرب الصفين Row 2 و Row 3 بالعدد $-M$ ثم إضافتهما للصف Row 0. وبذلك نحصل على الجدول (٤,١٦).

جدول (٤,١٦).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs	BV	Ratio
1	$-2M-2$	$-4M-3$	0	M	0	0	$-30M$	$z=-30M$	
	2	1	1	0	0	0	16	$s_1=16$	16
	1	⟦3⟧	0	-1	1	0	20	$a_1=20$	20/3
	1	1	0	0	0	1	10	$a_2=10$	10

وبالرجوع إلى الشكل (٤,٣)، نجد أننا بدأنا بالنقطة A. ولأن النقطة A لاتنتمي إلى منطقة الحل، نلاحظ أنه يوجد على الأقل متغير اصطناعي كمتغير أساسي. في هذا المثال، هناك متغيران اصطناعيان أساسيان هما a_1 و a_2.

في الجدول (٤,١٦)، سوف يكون المتغير x_2 متغيرًا داخلاً (لأن معامله أكبر عدد بإشارة سالبة) و a_1 متغيرًا خارجًا. وبعمل تحوير للعنصر المحوري 3 نحصل على الجدول (٤,١٧). في هذا الجدول قمنا بحذف العمود الأول z.

جدول (٤,١٧).

x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	**rhs**	**BV**	**Ratio**
$\frac{-2M}{3}-1$	0	0	$\frac{-M}{3}-1$	$\frac{4M}{3}+1$	0	$\frac{-10M}{3}+20$	$z=\frac{-10M}{3}+20$	
5/3	0	1	1/3	-1/3	0	28/3	$s_1=28/3$	28/3
1/3	1	0	-1/3	1/3	0	20/3	$x_2=20/3$	20
⟦2/3⟧	0	0	1/3	-1/3	1	10/3	$a_2=10/3$	5

بما أن المتغير الاصطناعي a_1 أصبح متغيرًا غير أساسي فبإمكاننا حذفه من هـذا الجـدول لنحصل على الجدول (٤,١٨).

جدول (٤,١٨).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_2	rhs	BV	Ratio
1	$\frac{-2M}{3}-1$	5	0	$\frac{-M}{3}-1$	0	$\frac{-10M}{3}+20$	$z=\frac{-10M}{3}+20$	
	5/3	5	1	1/3	0	28/3	$s_1 = 28/3$	28/3
	1/3	1	0	-1/3	0	20/3	$x_2 = 20/3$	20
	$[\![2/3]\!]$	0	0	1/3	1	10/3	$a_2 = 10/3$	5

إن الحل الأساسي هنا يتفق مع النقطة B وهي خارج منطقة الحل ، وهـو مـا يفسر أن a_2 مـازال متغيرًا أساسيًا. مـن هـذا الجـدول نجـد أن x_1 سـوف يكـون متغيرًا داخـلاً و a_2 متغيرًا خارجًـا. نقـوم الآن بعمـل تحـوير حـول العنـصر المحـوري 2/3، فنحصل على الجدول (٤,١٩).

جدول (٤,١٩).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_2	rhs	BV	Ratio
1	0	0	0	-1/2	$\frac{2M+3}{2}$	25	$z = 25$	
	0	0	1	-1/2	-5/2	1	$s_1 = 1$	-
	0	1	0	-1/2	-1/2	5	$x_2 = 5$	-
	1	0	0	$[\![1/2]\!]$	2/3	5	$x_1 = 5$	10

في هـذا الجـدول نلاحـظ اختفـاء a_1 و a_2 كمـتغيرات أساسـية وهـذا يعـني أننـا وصلنا إلى منطقة الحل وهي النقطة C. وهنا انتهى دور المتغيرات الاصـطناعية a_1 و a_2 والتي كان الهدف منها إيصالنا إلى حل أساسي مقبـول داخـل منطقـة الحـل. الآن نلغـي

أعمـدة a_1 و a_2 ، فيكـون e_1 مـتغيرًا داخـلاً و x_1 مـتغيرًا خارجًـا و بعمـل تحـوير حـول العنصر المحوري 1/2 نحصل على الجدول (٤,٢٠).

جدول (٤,٢٠).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	rhs	BV
1	1	0	0	0	30	$z = 30$
	0	0	1	0	6	$s_1 = 6$
	1	1	0	0	10	$x_2 = 10$
	2	0	0	1	10	$e_1 = 10$

وبما أن جميع المعاملات في الصف الأول غير سالبة ؛ إذًا نكـون قد أوجدنا حل المسألة وهو $z^* = 30$ عند النقطة D. □

الآن نأخذ مثالاً على مسألة برمجة خطية تكون غير ممكنة الحل. ونبين فيها كيف يمكن لطريقة M الكبيرة أن تحدد أن المسألة ليس لها حل.

مثال (٤,٦)

أوجد حل المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \min\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_1 + 3x_2 &\ge 36 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

نحول المسألة للصيغة القياسية بإضافة المتغيران الاصطناعيان a_1 و a_2 للقيـدين الثاني والثالث، ثم نقوم بتعديل دالة الهدف لتصبح :

$$\min\ z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_1 + Ma_2$$

فتكون الصيغة النهائية للمسألة :

$$\begin{array}{llr}
\min & z - 2x_1 - 3x_2 \qquad - Ma_1 - Ma_2 & = 0 \\
\text{s.t.} & 2x_1 + x_2 + s_1 & = 16 \\
 & x_1 + 3x_2 \quad - e_1 + a_1 & = 36 \\
 & x_1 + x_2 \qquad\qquad + a_2 & = 10
\end{array}$$

بعد ذلك نقوم بوضع الصيغة النهائية للمسألة على شكل جدول، فنحصل على الجدول (٤,٢١).

جدول (٤,٢١).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs
1	-2	-3	0	0	$-M$	$-M$	0
	2	1	1	0	0	0	16
	1	3	0	-1	1	0	36
	1	1	0	0	0	1	10

بما أن المتغيرين a_1 و a_2 عبارة عن متغيرات أساسية في الصفين Row 2 و Row 3 على التوالي ؛ إذًا لا بد من جعل معاملهما مساويًا للصفر في الصف الأول. وللقيام بذلك نقوم بضرب الصف Row 2 بالعدد M ثم نضيفه للصف Row 0 للتخلص من معامل a_1 في الصف Row 0 ، ثم نقوم بضرب الصف Row 3 بالعدد M ثم نضيفه للصف Row 0 للتخلص من معامل a_2 في الصف Row 0 ، ومن ثَم نحصل على الجدول (٤,٢٢).

جدول (٤,٢٢).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs	BV	Ratio
1	$2M-2$	$4-3M$	0	$-M$	0	0	$46M$	$z=46M$	
	2	1	1	0	0	0	16	$s_1=16$	16
	1	3	0	-1	1	0	20	$a_1=36$	12
	1	[[1]]	0	0	0	1	10	$a_2=10$	10

في هذا الجدول نجد أن المتغير x_2 سيكون متغيرًا داخلاً ؛ وذلك لأن العدد $4-3M$ هو أكبر عدد بإشارة سالبة في الصف Row 0 و باستخدام اختبار النسبة نجد أن المتغير a_2 سوف يكون متغيرًا خارجًا. بعد ذلك نقوم بعمل تحوير للعنصر المحوري 1 ، فنحصل على الجدول (٤,٢٣).

جدول (٤,٢٣).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs	BV
1	$1-2M$	0	0	$-M$	0	$3-4M$	$6M+30$	$z=6M+30$
	1	0	1	0	0	-1	6	$s_1=6$
	-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_1=6$
	1	1	0	0	0	1	10	$x_2=10$

الآن انتهت طريقة السمبلكس ؛ لأن جميع المتغيرات في الصف Row 0 غير موجبة ، ولكن قيمة المتغير الاصطناعي a_1 أكبر من الصفر ، كما أن قيمة z مرتبطة بالعدد M إذًا هذه المسألة ليس لها حل (infeasible LP). □

(٤,٥) طريقة المرحلتين

The Tow Phase Method

إذا لم يكن هناك حل أساسي مقبول ومتاح ، فإننا في هذه الحالة نستطيع استخدام طريقة المرحلتين وهي طريقة مكافئة لطريقة M الكبيرة. وتتكون هذه الطريقة

من مرحلتين، في المرحلة الأولى نبحث عن حل أساسي مقبول للمسالة التي لدينا وتكون دالة الهدف في هذه المرحلة تصغير مجموع المتغيرات الاصطناعية. وفي المرحلة الثانية نوجد حل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس حيث تكون دالة الهدف في المرحلة الثانية هي دالة الهدف الأصلية، والقيود هي عبارة عن القيود الموجودة في الجدول الأخير من المرحلة الأولى.

ولحل مسألة برمجة خطية باستخدام طريقة المرحلتين، نقوم بعمل الخطوات التالية:

١- التثبُّت من أن الطرف الأيمن في كل قيد عبارة عن عدد غير سالب. فإذا كان الطرف الأيمن في أحد القيود عددًا سالبًا؛ فإننا نقوم بضرب الطرفين في هذا القيد بالعدد -1.

٢- تحويل المسألة للصيغة القياسية، ثم إضافة متغيرات اصطناعية للقيود التي من النوع "$\geq$" أو "$=$".

٣- إهمال دالة الهدف الأصلية، والقيام بحل مسألة برمجة خطية تكون دالة الهدف فيها:

$$\min \;\; y = \sum a_i$$

حيث $\sum a_i$ تمثل مجموع المتغيرات الاصطناعية.

إذا كان لمسألة البرمجة الخطية حل؛ فإن حل هذه المسألة سوف يجعل قيمة y تساوي 0. هذه الخطوة هي المرحلة الأولى (phase I).

٤- إذا كانت $y > 0$ في الجدول الأمثلي في المرحلة الأولى؛ فإن المسألة ليس لها حل.

٥- إذا كانت جميع المتغيرات الاصطناعية غير أساسية في المرحلة الأولى؛ فإن المسألة لها حل وفي هذه الحالة نحذف أعمدة المتغيرات الاصطناعية من الجدول الأمثلي في المرحلة الأولى. بعد ذلك نقوم بحل دالة الهدف للمسألة

الأصلية مع قيود الجدول الأمثلي في المرحلة الأولى. وتسمى هذه الخطوة بالمرحلة الثانية (phase II).

المثال التالي يوضح الخطوات العملية لحل مسألة برمجة خطية باستخدام طريقة المرحلتين.

مثال (٤,٧)

في هذا المثال سوف نقوم بحل المثال السابق (٤,٥) باستخدام طريقة المرحلتين. كانت مسألة البرمجة الخطية معطاة بالصورة:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ -x_1 - 3x_2 &\le -20 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

وكما فعلنا في طريقة M الكبيرة، نقوم بإضافة المتغيرات المكملة، والزائدة، والاصطناعية للقيود فنحصل على القيود التالية:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 16 \\ x_1 + 3x_2 \qquad - e_1 + a_1 \qquad &= 20 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + a_2 &= 10 \\ x_1, x_2, s_1, e_1, a_1, a_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى (Phase I)

في هذه المرحلة، نقوم بإهمال دالة الهدف في المسألة الأصلية ونستبدلها بدالة الهدف التالية:

$$\min\ y = a_1 + a_2$$

أي أننا نبحث عن أقل قيمة للمقدار $a_1 + a_2$. فإذا كان هناك حل أساسي مقبول ؛ فإن قيمة المتغيرات الاصطناعية سوف تساوي صفرًا، أما إذا لم يكن هناك حل أساسي مقبول ؛ فإن أحد هذه المتغيرات (وربما كلها) سوف يكون موجبًا.

ملاحظة

في المرحلة الأولى، دائمًا نعتبر الدالة $\min\ y$ سواء أكان السؤال الأصلي مسألة قيمة عظمى "max" أم مسألة قيمة صغرى "min".

ولحل المرحلة الأولى نقوم بإيجاد حل المسألة :

$$\begin{aligned}
&\min\ y = a_1 + a_2 \\
&\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 + s_1 = 16 \\
&\qquad x_1 + 3x_2 - e_1 + a_1 = 20 \\
&\qquad x_1 + x_2 + a_2 = 10 \\
&\qquad x_1, x_2, s_1, e_1, a_1, a_2 \geq 0
\end{aligned}$$

والتي يمكن كتابتها على شكل جدول كما هو موضح في الجدول (٤,٢٤).

جدول (٤,٢٤).

y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	Rhs
1	0	0	0	0	-1	-1	0
	2	1	1	0	0	0	16
	1	3	0	-1	1	0	20
	1	1	0	0	0	1	10

وبما أن المتغيرات الأساسية هي a_1 و a_2 إذًا لابد من حذفهما من الصف Row 0 وذلك بجمع الصفين Row 2 وRow 3 إلى الصف Row 0 ، فنحصل على الجدول (٤,٢٥).

جدول (٤,٢٥).

y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs	BV	Ratio
1	2	4	0	-1	0	0	30	$y=30$	
	1	1	1	0	0	0	16	$s_1=16$	16
	1	⟦3⟧	0	-1	1	0	20	$a_1=20$	20/3
	1	1	0	0	0	1	10	$a_2=10$	10

هذا الحل يتفق مع النقطة A في الشكل (٤,٣). وفي الجدول السابق نجد أن x_2 متغير داخل و a_1 متغير خارج ، وبعمل تحوير للعنصر 3 نحصل على الجدول (٤,٢٦).

جدول (٤,٢٦).

y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs	BV	Ratio
1	2/3	0	0	1/3	-4/3	0	10/3	$y=10/3$	
	5/3	0	1	1/3	-1/3	0	28/3	$s_1=28/3$	28/5
	1/3	1	1	-1/3	1/3	0	20/3	$x_2=20/3$	20
	⟦2/3⟧	0	0	1/3	-1/3	0	10/3	$a_2=10/3$	5

هذا الحل يتفق مع النقطة B. في هذا الجدول سوف يكون x_1 متغيرًا داخلاً و a_2 متغيرًا خارجًا ، وبعمل تحوير للعنصر المحوري 2/3 نحصل على الجدول (٤,٢٧).

جدول (٤,٢٧).

y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs	BV
1	0	0	0	0	-1	-1	0	$y=0$
	0	0	1	-1/2	1/2	-5/2	1	$s_1=1$
	0	1	0	- 1/2	-1/2	-1/2	5	$x_2=5$
	1	0	0	1/2	-1/2	3/2	5	$x_1=5$

وهذا الحل يتفق مع النقطة C. وفي هذا الجدول نجد أن الصف Row 0 لا يحوي أي عدد موجب، وبذلك يكون الجدول (٤,٢٧) جدولاً أمثليًا وتنتهي المرحلة الأولى. ونلاحظ في هذا الجدول أن $y = 0$ ، كما أن a_1 و a_2 أصبحا متغيرين غير أساسيين وقيمتهما تساوي صفرًا. إذًا نستنتج من المرحلة الأولى أنه يوجد حل أساسي مقبول bfs_1 تكون فيه قيمة المتغيرات كالتالي: $bfs_1 : x_1 = 5, x_2 = 5, s_1 = 1, e_1 = 0$.

المرحلة الثانية (Phase II)

بما أن هدفنا من إضافة المتغيرات الاصطناعية كان إيجاد حل أساسي مقبول، إذًا فقد انتفت حاجتنا لها الآن. لذلك نقوم بحذفها من الجدول السابق ثم نبدأ بحل المسألة الأصلية ويكون الحل الأساسي المقبول المبدئي للمسألة الأصلية هو bfs_1.
في المرحلة الثانية نقوم باستبدال الصف Row 0 في الجدول السابق بدالة الهدف الأصلية فنحصل على الجدول (٤,٢٨).

جدول (٤,٢٨).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	rhs
1	-2	-3	0	0	0
	0	0	1	-1/2	1
	0	1	0	-1/2	5
	1	0	0	1/2	5

المتغيرات الأساسية في هذا الجدول سوف تكون z, s_1, x_2, x_1 ، ولكن لأن معاملات x_1 و x_2 لا تساوي الصفر في الصف Row 0، إذًا لا بد من حذفهما من الصف Row 0 وذلك بضرب الصف Row 2 في 3 وإضافته إلى الصف Row 0 ثم ضرب الصف Row 3 في 2 وإضافته إلى الصف Row 0، وبذلك نحصل على الجدول (٤,٢٩).

جدول (٤,٢٩).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	rhs	BV	Ratio
1	0	0	0	-1/2	25	$z=25$	
	0	0	1	-1/2	1	$s_1=1$	-
	0	1	0	-1/2	5	$x_2=5$	-
	1	0	0	⟦1/2⟧	5	$x_1=5$	10

في هذا الجدول المتغير الداخل هو e_1 والمتغير الخارج هو x_1 ، وبعمل تحوير للعنصر 1/2 ، نحصل على الجدول (٤,٣٠).

جدول (٤,٣٠).

z	x_1	x_2	s_1	e_1	rhs	BV
1	1	0	0	0	30	$z=30$
	1	0	1	0	6	$s_1=6$
	1	1	0	0	10	$x_2=10$
	2	0	0	1	10	$e_1=10$

وبهذا نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثلي $z^*=30$ عندما تكون قيم المتغيرات $x_1^*=0\ ,\ x_2^*=10\ ,\ s_1^*=6\ ,\ e_1^*=10$. □

نأخذ الآن مثالاً آخر ونبين فيه كيف نستطيع التعرف على أن مسألة البرمجة الخطية ليس لها حل وذلك باستخدام طريقة المرحلتين:

مثال (٤,٨)

سوف نقوم في هذا المثال بحل مسألة البرمجة الخطية الواردة في المثال (٤,٦) باستخدام طريقة المرحلتين.

$$\begin{aligned} \min\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 16 \\ x_1 + 3x_2 &\ge 36 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

وكما فعلنا في طريقة M الكبيرة، نقوم بإضافة متغيرات مكملة ، زائدة واصطناعية فنحصل على القيود التالية :

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad &= 16 \\ x_1 + 3x_2 \qquad -e_1 + a_1 \qquad &= 36 \\ x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + a_2 &= 10 \\ x_1, x_2, s_1, e_1, a_1, a_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

المرحلة الأولى

في المرحلة الأولى، نحاول أن نجد حلاً أساسياً مقبولاً ؛ ولذلك نقوم بإهمال دالة الهدف في المسألة الأصلية ونستبدلها بدالة الهدف التالية :

$$\min\ y = a_1 + a_2$$

بعد ذلك نوجد حل المسألة التالية :

$$\begin{aligned} &\min\ y = a_1 + a_2 \\ &\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad\qquad\qquad = 16 \\ &\qquad\quad x_1 + 3x_2 \qquad -e_1 + a_1 \qquad = 36 \\ &\qquad\quad x_1 + x_2 \qquad\qquad\qquad + a_2 = 10 \\ &\qquad\quad x_1, x_2, s_1, e_1, a_1, a_2 \ge 0 \end{aligned}$$

والتي يمكن كتابتها على شكل جدول كما هو موضح في الجدول (٤.٣١).

جدول (٤,٣١).

y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs
1	0	0	0	0	-1	-1	0
	2	1	1	0	0	0	16
	1	3	0	-1	1	0	36
	1	1	0	0	0	1	10

وبما أن a_1 و a_2 عبارة عن متغيرين أساسيين ؛ إذًا لابد من حذفهما من الصف Row 0 وذلك بجمع الصفين Row 2 وRow 3 إلى الصف Row 0 ، فينتج من ذلك الجدول (٤,٣٢).

جدول (٤,٣٢).

y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs	BV	Ratio
1	2	4	0	-1	0	0	46	$y=46$	
	2	1	1	0	0	0	16	$s_1=16$	16
	1	3	0	-1	1	0	36	$a_1=36$	12
	1	[[1]]	0	0	0	1	10	$a_2=10$	10

في هذا الجدول، نجد أن x_2 متغير داخل و a_2 متغير خارج. وبعمل تحوير للعنصر المحوري 1 ، نحصل على الجدول (٤,٣٣).

جدول (٤,٣٣).

y	x_1	x_2	s_1	e_1	a_1	a_2	rhs	BV
1	-2	0	0	-1	0	-4	6	$y=6$
	1	0	1	1	0	-1	6	$s_1=6$
	-2	0	0	-1	1	-3	6	$a_1=6$
	1	1	0	0	0	1	10	$x_2=10$

وبما أن جميع المعاملات في الصف Row 0 سالبة إذًا هذا الحل هو الحل الأمثلي للمرحلة الأولى. ولكن نلاحظ أن الحل الأمثلي هو $y = 6 > 0$ ، كما أن $a_1 = 6 > 0$ مازال متغيرًا أساسيًا. إذًا مسألة البرمجة الخطية ليس لها حل ؛ وذلك لوجود متغير اصطناعي كمتغير أساسي في الجدول الأمثلي.

ونلاحظ أننا لو قمنا برسم القيود لهذه المسألة، لوجدنا منطقة الحل عبارة عن مجموعة خالية، أي أن $\Omega = \phi$ ، وهذا هو السبب في أن المسألة ليس لها حل. □

تمارين الفصل الرابع

(٤.١) وضح باستخدام طريقة السمبلكس أن المسألة التالية لها أكثر من حل، وأوجد ثلاث حلول أساسية أمثلية لها:

$$\begin{aligned} \max\ \ & z = 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 \le 8 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(٤.٢) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \min\ \ & z = x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.}\ \ & x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & 2x_1 + x_2 \le 5 \\ & x_1, x_2 \ge 0. \end{aligned}$$

(٤.٣) ١- أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس، ثم بين نوع المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \max\ & z = 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.}\ \ & 4x_1 + 2x_2 \le 12 \\ & 4x_1 + x_2 \le 10 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

٢- ارسم منطقة الحل ووضح سبب اختيارك في الفقرة (١).

(٤،٤) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل، لها أكثر من حل، غير محدودة الحل، غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.}\quad & 6x_1 + 10x_2 \le 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٤،٥) لنفرض أننا أثناء حلنا لمسألة قيمة عظمى حصلنا على الجدول (٤،٣٤). في هذا الجدول نجد أن x_1 من الممكن أن يدخل الأساس، ولكن مع ذلك فهذه المسألة غير محدودة، كيف عرفنا ذلك؟

جدول (٤،٣٤).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	Rhs
1	-4	-3	0	0	0
	2	-2	1	0	7
	3	0	0	1	2

(٤،٦) استخدم طريقة السمبلكس لإيجاد حلين أمثليين للمسألة التالية. بين كم عدد الحلول لهذه المسألة، ثم أوجد حلاً ثالثًا لها.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\quad & 2x_1 + 3x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 1 \\ & 4x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٤,٧) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \min\ z &= -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.}\quad & 4x_1 + 6x_2 \le 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٤,٨) المسألة التالية عبارة عن مسألة غير منتظمة، وضح السبب في أن المسألة غير منتظمة، ثم أوجد حل المسألة باستخدام طريقة السمبلكس. بعد ذلك بين ملاحظاتك على قيمة الدالة z في كل جدول من جداول السمبلكس، مع ذكر السبب.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.}\quad & 4x_1 + 3x_2 \le 12 \\ & 4x_1 + x_2 \le 8 \\ & 4x_1 - x_2 \le 8 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٤,٩) استخدم طريقة السمبلكس لإيجاد حلين أمثليين للمسألة التالية، ثم أوجد حلاً ثالثًا لها.

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + 4x_2 \\ \text{s. t.}\quad & x_1 + 4x_2 \le 6 \\ & x_1 + 2x_2 \le 4 \\ & x_1 - x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٤,١٠) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \min\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &= 3 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٤,١١) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أوغير محدودة الحل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \min\ z &= 2x_1 \\ \text{s. t.} \quad x_1 + 2x_2 &\ge 6 \\ 2x_1 + 3x_2 &= 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٤,١٢) ليكن لدينا الجدول (٤,٣٥) والذي حصلنا عليه من مسألة قيمة عظمى.

جدول (٤,٣٥).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
1	0	0	0	2	2
	1	0	-1	1	2
	0	1	-2	3	3

١- هل هذه المسألة لها أكثر من حل أمثلي؟

٢- كم عدد الحلول الأمثلية لهذه المسألة؟

(**تلميح**: إذا زادت قيمة s_1، كيف ستتغير قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف؟)

(٤,١٣) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 \\ \text{s. t.}\quad x_1 - x_2 &\le 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٤,١٤) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة M - الكبيرة أو طريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned} \min\ z &= 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ \text{s. t.}\quad 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 60 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 &\ge 120 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٤,١٥) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة M الكبيرة أو طريقة المرحلتين:

$$\begin{aligned} \min\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.}\quad 2x_1 + x_2 &\ge 10 \\ -3x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ x_1 + x_2 &\ge 6 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٤,١٦) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس، ثم بين نوعها (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو ليس لها حل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.}\quad -x_1 + x_2 &\ge 1 \\ -2x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٤,١٧) ليكن لدينا الجدول (٤,٣٦) والذي حصلنا عليه من مسألة قيمة عظمى. أوجد قيمة r، ثم أوجد الشروط على المتغيرات a_1,a_2,a_3,b,c حتى يتحقق التالي:

١- الحل الحالي يكون أمثليًا.
٢- الحل الحالي أمثلي، ويوجد حل آخر أمثلي.
٣- المسألة غير محدودة الحل.
٤- المسألة غير منتظمة.

جدول (٤,٣٦).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	rhs
1	$-c$	2	0	0	0	r
	-1	a_1	1	0	0	4
	a_2	-4	0	1	0	1
	a_3	3	0	0	1	b

(٤,١٨) هل العبارات التالية صحيحة أم لا؟ مع التعليل:

١- إذا كانت المسألة غير منتظمة، فإنه من الممكن أن يحدث دوران ولا نتوصل للحل الأمثلي أبدًا.

٢- عند استخدام طريقة M الكبيرة في مسألة قيمة عظمى، كانت قيمة z في الجدول الأمثلي تساوي $-3M + 3$، إذًا هذه المسألة غير محدودة الحل.

٣- الحلول الأساسية المقبولة هي الوحيدة التي من الممكن أن تكون أمثلية. ولذلك فإن عدد الحلول الأمثلية لا يمكن أن يتعدى عدد الحلول الأساسية المقبولة.

٤- إذا لم يكن هناك متغير أساسي خارج، فإن المسألة ليس لها حل أمثل.

٥- إذا كانت المسألة لها أكثر من حل ، فإن منطقة الحل لا بد أن تكون محدودة.

٦- إذا كان هناك أكثر من متغير أساسي خارج فإن الحل الأساسي المقبول في الجدول الذي يلي الجدول الحالي لابد أن يحتوي على متغير أساسي مساوٍ للصفر على الأقل.

٧- إذا كانت قيمة دالة الهدف متساوية عند نقطتين مقبولتين فإن النقاط الموجودة على القطعة المستقيمة الواصلة بين هاتين النقطتين تكون مقبولة كما أن قيمة دالة الهدف تكون متساوية عند هذه النقاط.

٨- إذا كان هناك حل أساسي أمثلي ولكنه ليس نقطة حدية ، فإن المسألة لها أكثر من حل.

الفصل الخامس

طريقة السمبلكس المعدلة

The Revised Simplex Method

- بعض الصيغ المهمة
- طريقة السمبلكس المعدلة

إن طريقة السمبلكس التي تمت مناقشتها في الفصلين السابقين تعتبر طريقة جبرية مباشرة لحل مسائل البرمجة الخطية. ولكن هذه الطريقة ليست الطريقة الأكثر دقة عند استخدام الحاسب لحل مسائل البرمجة الخطية ؛ والسبب في ذلك، أن طريقة السمبلكس تقوم بحساب وتخزين العديد من الأرقام والتي لا نحتاج إليها في الجدول الحالي ولا حتى في الجداول اللاحقة.

الواقع أن المعلومات التي نحتاج إليها في كل مرحلة هي :

١- معاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف وذلك لتحديد المتغير الداخل.

٢- معاملات المتغير الداخل في القيود، والطرف الأيمن في القيود لتحديد المتغير الخارج.

٣- وأخيرًا قيمة الطرف الأيمن لدالة الهدف لتحديد قيمة الحل الأمثلي.

إن من المهم إيجاد طريقة تحسب المعلومات الثلاث السابقة بدقة ودون الحاجة إلى حساب وتخزين جميع المعاملات ؛ هذه الطريقة تعرف باسم طريقة السمبلكس المعدلة (the revised simplex method). هذه الطريقة قد صممت للحصول على نفس نتائج طريقة السمبلكس ولكن بطريقة أكثر دقة وأقل تكلفة عند استخدام الحاسب حيث تقوم بحساب وتخزين المعلومات التي تحتاجها المرحلة الحالية فقط.

تعتمد طريقة السمبلكس المعدلة على استخدام المصفوفات، ولذلك يلزم كتابة مسألة البرمجة الخطية بطريقة المصفوفات كما سوف نبين تحت العنوان التالي.

(٥,١) بعض الصيغ المهمة

Some Important Formulas

تحت هذا العنوان نقوم بتطوير بعض الصيغ الرياضية لحل مسائل البرمجة الخطية وذلك باستخدام المصفوفات للتعبير عن مسألة البرمجة الخطية. هذه الصيغ سوف تفيدنا في حل المسائل باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة، كما أن لهذه الصيغ فائدة كبرى في تحليل الحساسية، والثنائية والتي سوف نتطرق إليها في أبواب قادمة.

لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية والتي تحتوي على m من القيود و n من المتغيرات (بعض هذه المتغيرات قد يكون مكملاً ، أو زائداً، أو اصطناعيًا).

$$
\begin{aligned}
\max\ \ & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{s.t.}\ \ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \ \ \vdots \qquad\ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \qquad\ \ \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \ge 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n)
\end{aligned}
$$

نقوم الآن بتعريف بعض الرموز والتي تفيدنا في حساب بعض الصيغ المهمة المرتبطة بهذه الرموز وذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٥,١)

لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية والمكتوبة في الصيغة القياسية (مع ملاحظة أننا قد وضعنا z في الصف Row 0 في طرف، وبقية المتغيرات في الطرف الآخر).

$$\begin{aligned}
\max\ \ z &= 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 0s_1 + 0s_2 \\
\text{s.t.}\quad x_1 + 4x_2 + 4x_3 + s_1 \qquad &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad + s_2 &= 13 \\
x_1, x_2, x_3, s_1, s_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

نلاحظ في هذه المسألة أن عدد القيود $m = 2$ وعدد المتغيرات $n = 5$. وبما أننا لم نستخدم طريقة السمبلكس بعد لحل المسألة، فإن مسألة البرمجة الخطية السابقة تسمى *المسألة الأصلية* أو *المسألة في المرحلة رقم 0*.

لكي نقوم بحل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس، نقوم بعمل تحوير للعنصر المحوري 4 ، فنحصل على الجدول الأول في طريقة السمبلكس والذي يمكن التعبير عنه بالصورة:

$$\begin{aligned}
\max\ \ z &= 5x_1 + 0x_2 - 5x_3 - 5s_1 + 0s_2 + 60 \\
\text{s.t.}\quad \frac{1}{4}x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{4}s_1 \qquad &= 3 \\
\frac{5}{2}x_1 + \qquad + 3x_3 - \frac{1}{2}s_1 + s_2 &= 7
\end{aligned}$$

تعتبر المسألة الآن في المرحلة رقم 1 ؛ وذلك لأن هذه الصيغة تتفق مع الجدول الأول في طريقة السمبلكس. وبالإمكان أن نستمر في إيجاد المسألة في المرحلة رقم i ؛ وذلك باستخدام طريقة السمبلكس i من المرات. وأخيرًا، تسمى الصيغة المتفقة مع الجدول الأمثلي بالصيغة الأمثلية. □

نأتي الآن لتعريف بعض الرموز المهمة. نعرف $BV(i)$ بأنه مجموعة المتغيرات الأساسية في المرحلة رقم i ،

$$BV(i)=\{bv_1(i),...,bv_m(i)\}$$

بحيث يكون العنصر الأول $bv_1(i)$ هو المتغير الأساسي في القيد الأول، والعنصر الثاني $bv_2(i)$ هو المتغير الأساسي في القيد الثاني، ... وهكذا. أي أن $bv_j(i)$ هو المتغير الأساسي في القيد رقم j في المرحلة رقم i.

في المثال (٥،١)، نجد أن المتغيرات الأساسية في المرحلة 0 هي:

$$BV(0)=\{s_1,s_2\}$$

بينما في المرحلة 1 ، كانت المتغيرات الأساسية هي:

$$BV(1)=\{x_2,s_2\}$$

نعرف الآن بطريقة مشابهة $NBV(i)$ لتكون مجموعة المتغيرات غير الأساسية في المرحلة رقم i ، وبذلك تكون المتغيرات غير الأساسية في المثال (٥،١) في المرحلة رقم 0 والمرحلة رقم 1 ، على التوالي:

$$NBV(0)=\{x_1,x_2,x_3\}$$

$$NBV(1)=\{x_1,s_1,x_3\}$$

نعرف المتجهات $\mathbf{x}_N^i$, $\mathbf{x}_B^i$ بأنها المتغيرات الأساسية وغير الأساسية على التوالي في المرحلة رقم i.

$$\mathbf{x}_B^i = \begin{bmatrix} bv_1(i) \\ \vdots \\ bv_m(i) \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_N^i = \begin{bmatrix} nbv_1(i) \\ \vdots \\ nbv_{n-m}(i) \end{bmatrix}$$

فمثلاً، في المرحلة رقم 0 في المثال (٥،١)، نجد أن:

$$\mathbf{x}_B^0 = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_N^0 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

لآن نعرف $\mathbf{a}_j$ بأنه المتجه الذي يحوي معاملات x_j في قيود المسألة الأصلية ويسمى عمود x_j. ونعرف $\mathbf{a}_{j+n}$ بأنه المتجه الذي يحوي معاملات s_j في قيود المسألة الأصلية ويسمى عمود s_j. في المثال السابق نجد أن:

$$\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

الطرف الأيمن للقيود في المسألة الأصلية يرمز له بالرمز $\mathbf{b}$. إذًا قيمة $\mathbf{b}$ في المثال هي:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

نعرف المصفوفة B_i بأنها المصفوفة في المرحلة رقم i من النوع $m \times m$ بحيث أن العمود رقم j هو عمود المتغير الأساسي $bv_j(i)$ في المسألة الأصلية. في المثال (٥،١)، يكون العمود الأول للمصفوفة B_0 هو عمود s_1 في المسألة الأصلية، والعمود الثاني هو عمود s_2 في المسألة الأصلية. أما أعمدة المصفوفة B_1 فهي أعمدة المتغيرات الأساسية x_2 و s_2 في المسألة الأصلية على التوالي، أي أن:

$$B_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B_1 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ولكـي نقـوم بحـساب B_1^{-1} يلزمنـا عمـل عمليـات صـفية علـى المـصفوفة $[B_1 | I]$ للحصول على المصفوفة $[I | B_1^{-1}]$. نبدأ الآن بالمصفوفة $[B_1 | I]$ والتي تساوي :

$$[B_1 | I] = \left[\begin{array}{cc|cc} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

بعد ذلك نقـوم بتطبيـق العمليـات الـصفية اللازمـة لتحويـل المـصفوفة B_1 إلى مـصفوفة الوحـدة I علـى المـصفوفة $[B_1 | I]$، فنحـصل علـى المـصفوفة $[I | B_1^{-1}]$ والـتي تساوي :

$$[I | B_1^{-1}] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1 \end{array}\right]$$

إذًا :

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن B_1^{-1} هي أعمدة المتغيرات s_1, s_2 في المرحلة 1 على التوالي. وبـشكل عـام، فـإن المـصفوفة B_i^{-1} عبـارة عـن أعمـدة $s_1, s_2, ..., s_m$ في المرحلـة رقـم i. الـسبب في ذلـك، أنـه في المرحلـة i لا بـد أن تكـون معـاملات المـتغيرات الأساسـية عبـارة عـن مصفوفة الوحدة I_m. إذًا يلزمنا استخدام عمليات صفية لتحويل المصفوفة B_i (والـتي تمثـل معـاملات المـتغيرات الأساسـية في المرحلـة i) إلى مـصفوفة معـاملات المـتغيرات الأساسية في المرحلـة i وهـي المـصفوفة I_m. هـذه العمليـات الـصفية تطبـق أيضًا علـى المصفوفة المكونـة مـن أعمـدة $s_1, s_2, ..., s_m$ في المرحلـة المبدئيـة وهـي مـصفوفة الوحـدة I_m. أي أننـا في البدايـة نتعامـل مـع المـصفوفة $[B_i | I_m]$، وفي المرحلـة رقـم i تكـون

معاملات المتغيرات الأساسية عبارة عن مصفوفة الوحدة I_m ، إذًا المصفوفة المقابلة لا بد أن تكون B_i^{-1} ، ومن ثم فإننا نحصل على المصفوفة $\left[I_m \mid B_i^{-1}\right]$.

نعرف المصفوفة N_i من النوع $m \times (n-m)$ بأنها المصفوفة التي تكون أعمدتها هي أعمدة المتغيرات غير الأساسية $NBV\ (i)$ في المسألة الأصلية. فمثلاً، في المرحلة 1 من المثال (٥،١) كانت $NBV\ (1) = \{x_1, s_1, x_3\}$ ، إذًا :

$$N_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

نعرف معاملات x_j و s_j في دالة الهدف الأصلية بأنها c_j و c_{j+n} على التوالي. في المثال السابق نجد أن :

$$c_1 = 10, \quad c_2 = 20, \quad c_3 = 15, \quad c_4 = 0, \quad c_5 = 0$$

ومن هنا نعرف $\mathbf{c}_B^i$ بأنه الصف الذي تكون عناصره معاملات المتغيرات الأساسية في المرحلة i لدالة الهدف الأصلية. في المثال السابق نجد أن المتغيرات الأساسية في المرحلة 0 كانت $BV\ (0) = \{s_1, s_2\}$ ، ولأن معاملات هذه المتغيرات تساوي 0 في دالة الهدف الأصلية، إذًا قيمة $\mathbf{c}_B^0$ تساوي :

$$\mathbf{c}_B^0 = [0 \quad 0]$$

بينما في المرحلة رقم 1 ، نجد أن $BV\ (1) = \{x_2, s_2\}$ ، ومن ثم فإن قيمة $\mathbf{c}_B^1$ تساوي :

$$\mathbf{c}_B^1 = [20 \quad 0]$$

وبطريقة مشابهة نعرف $\mathbf{c}_N^i$ بأنه الصف الذي تكون عناصره معاملات المتغيرات غير الأساسية في المرحلة i في دالة الهدف الأصلية. في المثال السابق، نجد أنه في المرحلة 0، كانت المتغيرات غير الأساسية $NBV\ (0) = \{x_1, x_2, x_3\}$ ومعاملاتها على الترتيب هي $10, 20, 15$ إذًا :

$$\mathbf{c}_N^0 = [10 \quad 20 \quad 15]$$

بينما في المرحلة رقم 1 ، نجد أن $NBV\ (1) = \{x_1, s_1, x_3\}$ ، ومن ثم فإن قيمة $\mathbf{c}_N^1$ تساوي :

$$\mathbf{c}_N^1 = [10 \quad 0 \quad 15]$$

باستخدام الرموز السابقة ، نبين الآن كيف يمكننا التعرف على قيود مسألة البرمجة الخطية في المرحلة i ؛ وذلك من خلال معرفتنا للمتغيرات الأساسية في هذه المرحلة. كما نبين أيضًا كيف يمكننا التعرف على دالة الهدف في المرحلة i دون الحاجة لاستخدام جداول السمبلكس في كل مرة.

في البداية ، نقوم بكتابة المسألة الأصلية (أي المسألة في المرحلة رقم 0) بعد أن نفصل المتغيرات الأساسية عن المتغيرات غير الأساسية في المرحلة i . إذًا دالة الهدف والقيود في المسألة الأصلية يمكن كتابتها بالصورة التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= \mathbf{c}_B^i \mathbf{x}_B^i + \mathbf{c}_N^i \mathbf{x}_N^i \\ \text{s.t.} \quad B_i\, \mathbf{x}_B^i + N_i\, \mathbf{x}_N^i &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x}_B^i, \mathbf{x}_N^i &\geq 0 \end{aligned}$$

في مثالنا السابق ، يمكن كتابة المسألة باعتبار المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في المرحلة 0 بالصورة :

$$\max \quad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 20 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

أما لو اعتبرنا المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في المرحلة 1 ، فإن المسألة الأصلية يمكن كتابتها بالصيغة المكافئة التالية :

$$\max \quad z = \begin{bmatrix} 20 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 10 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن ما حدث هنا هو إعادة ترتيب فقط للمتغيرات الأساسية وغير الأساسية. إذًا هذه القيود تمثل القيود في المرحلة رقم 0.

الآن نشرح طريقة الحصول على دالة الهدف والقيود في المرحلة رقم i من المرحلة رقم 0 وذلك من خلال معرفتنا للمتغيرات الأساسية في المرحلة i. كانت قيود المسألة الأصلية معطاة بالعلاقة :

$$B_i \, \mathbf{x}_B^i + N_i \, \mathbf{x}_N^i = \mathbf{b}$$

ولمعرفة القيود في المرحلة رقم i ، نلاحظ أنه في القيد رقم j لا بد أن يكون معامل المتغير الأساسي يساوي 1 في هذا القيد و 0 في بقية القيود. ولعمل ذلك نقوم بضرب المعادلة $B_i \, \mathbf{x}_B^i + N_i \, \mathbf{x}_N^i = \mathbf{b}$ في B_i^{-1} فنحصل على :

$$\mathbf{x}_B^i + B_i^{-1} N_i \, \mathbf{x}_N^i = B_i^{-1} \mathbf{b}$$

نلاحظ في هذا القيد، أن كل متغير أساسي $bv_j(i)$ سوف يظهر بمعامل 1 في الصف رقم j من القيود و معامل 0 في بقية القيود ؛ إذًا $\mathbf{x}_B^i + B_i^{-1}N_i\,\mathbf{x}_N^i = B_i^{-1}\mathbf{b}$ هي القيود في المرحلة i. وهذا يعني أنه للحصول على معاملات المتغيرات غير الأساسية في المرحلة i يكفي أن نحسب $B_i^{-1}N_i$، وللحصول على الطرف الأيمن في المرحلة i نحسب $B_i^{-1}\mathbf{b}$.

في مثالنا السابق، نستطيع الحصول على قيود المرحلة 1، وذلك بحساب معاملات المتغيرات غير الأساسية $NBV(1) = \{x_1, s_1, x_3\}$ والطرف الأيمن في المرحلة 1. إن معاملات المتغيرات غير الأساسية x_1, s_1, x_3 في المرحلة 1 هي $B_1^{-1}N_1$ والتي تساوي:

$$B_1^{-1}N_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1 \\ 5/2 & -1/2 & 3 \end{bmatrix}$$

كما أن الطرف الأيمن في المرحلة 1 هو $B_1^{-1}\mathbf{b}$:

$$B_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

الآن وبعد أن أوجدنا القيود في المرحلة رقم i، نقوم بحساب دالة الهدف في المرحلة رقم i كالتالي: في البداية نقوم بكتابة دالة الهدف والقيود في المرحلة رقم 0 بدلالة المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في المرحلة رقم i.

$$B_i\,\mathbf{x}_B^i + N_i\,\mathbf{x}_N^i = \mathbf{b} \qquad (1)$$

$$z - \mathbf{c}_B^i\,\mathbf{x}_B^i - \mathbf{c}_N^i\,\mathbf{x}_N^i = 0 \qquad (2)$$

وللحصول على قيمة دالة الهدف في المرحلة رقم i، لابد أن تكون معاملات المتغيرات الأساسية في دالة الهدف مساوية للصفر. أي يلزمنا التخلص من $\mathbf{x}_B^i$ في دالة الهدف الجديدة. ولأجل هذا نقوم بضرب (1) في $\mathbf{c}_B^i B_i^{-1}$ فنحصل على:

$$\mathbf{c}_B^i\,\mathbf{x}_B^i + \mathbf{c}_B^i\,B_i^{-1}N_i\,\mathbf{x}_N^i = \mathbf{c}_B^i\,B_i^{-1}\mathbf{b} \qquad (3)$$

وبجمع (2) مع (3) نحصل على:

$$z + (\mathbf{c}_B^i B_i^{-1}N_i - \mathbf{c}_N^i)\mathbf{x}_N^i = \mathbf{c}_B^i B_i^{-1}\mathbf{b} \qquad (4)$$

نلاحظ هنا اختفاء $\mathbf{x}_B^i$ من دالة الهدف؛ إذًا هذه هي دالة الهدف في المرحلة رقم i. في المثال السابق لو أردنا إيجاد دالة الهدف في المرحلة رقم 1، فإننا نعوض في العلاقة رقم (4) فنحصل على:

$$z + \left([20 \quad 0]\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \end{bmatrix} - [10 \quad 0 \quad 15] \right)\begin{bmatrix} x_1 \\ s_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$
$$= [20 \quad 0]\begin{bmatrix} 1/4 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 13 \end{bmatrix}$$

وبإجراء عمليات ضرب المصفوفات، نحصل على دالة الهدف التالية:

$$z - 5x_1 + 5s_1 + 5x_3 = 60$$

والتي يمكن كتابتها بالصورة:

$$z = 5x_1 - 5s_1 - 5x_3 + 60 \qquad \square$$

(٥,٢) طريقة السمبلكس المعدلة

The Revised Simplex Method

تحت هذا العنوان سوف نستخدم الصيغ التي تم تطويرها تحت العنوان السابق لحل مسائل البرمجة الخطية. سنقوم في البداية بحساب معاملات المتغيرات غير الأساسية

وذلك عن طريق تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج للانتقال من حل أساسي مقبول إلى حل آخر مجاور، تسمى هذه الطريقة طريقة السمبلكس المعدلة.

قبل أن نبدأ بشرح طريقة السمبلكس المعدلة نذكِّر بمجموعة من الرموز التي مرت علينا تحت العنوان السابق.

$BV(i)$ المتغيرات الأساسية في المرحلة i.

$NBV(i)$ المتغيرات غير الأساسية في المرحلة i.

$\mathbf{b}$ الطرف الأيمن للقيود في المسألة الأصلية.

B_i مصفوفة أعمدة المتغيرات الأساسية في المرحلة i.

$\mathbf{a}_j$ عمود x_j في المسألة الأصلية.

$\mathbf{a}_{j+n}$ عمود s_j في المسألة الأصلية.

c_j معامل x_j في دالة الهدف الأصلية.

c_{j+n} معامل s_j في دالة الهدف الأصلية.

$\mathbf{c}_B^i$ معاملات دالة الهدف الأصلية للمتغيرات الأساسية في المرحلة i.

باستخدام هذه الرموز واستخدام العلاقات الواردة تحت العنوان السابق نستطيع أن نستنتج بعض الصيغ عن المرحلة رقم i.

$B_i^{-1}\mathbf{a}_j$ عمود x_j في المرحلة رقم i.

$B_i^{-1}\mathbf{a}_{j+n}$ عمود s_j في المرحلة رقم i.

$\bar{c}_j = \mathbf{c}_B^i B_i^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$ معامل x_j في دالة الهدف في المرحلة رقم i.

$\bar{c}_{j+n} = \mathbf{c}_B^i B_i^{-1}\mathbf{a}_{j+n} - c_{j+n}$ معامل s_j في دالة الهدف في المرحلة رقم i.

$B_i^{-1}\mathbf{b}$ الطرف الأيمن للقيود في المرحلة رقم i.

$c_B^i B_i^{-1}\mathbf{b}$ الطرف الأيمن لدالة الهدف في المرحلة رقم i.

نلاحظ أنه يكفي معرفة المتغيرات الأساسية $BV(i)$ والمصفوفة B_i^{-1} والجدول المبدئي لإيجاد جدول السمبلكس الحالي في المرحلة رقم i. هذا يعني أنه في حالة استخدام الحاسب الآلي لحل مسألة برمجة خطية، فإنه يكفي أن نخزن فيه المتغيرات الأساسية الحالية، B_i^{-1} والجدول المبدئي.

ولحل مسألة برمجة خطية باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة، نقوم في البداية بتحديد المتغيرات الأساسية وغير الأساسية في كل مرحلة، ثم بعد ذلك نحدد المتغير الداخل والمتغير الخارج باستخدام الصيغ التي تم شرحها سابقًا.

نأخذ الآن مثالاً نوضح فيه كيفية عمل طريقة السمبلكس المعدلة لحل مسألة برمجة خطية.

مثال (٥,٢)

أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 4x_2 + 4x_3 + s_1 = 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 30 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 + s_3 = 18 \\
& x_i, s_i \ge 0 \ \ (i = 1,2,3)
\end{aligned}$$

الحل

لحل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة، نقوم بتحديد المتغيرات الأساسية، والمتغيرات غير الأساسية في المرحلة الحالية، ثم نحدد المتغير الداخل والمتغير الخارج.

الجدول المبدئي يتفق مع المرحلة رقم " 0 " ، والجدول الثاني يتفق مع المرحلة رقم "1" ، ....، والجدول الأمثلي يتفق مع المرحلة الأخيرة. نبدأ الآن بالمرحلة رقم " 0 ".

المرحلة رقم "0"

في هذه المرحلة تكون لدينا المتغيرات الأساسية $BV(0)=\{s_1,s_2,s_3\}$ ، بينما تكون المتغيرات غير الأساسية $NBV(0)=\{x_1,x_2,x_3\}$. وفي كل مرحلة نقوم بتحديد المصفوفة B_i لتكون أعمدة المتغيرات الأساسية في قيود المسألة الأصلية. إذًا في المرحلة رقم " 0" يكون لدينا $B_0=I_3$. ومن ثَم فإن $B_0^{-1}=I_3$. وكما بينا سابقًا، فإن B_i^{-1} في المرحلة i سوف تكون المصفوفة التي عمودها رقم j هو عمود s_j في المرحلة i. بعد ذلك نقوم بتحديد المتغير الداخل.

تحديد المتغير الداخل

نقوم في البداية بحساب معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Row 0 باستخدام القاعدة:

$$\bar{c}_i=\mathbf{c}_B^0 B_0^{-1}\mathbf{a}_i-c_i$$

يسمى هذا الإجراء *ترخيص المتغير غير الأساسي* (pricing out). في البداية نحسب $\mathbf{a}_i$ لكل $i=1,\dots,6$

$$\mathbf{a}_1=\begin{bmatrix}1\\3\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_2=\begin{bmatrix}4\\2\\3\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_3=\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_4=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_5=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\ \mathbf{a}_6=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

ثم نقوم بحساب $\bar{c}_i$ للمتغيرات غير الأساسية، لذلك نبدأ بحساب $\mathbf{c}_B^0 B_0^{-1}$. وبما أن المتغيرات الأساسية هي $BV(0)=\{s_1,s_2,s_3\}$ ، إذًا:

$$\mathbf{c}_B^0 B_0^{-1} = [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

نحسب الآن معاملات المتغيرات غير الأساسية x_1, x_2, x_3 على التوالي كالتالي:

$$\bar{c}_1 = \mathbf{c}_B^0 B_0^{-1}\mathbf{a}_1 - c_1 = [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - 10 = -10$$

$$\bar{c}_2 = \mathbf{c}_B^0 B_0^{-1}\mathbf{a}_2 - c_2 = [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} - 20 = -20$$

$$\bar{c}_3 = \mathbf{c}_B^0 B_0^{-1}\mathbf{a}_3 - c_3 = [0 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = -15$$

وبما أن x_2 هو المتغير ذو المعامل الأكبر بإشارة سالبة، إذًا x_2 هو المتغير الداخل.

تحديد المتغير الخارج

لتحديد المتغير الخارج، نقوم بحساب عمود المتغير الداخل x_2 ، وكذلك الطرف الأيمن في المرحلة الحالية ثم نستخدم اختبار النسبة لتحديد المتغير الخارج. في البداية نقوم بحساب عمود x_2 والذي يساوي:

$$B_0^{-1}\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ثم نقوم بحساب الطرف الأيمن في المرحلة رقم "0" والذي يساوي:

$$B_0^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

بعد ذلك نقوم باستخدام اختبار النسبة ، فنجد أنه بقسمة الصف الأول في الطرف الأيمن على الصف الأول في عمود x_2 نحصل على $12/4 = 3$ والصف الثاني يعطي $30/2 = 15$ والصف الثالث يعطي $18/3 = 6$. ولأن اختبار النسبة في الصف Row 1 نتج منه أصغر عدد ، إذًا x_2 سوف يدخل الأساس في الصف الأول Row 1. وبناء عليه فإن المتغير الخارج سوف يكون المتغير الأساسي في الصف Row 1 أي s_1 ، وبذلك تنتهي المرحلة "0".

المرحلة رقم "1"

في هذه المرحلة تكون لدينا المتغيرات الأساسية مكتوبة بالترتيب $BV(1) = \{x_2, s_2, s_3\}$ ، بينما المتغيرات غير الأساسية $NBV(1) = \{x_1, s_1, x_3\}$. ولكي نقوم بحساب B_1^{-1} والتي هي عبارة عن أعمدة المتغيرات s_1, s_2, s_3 في المرحلة "1" ، يكفي أن نعرف العمليات الصفية التي سوف تحدث لأعمدة المتغيرات s_1, s_2, s_3.

حتى ننتقل من المرحلة "0" إلى المرحلة "1" لابد من إجراء العمليات الصفية التالية لتحويل عمود x_2 من $[4 \quad 2 \quad 3]^T$ إلى $[1 \quad 0 \quad 0]^T$ (لكي يكون المتغير x_2 متغيرًا أساسيًا في الصف Row 1 في المرحلة "1"):

١- ضرب الصف Row 1 في الجدول "0" في $1/4$.

٢- ضرب الصف Row 1 في الجدول "0" في $-1/2$ وإضافته للصف Row 2.

٣- ضرب الصف Row 1 في الجدول "0" في $-3/4$ وإضافته للصف Row 3.

نلاحظ أن هذه العمليات الصفية سوف تجرى أيضًا على أعمدة المتغيرات s_1, s_2, s_3. إذًا نستطيع الحصول على B_1^{-1} بتطبيق العمليات الصفية السابقة على

المـصفوفة B_0^{-1} (والـتي هـي عبـارة عـن أعمـدة المـتغيرات s_1,s_2,s_3 في المرحلـة "0") فنحصل على:

$$B_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

الخطوة التالية هي تحديد المتغير الداخل والمتغير الخارج في هذه المرحلة.

تحديد المتغير الداخل

نقوم في البداية بحساب معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Row 0 .

بما أن $BV\,(1) = \{x_2, s_2, s_3\}$ ، إذًا $\mathbf{c}_B^1 = [20 \quad 0 \quad 0]$ ، وبذلك فإن:

$$\mathbf{c}_B^1 B_1^{-1} = [20 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [5 \quad 0 \quad 0]$$

نحسب الآن معاملات المتغيرات غير الأساسية x_1,s_1,x_3 على التوالي.

$$\bar{c}_1 = \mathbf{c}_B^1 B_1^{-1}\mathbf{a}_1 - c_1 = [5 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} - 10 = -5$$

$$\bar{c}_4 = \mathbf{c}_B^1 B_1^{-1}\mathbf{a}_4 - c_4 = [5 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 0 = 5$$

$$\bar{c}_3 = \mathbf{c}_B^1 B_1^{-1}\mathbf{a}_3 - c_3 = [5 \quad 0 \quad 0]\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} - 15 = 5$$

وبما أن المتغير x_1 هو المتغير ذو المعامل الأكبر بإشارة سالبة، إذًا x_1 هو المتغير الداخل في هذه المرحلة.

تحديد المتغير الخارج

لتحديد المتغير الخارج نقوم بحساب عمود x_1 ، والطرف الأيمن في المرحلة الحالية، ثم نستخدم اختبار النسبة لتحديد المتغير الخارج. وفي البداية نقوم بحساب عمود x_1 في المرحلة "1".

$$B_1^{-1}\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 5/2 \\ 9/4 \end{bmatrix}$$

وكذلك نقوم بحساب الطرف الأيمن في المرحلة رقم "1".

$$B_1^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ -3/4 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \\ 9 \end{bmatrix}$$

وباستخدام اختبار النسبة نجد أنه بقسمة الصف الأول في الطرف الأيمن على الصف الأول في عمود x_1 نحصل على $3/(1/4) = 12$ والصف الثاني يعطي $24/(5/2) = 48/5$ والصف الثالث يعطي $9/(9/4) = 4$. إذًا x_1 سوف يدخل الأساس في الصف الثالث Row 3. إي أن المتغير الخارج سوف يكون s_3. وبذلك تنتهي المرحلة "1".

المرحلة رقم "2"

في هـذه المرحلـة يكـون لـدينا المتغيرات الأساسـية $BV\ (2)=\{x_2,s_2,x_1\}$ ، بينما تكون المتغيرات غير الأساسية $NBV\ (2)=\{s_3,s_1,x_3\}$. نعلـم أن B_2^{-1} سـوف تكون أعمدة المتغيرات s_1,s_2,s_3 في المرحلة الحالية.

حتى ننتقل من الجدول "1" إلى الجدول " 2" لابد من إجراء العمليات الصفية التالية لتحويل عمود x_1 من $[9/4 \quad 5/2 \quad 1/4]^T$ إلى $[0 \quad 0 \quad 1]^T$ (لكي يكون المتغير x_1 متغيرًا أساسيًا في الصف Row 3 في المرحلة "2"):

١- ضرب الصف Row 3 في الجدول "1" في $4/9$.

٢- ضرب الصف Row 3 في الجدول "1" في $-1/9$ وإضافته للصف Row 1.

٣- ضرب الصف Row 3 في الجدول "1" في $-10/9$ وإضافته للصف Row 2.

وللحصول على B_2^{-1} ، نقوم بتطبيق العمليات الصفية السابقة على المصفوفة B_1^{-1} فنحصل على:

$$B_2^{-1}=\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix}$$

تحديد المتغير الداخل

نقوم في البداية بحساب معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Row 0.

بما أن: $BV\ (2)=\{x_2,s_2,x_1\}$ ؛ أذًا $\mathbf{c}_B^2=[20 \quad 0 \quad 10]$ ، وبذلك فإن:

$$\mathbf{c}_B^2 B_2^{-1}=[20 \quad 0 \quad 10]\begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix}=[10/3 \quad 0 \quad 20/9]$$

نحسب الآن معاملات s_3, s_1, x_3 على التوالي.

$$\bar{c}_6 = \mathbf{c}_B^2 B_2^{-1}\mathbf{a}_6 - c_6 = [10/3 \quad 0 \quad 20/9]\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - 0 = 20/9$$

$$\bar{c}_4 = \mathbf{c}_B^2 B_2^{-1}\mathbf{a}_4 - c_4 = [10/3 \quad 0 \quad 20/9]\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - 0 = 10/3$$

$$\bar{c}_3 = \mathbf{c}_B^2 B_2^{-1}\mathbf{a}_3 - c_3 = [10/3 \quad 0 \quad 20/9]\begin{bmatrix}4\\5\\1\end{bmatrix} - 15 = 5/9$$

بما أن جميع المعاملات في الصف Row 0 غير سالبة ؛ إذًا المرحلة "2" مرحلة أمثلية ويبقى أن نوجد قيمة المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف.

ولإيجاد الحل الأمثل ، نقوم بإيجاد الطرف الأيمن للقيود في المرحلة "2" والذي يساوي :

$$B_2^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1/3 & 0 & -1/9\\1/3 & 1 & -10/9\\-1/3 & 0 & 4/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\30\\18\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\14\\4\end{bmatrix}$$

وبما أن المتغيرات الأساسية هي $BV\,(2) = \{x_2, s_2, x_1\}$ ؛ إذًا الحل الأمثل هو :

$$\begin{bmatrix}x_2^*\\s_2^*\\x_1^*\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\14\\4\end{bmatrix}$$

وقيمة دالة الهدف z^* يمكن الحصول عليها من العلاقة :

$$z^* = \mathbf{c}_B^2 B_2^{-1}\mathbf{b} = [10/3 \quad 0 \quad 20/9]\begin{bmatrix}12\\30\\18\end{bmatrix} = 80$$

وبذلك نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثلي. □

طبعًا من الممكن تحديد نوع المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو غير منتظمة) باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة وذلك بطريقة مشابهة لما تم عمله في طريقة السمبلكس العادية. كما يمكن حل مسائل القيمة الصغرى min بطريقة مشابهة.

تمارين الفصل الخامس

(٥،١) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو ليس لها حل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.} \quad 2x_1 + 3x_2 &\le 3 \\ -2x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٥،٢) استخدم طريقة السمبلكس المعدلة لإيجاد حلين أمثليين للمسألة التالية:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s. t.} \quad 2x_1 + 3x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 1 \\ 4x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٥،٣) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة:

$$\begin{aligned} \min\ z &= 4x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ x_2 &\le 5 \\ x_1 - x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0. \end{aligned}$$

(٥,٤) في مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\quad & 2x_1 - x_2 \le 2 \\ & -x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

كانت المتغيرات الأساسية هي $BV = \{x_1, x_2\}$. أوجد الجدول الأمثلي مباشرة بدون استخدام أي تحوير.

(٥,٥) في مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\quad & 2x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1 + x_2 \le 2 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

كانت المتغيرات الأساسية هي $BV = \{x_2, s_1\}$. أوجد الجدول الأمثلي مباشرة بدون استخدام أي تحوير.

(٥,٦) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة ، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل ، أو لها أكثر من حل ، أو غير محدودة الحل ، أو ليس لها حل ، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \min\ z &= -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s. t.}\quad & 4x_1 + 6x_2 \le 12 \\ & 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

(٥,٧) أوجد حل المسألة التالية باستخدام طريقة السمبلكس المعدلة، ثم بين نوع هذه المسألة (وحيدة الحل، أو لها أكثر من حل، أو غير محدودة الحل، أو ليس لها حل، أو غير منتظمة).

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 \\ \text{s. t.}\quad x_1 - x_2 &\le 4 \\ -x_1 + x_2 &\le 1 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٥,٨) لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \max\ z &= c_1 x_1 + c_2 x_2 \\ \text{s. t.}\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\le b_2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

والتي لها الجدول الأمثلي (٥,١)

جدول (٥,١).

z	x_1	x_2	s_1	s_2	rhs
1	0	0	2	3	5/2
	1	0	3	2	5/2
	0	1	1	1	1

احسب $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2, c_1, c_2$.

الفصل السادس

تحليل الحساسية

Sensitivity Analysis

- أهمية تحليل الحساسية
- تحليل الحساسية باستخدام الرسم
- طريقة السمبلكس باستخدام المصفوفات
- تحليل الحساسية بطريقة المصفوفات

يعتبر تحليل الحساسية (sensitivity analysis) واحدًا من أهم مواضيع البرمجة الخطية، حيث يتم من خلاله التعرف على التغير في الحل الأمثل عندما يتغير أحد معاملات متغيرات القرار أو الطرف الأيمن في أحد القيود.

إن تحليل الحساسية يمكن الاستفادة منه بعد التوصل إلى الحل الأمثلي لمسألة البرمجة الخطية، ويهدف إلى معرفة ما إذا كان التغير في معاملات المسألة سوف يبقي الحل الأمثلي للمسألة الأصلية أمثليًا أم سوف يتغير إلى حل آخر. وإذا تغير الحل الأمثلي، كيف يمكن التوصل للحل الجديد بطريقة بسيطة، ودون الحاجة لحل المسألة الجديدة.

الواقع أن هناك عدة حالات قد تظهر عند القيام بتغيير معاملات المسألة، وهذه الحالات هي:

١- يظل الحل الأساسي الأمثلي للمسألة الأصلية أمثليًا بعد تغيير المعاملات.
٢- يكون الحل بعد تغيير المعاملات غير مقبول (infeasible).
٣- يكون الحل بعد تغيير المعاملات غير أمثلي.

سوف ندرس في هذا الكتاب التغير الحاصل في الحل الأمثل للمسألة الأصلية عندما تتغير معاملات دالة الهدف، وكذلك عندما يتغير الطرف الأيمن من القيود.

(٦,١) أهمية تحليل الحساسية
Importance of Sensitivity Analysis

تحت هذا العنوان نبين أهمية تحليل الحساسية في مسائل البرمجة الخطية. ولكننا نحتاج إلى بعض التعاريف الأساسية نبدؤها بتعريف متغيرات النموذج الرياضي.

تعريف(٦,١): متغيرات النموذج الرياضي Model Parameters

متغيرات النموذج الرياضي (أو اختصارًا متغيرات النموذج) هي معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف c_j، ومعاملات متغيرات القرار في القيود a_{ij}، والطرف الأيمن في القيود b_i.

عندما نقوم بحل مسألة برمجة خطية ونتوصل للحل الأمثل فإننا نطرح السؤال التالي: ما الذي سوف يحدث للحل الأمثل لو أننا قمنا بتغيير أحد متغيرات النموذج؟ هذا السؤال كثيرًا ما يرد في مسائل البرمجة الخطية. إن أي تغير في متغيرات النموذج يغير المسألة، ومن ثم قد يؤثر في الحل الأمثل الذي تم حسابه سابقًا؛ لذلك يفضل أن نجد

طريقة لمعرفة تأثير تغير متغيرات النموذج لمسألة البرمجة الخطية على الحل الأمثل لها. أي كيف سيتغير الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية إذا تغيرت المعلومات المدخلة (المعاملات). هذا ما يعرف باسم تحليل الحساسية.

تعريف(٦,٢): تحليل الحساسية Sensitivity Analysis

تحليل الحساسية هو دراسة كيفية تغير الحل الأمثل عندما تتغير متغيرات النموذج في مسألة البرمجة الخطية.

إن من المهم أن نعرف ما هو المدى الذي يمكن لأحد متغيرات النموذج أن يتحرك فيه بحيث يظل حل مسألة البرمجة الخطية الأصلية أمثليًا في المسألة الجديدة. فيما يلي نعرف هذا المدى.

تعريف(٦,٣): مدى التغير Range of Variation

يعرف مدى التغير لمتغير نموذج رياضي بأنه القيم التي من الممكن أن يأخذها هذا المتغير بحيث يكون الحل الأمثلي للمسألة بعد التغيير هو نفس الحل الأمثلي للمسألة الأصلية.

بعد أن قمنا بتعريف تحليل الحساسية ومدى التغير لمتغيرات النموذج الرياضي، نوضح فيما يلي أهمية تحليل الحساسية.

لنفرض أننا قمنا بحل مسألة برمجة خطية وتوصلنا للحل الأمثل، ثم بعد ذلك قررنا أن نقوم بتغيير أحد المعطيات كقيمة السلعة المباعة، أو الوقت المتاح أو كمية المواد

الأولية مثلاً. وباستخدام تحليل الحساسية نستطيع أن نوجد الحل الأمثل للمسألة الجديدة دون الحاجة إلى حل المسألة من جديد.

بالإضافة لذلك، فإن معاملات مسألة البرمجة الخطية من النادر أن تكون معروفة بشكل دقيق في المسائل التطبيقية؛ وذلك لأن هذه المعاملات عرضة للتغير. فعلى سبيل المثال، كمية الطلب في المستقبل على سلعة معينة، أو كمية المواد الخام، أو حتى عدد العمال، كل هذه المعلومات من الصعوبة التنبؤ بها بدقة قبل حل المسألة؛ لذلك نستخدم قيمًا تقريبية لمتغيرات النموذج، وعندما يحدث تغير في أحد هذه المتغيرات، نستخدم تحليل الحساسية لحل المسألة الجديدة.

كما يفيد تحليل الحساسية في عملية تقليل التكلفة أو زيادة الربح. لنفرض أن لدينا معلومات كاملة عن المسألة كعدد العمال، وعدد الساعات التي يمكن أن يعملوا فيها، وكذلك كمية المواد الخام. إن تحليل الحساسية يعطينا القدرة على دراسة تأثير تغير هذه المعلومات على الحل الأمثل. إذا كان تغير الحل الأمثل في صالحنا (زيادة الربح أو تقليل التكلفة) عندما نقوم بعمل تغيير بسيط في المعاملات فإنه من المفيد أن نتخذ قرارًا بهذا التغيير، فمثلاً إذا كانت زيادة عدد ساعات العمال سوف تزيد الربح بكمية أكبر من التكلفة المدفوعة للعمال فإنه من المناسب زيادة عدد الساعات.

(٦,٢) تحليل الحساسية باستخدام الرسم

Graphical Sensitivity Analysis

تحت هذا العنوان نستخدم الرسم لتحليل الحساسية في مسائل البرمجة الخطية التي تحتوي على متغيرين. سوف نقوم بدراسة التغير الحاصل في الحل الأمثلي عندما تتغير أحد

متغيرات النموذج. وسوف يقتصر تعاملنا في هذا الكتاب على التغير الحاصل في معامل أحد متغيرات القرار في دالة الهدف أو الطرف الأيمن في أحد القيود.

نقوم بشرح تحليل الحساسية باستخدام المثال التالي:

مثال (٦,١)

يقوم مصنع أدوية بإنتاج نوعين من الأدوية: بندول مركز، وبندول عادي. تتطلب صناعة علبة من البندول المركز ساعتين من العمل وما كميته ١٠٠ جرام من المواد الأولية. بينما تتطلب صناعة البندول العادي ساعة واحدة وما كميته ١٠٠ جرام من المواد الأولية.

يستطيع المصنع العمل لمدة ١٠٠ساعة في الأسبوع ولديه كمية ٨ كيلوجرامات من المواد الأولية. ويربح المصنع من علبة البندول المركز ٣ ريالات، ويربح من علبة البندول العادي ريالين. وأخيرًا، فإن الطلب على البندول المركز لا يتعدى ٤٠ علبة أسبوعيًا.

إذا علمت أن المصنع يرغب في تحقيق أكبر كمية ربح ممكنة من بيعه للبندول المركز والبندول العادي، أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة، ثم قم برسم منطقة الحل وأوجد الحل الأمثلي.

الحل

نعرِّف متغيرات القرار لتكون:

$x_1 :=$ عدد علب البندول المركز المنتجة أسبوعيًا

$x_2 :=$ عدد علب البندول العادي المنتجة أسبوعيًا

ومن ثم فإن مسالة البرمجة الخطية تأخذ الصورة التالية :

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 100 \\
x_1 + x_2 &\le 80 \\
x_1 \quad &\le 40 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

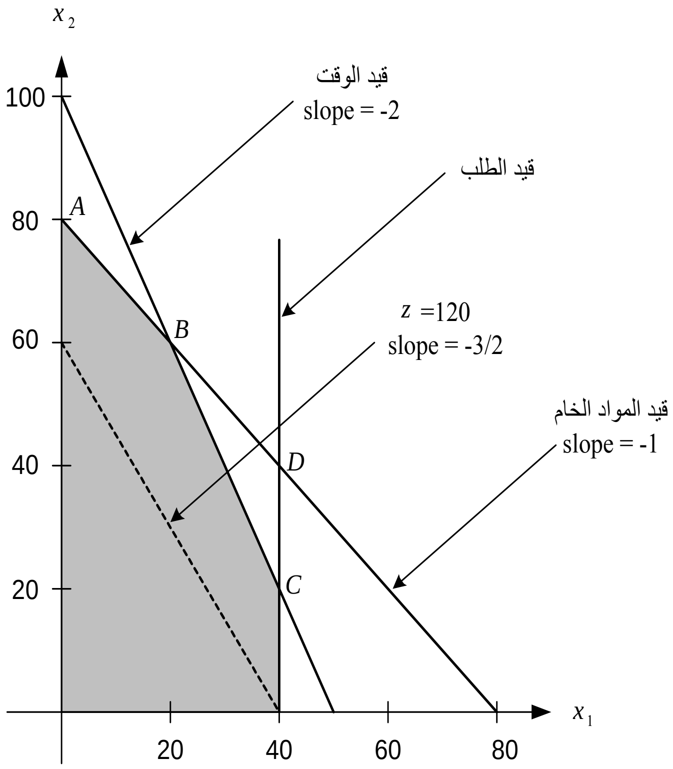
وبإضافة متغيرات مكملة إلى القيود ، نحصل على الصيغة القياسية التالية :

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 + s_1 \qquad &= 100 \\
x_1 + x_2 \quad + s_2 \quad &= 80 \\
x_1 \qquad\qquad + s_3 &= 40 \\
x_1, x_2, s_1, s_2 &\ge 0
\end{aligned}
$$

نقوم الآن برسم القيود مع أحد مستقيمات الربح وهو المستقيم $z = 120$ ، كما هو موضح في الشكل (٦،١). بالإضافة لذلك ، قمنا بتوضيح ميل المستقيمات (slope) في الرسم ، حيث إننا سوف نحتاج إلى هذه المعلومة فيما بعد عندما نقوم بشرح تحليل الحساسية.

يمكن حل هذا المثال بطريقة الرسم أو بطريقة السمبلكس ، ومن ثم الحصول على الحل الأمثلي $z^* = 180$ عند النقطة $x_1^* = 20$ و $x_2^* = 60$ (النقطة B في شكل (٦،١)).

في هذا الحل كانت المتغيرات الأساسية هي $BV = \{x_1, x_2, s_3\}$ ، أما المتغيرات غير الأساسية فهي $NBV = \{s_1, s_2\}$. □



شكل(٦,١)

هناك سؤال يتبادر للذهن وهو ما مدى تغير الحل الأمثلي في حالة تغير معاملات دالة الهدف أو تغير الطرف الأيمن من القيود؟ فمثلاً كيف سيكون الحل لو أن المصنع قرر أن يكون ربحه من علبة البندول المركز ٤ ريالات بدلاً من ٣ ريالات ، أي لو أصبحت المسألة :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 100 \\ x_1 + x_2 &\le 80 \\ x_1 \qquad &\le 40 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

في هذه المسألة قمنا بتغيير معامل x_1 في دالة الهدف من 3 إلى 4. هل الحل الأمثلي سوف يظل عند النقطة B؟ إذا كان الحل الأمثلي سوف يظل عند النقطة B، فما قيمة دالة الهدف في هذه الحالة؟ وإذا كان الحل الأمثلي سوف ينتقل إلى نقطة أخرى، فما هي هذه النقطة؟ وكم قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة؟ جميع هذه الأسئلة سوف تتم الإجابة عنها لاحقاً.

سؤال آخر، ما الذي سوف يحصل للحل الأمثل لو أن المصنع قرر أن يقلل ساعات العمل الأسبوعي من 100 ساعة إلى 80 ساعة. أي لو أصبحت المسألة:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 80 \\
x_1 + x_2 &\le 80 \\
x_1 \qquad &\le 40 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

أي أننا قمنا بتغيير الطرف الأيمن في القيد الأول من 100 إلى 80. هل الحل الأمثلي سوف يظل عند النقطة B؟ إذا كان الحل الأمثلي سوف يظل عند النقطة B، فما قيمة دالة الهدف في هذه الحالة؟ وإذا كان الحل الأمثل سوف ينتقل إلى نقطة أخرى، فما هي هذه النقطة؟ وكم قيمة دالة الهدف عند هذه النقطة؟

قد يظن القارئ أن كلا المسألتين السابقتين عبارة عن مسألة جديدة ونحتاج إلى القيام بحلها من جديد، ولكن من حسن الحظ أننا لا نحتاج إلى حل المسألتين من جديد، بل نستطيع أن نوجد حلاً للمسألتين من خلال معرفتنا لحل المسألة الأصلية؛ وذلك عن طريق تحليل الحساسية.

(٦,٢,١) تحليل تغير معاملات دالة الهدف على الحل الأمثل

The Effect of a Change in an Objective Function Coefficient.

في هذا الفصل نقوم بدراسة تأثير تغير أحد معاملات دالة الهدف في المسألة الأصلية على الحل الأمثل الحالي (أي بعد تغير معامل دالة الهدف). إن دالة الهدف في مسألة البرمجة الخطية تأخذ الصورة :

$$\max\ z = c_1 x_1 + c_2 x_2$$

عندما تتغير قيمة c_1 أو قيمة c_2 ، فإن ميل المستقيم $z = c$ سوف يتغير. وفي هذه الحالة قد يتغير الحل الأمثلي إلى نقطة حدية أخرى. ولكن هناك مجال معين للتغير لكل من c_1 و c_2 بحيث لا يتغير الحل الأمثلي (مدى التغير). نوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال (٦,٢)

وضح تأثير تغير c_1 (معامل x_1 في دالة الهدف) على الحل الأمثلي الحالي في المثال (٦,١).

الحل

بما أن c_1 هي معامل المتغير x_1 في دالة الهدف، إذًا c_1 تمثل قيمة البندول المركز بدلاً من 3. نناقش الآن تأثير هذا التغير في الحل الأمثلي الحالي وهو $x_1^* = 20$ ، $x_2^* = 60$ و $z^* = 180$. في هذه الحالة تكون مسألة البرمجة الخطية معطاة بالصورة :

$$\begin{aligned}
\max\ z &= c_1 x_1 + 2x_2 \\
\text{s.t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 100 \\
x_1 + x_2 &\le 80 \\
x_1 \qquad &\le 40 \\
x_1, x_2 &\ge 0
\end{aligned}$$

من الواضح أنه لو زاد ربح المصنع من البندول المركز بشكل كافٍ (أي قمنا بزيادة c_1 بشكل كافٍ)، فإن المصنع سوف ينتج عددًا أكبر من البندول المركز، أي أن s_3 سوف تصبح متغيرًا غير أساسي (لماذا؟). أما لو نقصت قيمة البندول المركز بشكل كافي (أي قمنا بتقليل c_1 بشكل كافي)، فإنه من المتوقع أن المصنع سوف ينتج بندولاً عاديًا فقط ويتوقف عن إنتاج البندول المركز، أي أن x_1 سوف يكون متغيرًا غير أساسي (لماذا؟).

السؤال الآن ما هو ربح المصنع الذي يجب أن يحققه من بيعه للبندول المركز بحيث يبقى الحل الأساسي الأمثلي الحالي $x_1 = 20$ و $x_2 = 60$ حلاً أمثليًا للمسألة الجديدة؟ بمعنى آخر ما هي القيم الممكنة لـ c_1 لكي يبقى الحل الأساسي الأمثلي الحالي حلاً أمثليًا للمسألة الجديدة؟

في الوقت الحالي قيمة $c_1 = 3$. إذًا أي مستقيم ربحي سوف تكون معادلته بالصورة $z = cons$، أي:

$$3x_1 + 2x_2 = \text{cons}$$

سوف نعتبر الآن المستقيم الربحي $\mathcal{L}_1$ والذي له المعادلة التالية:

$$\mathcal{L}_1 :\ x_2 = \frac{-3x_1}{2} + \frac{\text{cons}}{2}$$

إذًا ميل المستقيم الربحي هو $-3/2$. وكذلك نعتبر المستقيمين الناتجين عن القيود، وهما:

$$\mathcal{L}_2 :\ x_2 = -2x_1 + 100$$

والذي ميله يساوي 2- ، والمستقيم:

$$\mathcal{L}_3 :\ x_2 = -x_1 + 80$$

والذي ميله يساوي 1- .

نأتي الآن للحالة التي تكون فيها قيمة البندول المركز تساوي c_1 في هذه الحالة تكون معادلة المستقيم الربحي بالصورة :

$$\mathcal{L}_{c_1} : x_2 = \frac{-c_1}{2} x_1 + \frac{\text{cons}}{2}$$

وميل المستقيم في هذه الحالة يساوي $\frac{-c_1}{2}$.

نقوم بدراسة وتحليل التغيرات التي سوف تحدث للحل الأمثلي عند زيادة ميل المستقيم $\mathcal{L}_{c_1}$ ، وكذلك عند تقليل ميل المستقيم $\mathcal{L}_{c_1}$.

١- نلاحظ أنه في حالة زيادة ميل المستقيم $\mathcal{L}_{c_1}$ ، فإن الميل سوف يزداد حتى يصبح أكبر من ميل المستقيم $\mathcal{L}_3$ ، وفي هذه الحالة سوف يتغير الحل الأساسي الأمثلي من النقطة B إلى النقطة A. ولأن ميل المستقيم $\mathcal{L}_{c_1}$ يساوي $\frac{-c_1}{2}$ ، إذًا الحل الأساسي الأمثلي سوف يستمر عند النقطة B ما دام ميل المستقيم $\mathcal{L}_{c_1}$ أقل من ميل المستقيم $\mathcal{L}_3$ ، أي عندما :

$$\frac{-c_1}{2} \le -1 \;\Rightarrow\; c_1 \ge 2$$

إذًا عندما تكون قيمة c_1 أكبر من أو تساوي 2 فإن الحل الأمثلي سوف يظل عند النقطة B. أما إذا كانت c_1 أقل من 2 فإن الحل الأساسي الأمثلي سوف ينتقل من النقطة B إلى النقطة A أي عند النقطة $(0,80)$. وهذا يعني أنه لو كانت قيمة البندول المركز أقل من 2 فإنه من الطبيعي أن يتوقف المصنع عن إنتاج البندول المركز ويركز إنتاجه على البندول العادي.

٢- الحالة الثانية عند تقليل ميل المستقيم $\mathcal{L}_{c_1}$ ، نجد أن الميل سوف يقل حتى يصبح أقل من ميل المستقيم $\mathcal{L}_2$ وفي هذه الحالة سوف يتغير الحل الأساسي الأمثلي من

النقطة B إلى النقطة C. إذًا الحل الأساسي الأمثلي سوف يستمر عند النقطة B في حالة كون ميل المستقيم $\mathcal{L}_2$ أكبر من ميل المستقيم $\mathcal{L}_{c_1}$ ، أي عندما :

$$\frac{-c_1}{2} \geq -2 \Rightarrow c_1 \leq 4$$

إذًا عندما تكون قيمة c_1 أقل من أو تساوي 4 ، فإن الحل الأمثلي سوف يظل عند النقطة B. أما إذا كانت قيمة c_1 أكبر من 4 فإن الحل الأساسي الأمثلي سوف ينتقل من النقطة B إلى النقطة C أي عند النقطة $(40,20)$. وهذا يعني أنه إذا كانت قيمة البندول المركز أكبر من 4 فإنه من الأفضل إنتاج أكبر كمية ممكنة من البندول المركز وهي 40 .

وكملخص لما تم ذكره في الفقرتين (١) و (٢)، يتضح أنه في حالة تغير c_1 (قيمة البندول المركز) فإن الحل الأساسي الأمثلي سوف يظل حلاً أساسيًا أمثليًا عندما $2 \leq c_1 \leq 4$. وفي هذه الحالة فإن المصنع سوف يقوم بإنتاج 20 علبة بندول مركز و 60 علبة بندول عادي. ولكن في هذه الحالة سوف تتغير قيمة الحل الأمثلي $z = 180$ وتصبح معتمدة على قيمة c_1 ، فمثلاً لو كانت c_1 تساوي 4 فإن :

$$z^* = 4(20) + 2(60) = 200$$

أي 200 ريالٍ بدلاً من 180 ريالاً.

وبشكل عام، إذا كانت قيمة c_1 محصورة بين 2 و 4 ، فإن الحل الأمثلي لمسألة البرمجة الخطية سوف يكون $x_1^* = 20$ و $x_2^* = 60$ ، وقيمة دالة الهدف في هذه الحالة سوف تعتمد على c_1 ، وبالتعويض في دالة الهدف نجد أن :

$$z^* = c_1(20) + 2(60) = 20c_1 + 120$$

لعل من المهم التنبيه إلى الملاحظة التالية : قد يتبادر لذهن القارئ أنه في حال وضعنا $c_1 = 1$ ، فإن الحل الأمثل سوف يصبح $z^* = 1(20) + 2(60) = 140$. ولكن

هذا الكلام غير صحيح، والسبب أن $c_1 = 1$ ليست داخل مدى التغير. الواقع أنه في هذه الحالة سوف ينتقل الحل من النقطة B إلى النقطة A. وبذلك تكون قيمة دالة الهدف تساوي $z^* = 2(80) = 160$.

أما لو كانت قيمة $c_1 = 5$، فإن الحل سوف ينتقل إلى النقطة $C = (40, 20)$، وقيمة دالة الهدف في هذه الحالة $z^* = 5(40) + 2(20) = 240$. □

نستطيع أن نلخص المثال السابق كالتالي، عند تغير أحد معاملات دالة الهدف فإن الحل الأمثلي يظل كما هو ما دام ميل المستقيم $z = cons$ محصور بين ميل المستقيمين الملزمين أي المستقيمين اللذين يعطي تقاطعهما الحل الأمثلي للمسألة الأصلية. وفي هذه الحالة تكون قيم متغيرات القرار هي نفسها في المسألة الأصلية بينما تتغير دالة الهدف وتعتمد قيمتها على معامل دالة الهدف c_i.

(٦,٢,٢) تحليل تغير الطرف الأيمن على الحل الأمثل

The Effect of a Change in a Right-Hand side of the LP's Optimal Solution

إن من الممكن استخدام الرسم أيضًا لتحديد ما إذا كان إحداث تغير في الطرف الأيمن لأحد القيود سوف يغير الحل الأساسي الأمثلي الحالي أم لا.

نبين في المثال التالي تأثير تغير الطرف الأيمن في القيود على الحل الأمثل.

مثال (٦,٣)

من خلال الرسم، وضح تأثير تغير الطرف الأيمن في القيد الأول على الحل الأمثلي الحالي في المثال (٦,١). ثم وضح تأثير تغير الطرف الأيمن في القيدين الثاني والثالث على الحل الأمثلي الحالي.

الحل

ليكن b_1 هو عدد ساعات العمل المتاحة. نلاحظ أنه في المسألة الأصلية كانت قيمة b_1 مساوية لـ 100. وفي هذه الحالة سوف يكون القيد الأول معطى بالعلاقة :

$$2x_1 + x_2 \leq b_1$$

السؤال المطروح هنا : ***ما هي القيم الممكنة لـ b_1 بحيث يكون الحل الأساسي الأمثلي B حلاً أمثليا*** ؟ الواقع أننا عندما نقوم بتغيير قيمة b_1 فإن الحل الأمثلي لن يكون عند النقطة B ؛ لذلك فإننا نستبدل السؤال السابق بالسؤال التالي : ***ما هي القيم الممكنة لـ b_1 بحيث يظل الحل الأساسي الأمثلي نقطة تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_2$ و $\mathcal{L}_3$*** ؟

نلاحظ أننا عندما نقوم بتغيير قيمة b_1 فإن المستقيمات الناتجة هي مستقيمات موازية للمستقيم $\mathcal{L}_2$ ، هذه المستقيمات نرمز لها بالرمز $\mathcal{L}_b$ وتعرف كالتالي :

$$\mathcal{L}_{b_1} : \ 2x_1 + x_2 = b_1$$

الحل الأساسي الأمثلي كان عند النقطة B وهي نقطة تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$. عندما تتغير قيمة b_1 فإن الحل الأمثلي لن يصبح عند النقطة B ولكنه سوف يظل عند نقطة تقاطع المستقيمين مادام المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$ يتقاطعان. سوف نرمز لنقطة التقاطع بالرمز B_b .

نقوم بدراسة وتحليل التغيرات التي سوف تحدث للحل الأمثلي عند زيادة قيمة b_1 وكذلك عند تقليل قيمة b_1.

١- عند زيادة قيمة b_1 ، نجد أن المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$ سوف يتقاطعان حتى نصل إلى النقطة D. وفي هذه الحالة يمكن الحصول على قيمة b_1 بالتعويض عن قيمة

$x_1 = 40, x_2 = 40$ في العلاقة $2x_1 + x_2 = b_1$. فينتج أن قيمة b_1 تساوي 120. في هذه الحالة تنطبق النقطة B_b مع النقطة D. نستنتج من ذلك أنه إذا كانت $b_1 \leq 120$ فإن الحل الأمثلي سوف يكون تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$ أي النقطة B_b. إما إذا كانت $b_1 > 120$ ، فإن تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$ سوف يكون عن يمين المستقيم $x_1 = 40$. أي أن عدد علب البندول المركز أكبر من 40 وهو ما يخالف شرط الطلب. إذًا في هذه الحالة سوف يتغير الحل الأمثلي. ولن يصبح تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$.

٢- عند تقليل قيمة b_1 ، نجد أن المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$ سوف يتقاطعان حتى نصل إلى النقطة A. وفي هذه الحالة يمكن الحصول على قيمة b_1 بالتعويض عن قيمة $x_1 = 0, x_2 = 80$ في العلاقة $2x_1 + x_2 = b_1$. فينتج أن قيمة b_1 تساوي 80. في هذه الحالة تنطبق النقطة B_b مع النقطة A. نستنتج من ذلك أنه إذا كانت $b_1 \geq 80$ فإن الحل الأمثلي سوف يكون تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$ أي النقطة B_b. إما إذا كانت $b_1 < 80$ ، فإن تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$ سوف يكون عن يسار محور x_2 أي عندما تكون $x_1 < 0$. وهذا يعني أن عدد علب البندول المركز سوف يكون عددًا سالبًا وهذا مستحيل. إذًا في هذه الحالة سوف يتغير الحل الأمثلي، ولن يصبح تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$.

نستطيع تلخيص ما سبق بأن الحل الأمثلي سوف يظل تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$ متى ما كانت قيم b_1 محصورة بين $80 \leq b_1 \leq 120$. ولكن على الرغم من أن الحل الأمثل سوف يستمر تقاطع $\mathcal{L}_{b_1}$ مع $\mathcal{L}_3$ ، إلا أن قيمة متغيرات القرار وقيمة دالة الهدف سوف تتغير. فمثلاً إذا كانت $80 \leq b_1 \leq 100$ فإن الحل الأمثل سوف يتغير من النقطة B إلى نقطة أخرى B_b تقع على القطعة المستقيمة AB. بينما لو كانت

$100 \le b_1 \le 120$ فإن الحل الأمثل سوف يتغير من B إلى نقطة أخرى B_b تقع على المستقيم BD.

لنحسب الآن قيمة الحل الأمثل إذا تغيرت b_1 بحيث $80 \le b_1 \le 120$. ليكن مقدار التغير Δ ولتكن $b_1 = 100 + \Delta$. في هذه الحالة سوف يظل الحل الأساسي الأمثل تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ مع $\mathcal{L}_3$ مادامت $-20 \le \Delta \le 20$. ولإيجاد الحل الأمثل، نوجد نقطة تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_1}$ و $\mathcal{L}_3$. معادلة المستقيمين سوف تكون:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &= 100 + \Delta \\ x_1 + x_2 &= 80 \end{aligned}$$

نقطة التقاطع هي:

$$x_1^* = 20 + \Delta, \ \ x_2^* = 60 - \Delta$$

وقيمة دالة الهدف:

$$\begin{aligned} z^* &= 3(20 + \Delta) + 2(60 - \Delta) \\ &= 180 + \Delta \end{aligned}$$

نأتي الآن للحالة الثانية لو تم تثبيت $b_1 = 100$ وتغيير b_2 بحيث تصبح $b_2 = 80 + \Delta$. لنعرف المستقيم $\mathcal{L}_{b_2}$ بأنه:

$$\mathcal{L}_{b_2}: \ x_1 + x_2 = b_2$$

من السهل ملاحظة أن الحل الأمثلي سوف يستمر تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_{b_2}$ و $\mathcal{L}_3$ مادامت $-20 \le \Delta \le 20$ وسوف يكون الحل الأمثل عند النقطة:

$$\begin{aligned} x_1^* &= 20 - \Delta \\ x_2^* &= 60 + 2\Delta \end{aligned}$$

وقيمة دالة الهدف:

$$z^* = 180 + \Delta$$

وأخيرًا عند تثبيت $b_1 = 100$, $b_2 = 80$ وتغيير b_3 بحيث $b_3 = 40 + \Delta$ فإن الحل سوف يظل تقاطع المستقيمين $\mathcal{L}_2$ مع $\mathcal{L}_3$ مادامت $\Delta \geq -20$ وسوف يستمر الحل الأمثل عند النقطة:

$$x_1^* = 20, \ \ x_2^* = 60$$

وقيمة دالة الهدف:

$$z^* = 180 \qquad \square$$

(٦,٣) طريقة السمبلكس باستخدام المصفوفات

The Simplex Method in Matrix Form

تحت هذا العنوان سوف نوضح كيف يمكن الاستفادة من الصيغ التي استخدمناها في الفصل الخامس عندما تحدثنا عن طريقة السمبلكس المعدلة في إيجاد الحل الأمثلي لمسألة البرمجة الخطية بمعرفة المتغيرات الأساسية في الجدول الأمثلي. لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية والتي تحتوي على m من القيود و n من المتغيرات:

$$\begin{aligned}
\max \ \ & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \\
\text{s.t.} \ \ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\
& \ \ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad\ \ \vdots \quad\ \ \vdots \qquad\ \ \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \\
& x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)
\end{aligned}$$

في حالة معرفتنا للمتغيرات الأساسية في الجدول الأمثلي لهذه المسألة، نستطيع أن نعرف الحل الأمثل لهذه المسألة دون أن نقوم بحلها. نوضح هذه الطريقة في المثال التالي:

مثال (٦,٤)

لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية والمكتوبة في الصيغة القياسية :

$$\begin{aligned}\max\ z &= 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3\\ \text{s.t.}\quad & x_1 + 4x_2 + 4x_3 + s_1 = 12\\ & 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + s_2 = 30\\ & 3x_1 + 3x_2 + x_3 + s_3 = 18\end{aligned}$$

لنفرض أننا استطعنا إيجاد الحل الأمثلي ، وليكن bv_i هو الحل الأساسي للصف i في الجدول الأمثلي النهائي. ولنعرف BV على النحو التالي :

$$BV = \{bv_1, \ldots, bv_m\}$$

ولتكن NBV المجموعة المكونة من الحلول غير الأساسية في الجدول الأمثلي ، ولنعرف المتجهات $\mathbf{x}_B , \mathbf{x}_N$ كالتالي :

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} bv_1 \\ \vdots \\ bv_m \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} nbv_1 \\ \vdots \\ nbv_{n-m} \end{bmatrix}$$

عند قيامنا بحل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس ، توصلنا إلى الجدول الأمثلي التالي :

$$\begin{aligned} z \qquad + 5/9x_3 + 10/3s_1 + 20/9s_3 &= 80\\ x_2 + 11/9x_3 + 1/3s_1 - 1/9s_3 &= 2\\ 47/9x_3 + 1/3s_1 + s_2 - 10/9s_3 &= 14\\ x_1 - 8/9x_3 - 1/3s_1 + 4/9s_3 &= 4\end{aligned}$$

مـن الواضـح أن المـتغيرات الأساسـية هـي $BV = \{x_2, s_2, x_1\}$ ، أمـا المـتغيرات غـير الأساسية فهـي $NBV = \{x_3, s_1, s_3\}$. وفي هـذه الحالـة نجـد أن $\mathbf{x}_B , \mathbf{x}_N$ تأخـذ القيم التالية :

$$\mathbf{x}_B = \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x}_N = \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

نعـرف الآن المتجهين $\mathbf{c}_B$ و $\mathbf{c}_N$ ليكونـا معـاملات المتغيرات الأساسـية وغـير الأساسـية على الترتيب في دالة الهدف الأصلية ، ومن ثَم :

$$\mathbf{c}_B = [20 \quad 0 \quad 10]$$
$$\mathbf{c}_N = [15 \quad 0 \quad 0\ ]$$

نعـرف المـصفوفة B مـن النـوع $m \times m$ بأنهـا المـصفوفة الـتي يكـون العمـود j هـو معـاملات المتغير الأساسـي bv_j في المسألة الأصـلية. في مثالنـا الـسابق يكـون العمـود الأول للمصفوفة B هو عمود x_2 في المسألة الأصلية ، والعمـود الثاني هـو عمـود s_2 وأخيرًا العمود الثالث هو عمود x_1 ، أي أن :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

الآن نعرف $\mathbf{a}_j$ بأنه عمود x_j في قيود المسألة الأصلية ، و نعرف $\mathbf{a}_{j+m}$ بأنه عمود s_j في قيود المسألة الأصلية. كما نعرف المصفوفة N بأنها من النـوع $m \times (n-m)$ بحيـث تكون أعمدتها هي أعمدة المتغيرات غير الأساسية في المسألة الأصلية. في مثالنـا كانـت $NBV = \{x_3, s_1, s_3\}$ ، إذًا :

$$N = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

.

وأخيرًا نعرف $\mathbf{b}$ بأنها الطرف الأيمن من القيود، أي أن:

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

الآن نقوم بكتابة المسألة الأصلية بعد أن نفصل المتغيرات الأساسية عن المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف وفي القيود، فنحصل على:

$$\begin{aligned} \max z &= \mathbf{c}_B \mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N \mathbf{x}_N \\ \text{s.t.} \quad & B\,\mathbf{x}_B + N\,\mathbf{x}_N = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x}_B , \mathbf{x}_N \geq 0 \end{aligned}$$

في مثالنا السابق، يمكن كتابة المسألة بالصورة التالية:

$$\begin{aligned} \max \quad z &= \begin{bmatrix} 20 & 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 15 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} \\ \text{s.t.} \quad & \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} \\ & \begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

وللحصول على قيود الجدول الأمثلي، نطبق نفس الطريقة التي سبق الإشارة إليها في الفصل السابق. فنقوم بضرب القيد $B\,\mathbf{x}_B + N\,\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$ في B^{-1} فنحصل على:

$$\mathbf{x}_B + B^{-1}N\mathbf{x}_N = B^{-1}\mathbf{b} \qquad (1)$$

والتي تمثل قيود الجدول الأمثلي.

ولكي نوجد قيمة B^{-1} في المثال، نقوم باستخدام طريقة جاوس جوردن (Gause – Jordan method) فنحصل على:

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix}$$

نقوم الآن بالتعويض في (1) فنحصل على قيود الجدول الأمثلي:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

وبعد التبسيط نحصل على الجدول:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ s_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 11/9 & 1/3 & -1/9 \\ 47/9 & 1/3 & -10/9 \\ -8/9 & -1/3 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وهذا هو جدول القيود الأمثلي للمسألة.

ولإيجاد دالة الهدف نستخدم نفس الطريقة التي استخدمناها في طريقة السمبلكس المعدلة فنحصل على دالة الهدف في الجدول الأمثلي:

$$z + (\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N)\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b} \qquad (2)$$

وبالتعويض في (2) في المثال السابق نحصل على دالة الهدف التالية :

$$z+\left(\begin{bmatrix}20 & 0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -1/9\\ 1/3 & 1 & -10/9\\ -1/3 & 0 & 4/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}15 & 0 & 0\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}x_3\\ s_1\\ s_3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}20 & 0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -1/9\\ 1/3 & 1 & -10/9\\ -1/3 & 0 & 4/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\ 30\\ 18\end{bmatrix}$$

والتي يمكن تبسيطها لتصبح :

$$z+5/9x_3+10/3s_1+20/9s_3=80 \qquad \square$$

مثال (٦,٥)

لتكن لدينا المسألة التالية :

$$\begin{aligned}\max\quad & z=x_1+2x_2\\ \text{s.t.}\quad & -x_1+x_2+s_1=1\\ & 2x_1+x_2+s_2=4\end{aligned}$$

والتي لها الأساس الأمثلي $BV=\{x_2,x_1\}$. أوجد دالة الهدف والقيود في الجدول الأمثلي.

الحل

نقوم في البداية بفصل معاملات المتغيرات الأساسية $BV=\{x_2,x_1\}$ عن معاملات المتغيرات غير الأساسية $NBV=\{s_1,s_2\}$ في دالة الهدف وفي القيود مع الاهتمام بترتيب المتغيرات الأساسية فنحصل على :

$$\max \quad z = \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \geq 0$$

في هذه الحالة تكون المصفوفة B تساوي :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

نقوم باستخدام طريقة جاوس جوردن للحصول على B^{-1} ، فنجد أن :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

وبضرب القيود في B^{-1} نحصل على :

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

أي أن القيود يمكن كتابتها بالصورة :

$$x_2 + 2/3 s_1 + 1/3 s_2 = 2$$

$$x_1 \quad - 1/3 s_1 + 1/3 s_2 = 1$$

وأخيرًا نوجد دالة الهدف في الحل الأمثل وذلك بالتعويض في (2) مباشرة، أو عن طريق الاستنتاج كما يلي. ونقوم بكتابة دالة الهدف الأصلية والقيود التي توصلنا إليها في الجدول الأمثلي ثم نعمل على حذف المتغيرات الأساسية من دالة الهدف.

$$z - \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وبضرب القيود في $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$ والجمع نحصل على:

$$z + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = 5$$

أي أن دالة الهدف تساوي:

$$z + s_1 + s_2 = 5 \qquad \square$$

(٦,٤) تحليل الحساسية باستخدام المصفوفات

Sensitivity Analysis in Matrix Form

شرحنا تحت العنوان (٦.١) كيفية تحليل الحساسية عن طريق الرسم، وبينا أن الرسم يمكن استخدامه في حالة وجود متغيرين فقط. ولكن الواقع أن معظم المسائل التطبيقية تحتوي على أكثر من متغيرين. تحت هذا العنوان نبين كيف يتغير الحل الأمثل عند تغير أحد معاملات دالة الهدف أو الطرف الأيمن في القيود، وذلك بطريقة تحليلية بحيث يمكن تطبيقها على أكثر من متغيرين.

ولتوضيح خطوات تحليل الحساسية، سوف نقوم بشرح تحليل الحساسية لمسألة قيمة عظمى "max" ويكون التطبيق مماثلاً في حالة مسألة القيمة الصغرى "min".

لتكن BV مجموعة المتغيرات الأساسية في الحل الأمثلي، ونريد معرفة ما إذا كانت هذه المتغيرات سوف تظل أساسية وأمثلية في حالة تغير أحد متغيرات النموذج في مسألة البرمجة الخطية.

يعتمد تحليل الحساسية على الملاحظة التالية والتي سبق شرحها في الفصل الثالث "*نعرف أن جدول السمبلكس لمجموعة من المتغيرات الأساسية* BV *يكون أمثليا إذا وفقط إذا كان الطرف الأيمن لكل قيد عدداً غير سالب ومعامل كل متغير في الصف* Row 0 *عدداً غير سالب أيضا*". وهذا يعني أننا نستطيع معرفة ما إذا كان الجدول أمثليا أم لا من خلال حسابنا للطرف الأيمن والتثبت من أن قيمته دائمًا غير سالبة، كما نحسب معاملات دالة الهدف، ونتثبت أيضًا من أن قيمتها غير سالبة. لنفرض أنه لدينا الجدول التالي في مسألة برمجة خطية:

$$
\begin{aligned}
z \;+x_1+x_2+3s_3 &= 2 \\
&= 1 \\
&= 2 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

هذا الجدول أمثلي بغض النظر عن بقية الأعداد الموجودة؛ وذلك لأن معاملات المتغيرات في الصف الأول غير سالبة، كما أن الطرف الأيمن لجميع القيود أعداد غير سالبة.

لنفرض أننا قمنا بحل مسألة برمجة خطية وتوصلنا إلى المتغيرات الأساسية الأمثلية BV. ونرغب أن نحدد ما هو تأثير تغيير متغيرات النموذج الرياضي في مسألة

البرمجة الخطية على المتغيرات الأساسية السابقة BV. لتحديد ذلك نتبع الخطوات التالية :

١- نستخدم الصيغ في الفصل السابق لتحديد قيمة الطرف الأيمن ودالة الهدف في الجدول الأمثلي الجديد.

٢- إذا كانت جميع المعاملات في الصف Row 0 غير سالبة وكل قيد يحوي طرفاً أيمنًا غير سالب فإن المتغيرات الأساسية BV في هذه الحالة سوف تظل أمثلية. أما إذا أصبح أحد المعاملات في الصف Row 0 سالبًا أو أحد القيود احتوى على طرف أيمن سالب فإن المتغيرات الأساسية BV في هذه الحالة لن تكون أمثلية.

إذًا هناك حالتان حتى لا يكون الحل الأساسي BV أمثليًا.

الحالة الأولى

أن يكون أحد معاملات المتغيرات في الصف Row 0 سالبًا. في هذه الحالة، نستطيع زيادة قيمة دالة الهدف وذلك باختيار المتغير ذي المعامل الأكبر بإشارة سالبة ليكون متغيرًا داخلاً. المتغيرات الأساسية BV للمسألة الأصلية تسمى *أساسا جزئياً* للمسألة الجديدة (suboptimal basis).

الحالة الثانية

أن يكون الطرف الأيمن لقيد أو أكثر عددًا سالبًا. في هذه الحالة سوف يكون أحد المتغيرات الأساسية سالبًا ولن يكون الحل الناتج مقبولاً. المتغيرات الأساسية BV للمسألة الأصلية تسمى *أساسا غير مقبول* للمسألة الجديدة (infeasible basis).

سوف نستخدم المثال (٦،٤) لتوضيح طريقة تحليل الحساسية. لقد كان الجدول الأولي للمسألة :

$$\begin{aligned}
z - 10x_1 - 20x_2 - 15x_3 \qquad\qquad &= 0 \\
x_1 + 4x_2 + 4x_3 + s_1 \qquad &= 12 \\
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \qquad + s_2 \quad &= 30 \\
3x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad\qquad + s_3 &= 18
\end{aligned}$$

وكان الجدول الأمثلي لهذه المسألة :

$$\begin{aligned}
z \qquad\quad + 5/9x_3 + 10/3s_1 \qquad + 20/9s_3 &= 80 \\
x_2 + 11/9x_3 + 1/3s_1 \qquad - 1/9s_3 &= 2 \\
47/9x_3 + 1/3s_1 + s_2 - 10/9s_3 &= 14 \\
x_1 \qquad - 8/9x_3 - 1/3s_1 \qquad + 4/9s_3 &= 4
\end{aligned}$$

في هذه الحالة تكون المتغيرات الأساسية $BV = \{x_2, s_2, x_1\}$ ، والمتغيرات غير الأساسية $NBV = \{x_3, s_1, s_3\}$ ، والحل الأمثلي $z^* = 80$ عند الحل الأساسي :

$$bfs^* : x_2^* = 2, s_2^* = 14, x_1^* = 4, x_3^* = s_1^* = s_3^* = 0$$

نناقش الآن كيف يمكن أن يتغير الحل الأمثلي لمسألة البرمجة الخطية عند حدوث تغيير في أحد معاملات مسألة البرمجة الخطية التالية :

١- تغير معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي.

٢- تغير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي.

٣- تغير الطرف الأيمن لأحد القيود.

في كل حالة من الحالات السابقة يلزمنا حساب معاملات المتغيرات غير الأساسية في دالة الهدف الأمثلية وهي $\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N$ والتثبت من أن هذه المعاملات لن تكون

سالبة، وكذلك يلزمنا حساب الطرف الأيمن في القيود الأمثلية وهو $B^{-1}\mathbf{b}$ ، والتثبت من أن الطرف الأيمن لن يكون سالبًا. ثم بعد ذلك نوجد قيمة المعاملات الأساسية الأمثلية وهي $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ ، وتكون قيمة دالة الهدف الأمثلية $z = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$.

عندما نقوم بتحليل الحساسية لأي معامل يجب القيام بالتالي :

١- تحديد المجال الذي يتغير فيه المتغير بحيث يظل الحل الأساسي الأمثلي الحالي أمثليًا بعد التغيير.

٢- تحديد قيمة المتغيرات الأساسية.

٣- تحديد قيمة دالة الهدف.

(٦,٤,١) تغير معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي

Changing the Objective Function Coefficient of a Nonbasic Variable

عندما يتغير أحد معاملات دالة الهدف لمتغير غير أساسي، نجد أن $\mathbf{c}_N$ هي الحد الوحيد الذي سوف يتغير، إذًا الطرف الأيمن للقيود $B^{-1}\mathbf{b}$ لن يتغير، ولكن معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية $\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N$ سوف تتغير. والواقع أن المعامل الوحيد الذي سوف يتغير هو معامل المتغير غير الأساسي. في هذه الحالة نجد أن قيمة المتغيرات الأساسية $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ سوف تضل كما هي، كما أن قيمة دالة الهدف $z = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$ لن تتغير. نوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال (٦,٦)

أوجد تحليلاً للحساسية للمسألة الواردة في المثال (٦,٤) عندما يتغير معامل المتغير غير الأساسي x_3 .

الحل

في المثال (٦،٤) نلاحظ أن المتغير x_3 هو متغير القرار الوحيد غير الأساسي. في المسألة الأصلية كان معامل x_3 هو $c_3 = 15$. السؤال الآن كيف سيتغير الحل الأمثل إذا تغيرت قيمة c_3؟ أي ما هي قيم c_3 بحيث تظل المتغيرات الأساسية $BV = \{x_2, s_2, x_1\}$ أمثلية؟

لنفرض أننا غيرنا معامل x_3 من 15 إلى $15+\Delta$. السؤال الآن ما هي قيم Δ بحيث تظل المتغيرات الأساسية $BV = \{x_2, s_2, x_1\}$ أمثلية؟ لإجابة هذا السؤال نحدد كيفية تغير جدول المتغيرات الأساسية في حالة تغير c_3 من 15 إلى $15+\Delta$. في هذه الحالة تكون المعاملات كالتالي:

$$\mathbf{c}_B = [20 \ \ 0 \ \ 10], \quad \mathbf{c}_N = [15+\Delta \ \ 0 \ \ 0],$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad N = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن تغير c_3 لن يغير B^{-1} ولا $\mathbf{b}$ وعليه فإن الطرف الأيمن $B^{-1}\mathbf{b}$ لن يتغير. أي أن المتغيرات الأساسية مازالت مقبولة. وبما أن x_3 ليس متغيرًا أساسيًا فإن $\mathbf{c}_B$ لن تتغير. نقوم الآن بالتعويض عن المتغيرات السابقة في العلاقة $z + (\mathbf{c}_B B^{-1} N - \mathbf{c}_N)\mathbf{x}_N = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$ فنحصل على:

$$z+\left([20\ \ 0\ \ 10]\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -1/9\\ 1/3 & 1 & -10/9\\ -1/3 & 0 & 4/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & 1 & 0\\ 5 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}-[15+\Delta\ \ 0\ \ 0]\right)\begin{bmatrix}x_3\\ s_1\\ s_3\end{bmatrix}$$

$$=\ [20\ \ 0\ \ 10]\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -1/9\\ 1/3 & 1 & -10/9\\ -1/3 & 0 & 4/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12\\ 30\\ 18\end{bmatrix}$$

والتي يمكن تبسيطها لتصبح :

$$z\quad +(5/9-\Delta)x_3\quad +10/3s_1\quad +20/9s_3\quad =80$$

نلاحظ أن الطرف الأيمن لم يتغير كما أن معاملات s_1 و s_3 لم تتغير. الذي سوف يتغير هو معامل x_3 فقط. كان معامل x_3 في الحل الأمثل $5/9$ الآن سوف يصبح $5/9-\Delta$ إذًا المتغيرات الأساسية سوف تظل أساسية مادام $5/9-\Delta\geq 0$ أي $\Delta\leq 5/9$.

الواقع أنه في حالة تغير معامل دالة الهدف لمتغير غير أساسي فإنه يكفي أن نقوم بحساب قيمة معامل هذا المتغير في دالة الهدف الأمثلية ومن ثم التثبت من أن قيمة المعامل الجديد لن تكون سالبة. أي أنه في المثال السابق نقوم بحساب :

$$\bar{c}_3=\mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_3-c_3=[20\ \ 0\ \ 10]\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -1/9\\ 1/3 & 1 & -10/9\\ -1/3 & 0 & 4/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 5\\ 1\end{bmatrix}-(15+\Delta)$$
$$=5/9-\Delta$$

إذًا المتغيرات الأساسية سوف تظل أساسية مادام $5/9-\Delta\geq 0$ (أي $\Delta\leq 5/9$). إذا كانت $c_3\leq 15\frac{5}{9}$ فإن المتغيرات الأساسية $BV=\{x_2,s_2,x_1\}$ سوف

تكون أمثلية وقيمة z^* لن تتغير أي $z^* = 80$ ؛ وذلك لأن تغير c_3 لن يؤدي إلى تغير الطرف الأيمن في الصف Row 0.

بينما لو زادت Δ عن $5/9$ (أي أن $c_3 > 15\frac{5}{9}$)، فإنه في هذه الحالة سوف تكون المتغيرات الأساسية عبارة عن أساس جزئي ؛ وذلك لأن دالة الهدف في الصف Row 0 أصبحت تحوي معاملاً سالبًا. فمثلا لو كانت $c_3 = 16$ ، لأصبح Row 0

$$z - 4/9x_3 + 10/3s_1 + 20/9s_3 = 80$$

وفي هذه الحالة يصبح x_3 متغيرًا داخلاً ويتغير الأساس.

وباختصار، إذا كانت $\Delta \le 5/9$ ، نجد أن الحل سوف يظل كما هو، أي أن حل المسألة سوف يكون:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ s_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وقيمة دالة الهدف $z^* = 80$. أما لو كانت $\Delta > 5/9$ ، فإن الحل الأمثلي للمسألة الأصلية لن يكون أمثليًا للمسألة بعد التغيير ونحتاج أن نكمل الحل باستخدام طريقة السمبلكس. □

(٦,٤,٢) تغير معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي

Changing the Objective Function Coefficient of a Basic Variable

عندما يتغير أحد معاملات دالة الهدف لمتغير أساسي، نجد أن $\mathbf{c}_B$ هي الحد الوحيد الذي سوف يتغير، إذًا الطرف الأيمن للقيود $B^{-1}\mathbf{b}$ لن يتغير، ولكن معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية $\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N$ سوف تتغير؛ وذلك لاحتوائها على $\mathbf{c}_B$. في هذه الحالة نجد أن قيمة المتغيرات الأساسية $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ سوف تضل كما

هي لعدم احتوائها على $\mathbf{c}_B$ ، بينما قيمة دالة الهدف $z = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$ سوف تتغير. نوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال (٦,٧)

أوجد تحليلاً للحساسية للمسألة الواردة في المثال (٦,٤) عندما يتغير معامل المتغير الأساسي x_1.

الحل

عندما يتغير معامل المتغير الأساسي x_1 ، نلاحظ أن $\mathbf{b}$ و B^{-1} لن تتغير، إذًا الطرف الأيمن من القيود لن يتغير ولذلك فالحل الأساسي سوف يكون مقبولاً. الآن نحسب التغير في دالة الهدف في الجدول النهائي. سوف نقوم بتغيير c_1 من 10 إلى $10+\Delta$ وبذلك فإن $\mathbf{c}_B = [20 \;\; 0 \;\; 10+\Delta]$. والآن نعيد كتابة دالة الهدف في الجدول الأمثلي كالتالي :

$$z + \left([20 \;\; 0 \;\; 10+\Delta] \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 5 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - [15 \;\; 0 \;\; 0] \right) \begin{bmatrix} x_3 \\ s_1 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$= [20 \;\; 0 \;\; 10+\Delta] \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12 \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix}$$

والتي يمكن كتابتها بعد التبسيط بالشكل التالي :

$$z + (5/9 - 8/9\Delta)x_3 + (10/3 - 1/3\Delta)s_1 + (20/9 + 4/9\Delta)s_3 = 80 + 4\Delta$$

حتى تظل المتغيرات الأساسية أمثلية ، لابد أن تكون معاملات المتغيرات غير الأساسية غير سالبة ، أي أن :

$$5/9-8/9\Delta \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \le 5/8$$
$$10/3-1/3\Delta \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \le 10$$
$$20/9+4/9\Delta \ge 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta \ge -5$$

إذًا المتغيرات الأساسية الحالية سوف تظل أمثلية مادام $-5 \le \Delta \le 5/8$. وبما أن $c_1 = 10 + \Delta$ إذًا قيمة c_1 التي سوف تحافظ على المتغيرات الأساسية دون تغيير هي $5 \le c_1 \le 10 + 5/8$. وفي هذه الحالة نجد أن الحل سوف يظل كما هو أي أن حل المسألة سوف يكون:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ s_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 14 \\ 4 \end{bmatrix}$$

وقيمة دالة الهدف الأمثلية $z^* = 80 + 4\Delta$.

الآن لو أصبحت $c_1 > 10 + 5/8$ أو $c_1 < 5$، فإن أحد معاملات المتغيرات غير الأساسية سوف يتغير، وفي هذه الحالة نقوم باستخدام طريقة السمبلكس لإيجاد المتغير الداخل. ثم نكمل حتى نصل إلى الحل الأمثل. □

(٦,٤,٣) تغير الطرف الأيمن من القيود

Changing the Right-Hand side of a Constraint

عندما يتغير الطرف الأيمن لأحد القيود، نجد أن $\mathbf{b}$ هي الحد الوحيد الذي سوف يتغير، إذًا الطرف الأيمن للقيود $B^{-1}\mathbf{b}$ سوف يتغير، ولكن معاملات دالة الهدف للمتغيرات غير الأساسية $\mathbf{c}_B B^{-1}N - \mathbf{c}_N$ لن تتغير. في هذه الحالة نجد أن قيمة المتغيرات الأساسية $\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b}$ سوف تتغير، كما أن قيمة دالة الهدف $z = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$ سوف تتغير أيضًا. نوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٦،٨)

أوجد تحليلاً للحساسية للمسألة الواردة في المثال (٦،٤) عندما يتغير الطرف الأيمن في القيد الأول.

الحل

نلاحظ أن تغير الطرف الأيمن للقيد الأول لن يغير الصف Row 0 في الجدول الأمثلي ، ولكنه سوف يغير الطرف الأيمن في الجدول الأمثلي.

القاعدة هنا أنه مادام الطرف الأيمن لكل قيد في الجدول الأمثلي غير سالب فإن الحل الأساسي الحالي يظل مقبولاً وأمثليًا. أما لو كان هناك على الأقل طرف أيمن سالب فإن الأساس الحالي لن يكون مقبولاً ، ولذلك فلن يكون أمثليًا.

في مثالنا السابق لو فرضنا أننا غيرنا b_1 من 12 إلى $12+\Delta$ فإن الطرف الأيمن للقيود في الجدول الأمثلي سوف يصبح :

$$B^{-1}\begin{bmatrix}12+\Delta\\30\\18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/3 & 0 & -1/9\\1/3 & 1 & -10/9\\-1/3 & 0 & 4/9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}12+\Delta\\30\\18\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2+\Delta/3\\14+\Delta/3\\4-\Delta/3\end{bmatrix}$$

وحتى يظل الحل الأساسي الحالي أمثليًا ، لابد أن يكون الطرف الأيمن في كل قيد عددًا غير سالب ، أي أن :

$$\begin{aligned}2+\Delta/3\ge 0 &\quad\Rightarrow\quad \Delta\ge -6\\14+\Delta/3\ge 0 &\quad\Rightarrow\quad \Delta\ge -42\\4-\Delta/3\ge 0 &\quad\Rightarrow\quad \Delta\le 12\end{aligned}$$

إذًا الحل الأساسي يظل أمثليًا في حالة كون $-6\le\Delta\le 12$. أي عندما $6\le b_1\le 24$. أما لوكانت $b_1>24$ أو $b_1<6$ فإن الأساس الحالي لن يكون مقبولاً فهو من ثم ليس حلاً أمثليًا.

من الواضح أن تغير الطرف الأيمن في حالة كون $6 \le b_1 \le 24$ سوف يبقي على المتغيرات الأساسية كمتغيرات أساسية في المسألة الجديدة، إلا أن قيمة دالة الهدف والمتغيرات الأساسية سوف تتغير بالطبع. نقوم الآن بحساب قيمة المتغيرات الأساسية وكذلك دالة الهدف عندما تتغير b_1 بمقدار Δ بحيث $-6 \le \Delta \le 12$. وبما أن قيمة المتغيرات الأساسية تعطى بالعلاقة $B^{-1}b$ وقيمة z تعطى بالعلاقة $\mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$ نجد أن تغير b سوف يؤدي إلى تغير قيم متغيرات القرار وكذلك قيمة الدالة z. إذًا قيمة الحل الأمثل تعطى بالعلاقة:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ s_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & -1/9 \\ 1/3 & 1 & -10/9 \\ -1/3 & 0 & 4/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 12+\Delta \\ 30 \\ 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\Delta/3 \\ 14+\Delta/3 \\ 4-\Delta/3 \end{bmatrix}$$

بينما قيمة z^* سوف تصبح:

$$z^* = \mathbf{c}_B\, B^{-1}\mathbf{b} = [20 \quad 0 \quad 10] \begin{bmatrix} 2+\Delta/3 \\ 14+\Delta/3 \\ 4-\Delta/3 \end{bmatrix} = 80 + (10/3)\Delta$$

وكمثال على ذلك، لنفرض أن b_1 تغيرت إلى 21 (أي أن $\Delta = 9$)، في هذه الحالة، الحل الأساسي سوف يظل أمثليًا، وسوف تكون قيم المتغيرات الأساسية كالتالي:

$$\begin{bmatrix} x_2^* \\ s_2^* \\ x_1^* \end{bmatrix} = B^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2+9/3 \\ 14+9/3 \\ 4-9/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 17 \\ 1 \end{bmatrix}$$

بينما قيمة z^* سوف تصبح:

$$z^* = \mathbf{c}_B\, B^{-1}\mathbf{b} = 80 + 9(10/3) = 110$$

وبهذا نكون قد أوجدنا قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف عند تغير الطرف الأيمن في قيود المسألة الأصلية. □

في المثال السابق بينا بالتفصيل طريقة تحليل الحساسية عندما تكون المسألة مسألة قيمة عظمى. ما إذا كانت المسألة مسألة قيمة صغرى، فإننا في هذه الحالة نتبع نفس الخطوات السابقة ولكننا نستبدل الشرط على الصف Row 0 ، بأن *معامل أي متغير في الصف* Row 0 لا بد أن يكون أقل من أو يساوي صفرًا.

تمارين الفصل السادس

(٦,١) إذا كانت لدينا المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= c_1x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le 12 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 10 \end{aligned}$$

وكان حل المسألة عند $c_1 = 2$ هو $x_1 = 8/7\,, x_2 = 15/7\,, z = 46/7$ فإن فترة مدى التغير لـ c_1 بحيث يبقى الحل الأمثلي عند النقطة $x_1 = 8/7$ ، $x_2 = 15/7$ هي :

١- $[-5\,,-3]$ ٢- $[3/2\,,5]$

٣- $[-5/2\,,-3/4]$ ٤- $[-4\,,-2]$

(٦,٢) إذا كانت لدينا المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 3x_1 + 4x_2 \le b_1 \\ & 5x_1 + 2x_2 \le 10 \end{aligned}$$

وكان حل المسألة عند $b_1 = 12$ هو $x_1 = 8/7\,, x_2 = 15/7\,, z = 46/7$ فإن فترة مدى التغير لـ b_1 بحيث يبقى الحل الأمثلي عند تقاطع القيود نفسها هي :

١- $[6\,,20]$ ٢- $[4\,,\infty)$

٣- $[12\,,18]$ ٤- $[4\,,12]$

(٦,٣) يقوم مصنع حقائب جلدية بإنتاج نوعين من الحقائب. يحتاج إنتاج كل نوع إلى مواد خام، وعاملين حيث يقوم كل عامل بعمل مستقل عن الآخر. العامل الأول يمكنه العمل لمدة 40 ساعة أسبوعيًا، وأجرته في الساعة تساوي 5 ريالات، أما العامل الثاني فيمكنه العمل لمدة 50 ساعة أسبوعيًا وأجرته في الساعة تساوي 6 ريالات. الجدول (٦,١) يوضح الوقت اللازم لكل عامل لإنهاء كل نوع من الحقائب وكذلك قيمة المواد الأولية، و سعر بيع الحقائب.

جدول (٦,١).

	الحقيبة ١	الحقيبة ٢
الوقت اللازم للعامل الأول	ساعة واحدة	ساعتان
الوقت اللازم للعامل الثاني	ساعتان	ساعة واحدة
المواد الأولية	5 ريالات	4 ريالات
سعر البيع	25 ريالاً	22 ريالاً

١- باختيار متغيرات القرار لتكون:

عدد الحقائب من النوع الأول المنتجة أسبوعيًا =: x_1

عدد الحقائب من النوع الثاني المنتجة أسبوعيًا =: x_2

بيِّن أن مسألة البرمجة الخطية يمكن صياغتها بالصورة:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 40 \\ 2x_1 + x_2 &\le 50 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

٢- أوجد حل المسألة.

٣- ما هي الأسعار التي يمكن أن تباع بها الحقائب من النوع الأول بحيث يظل الحل الحالي أمثليًا.

٤- ما هي الأسعار التي يمكن أن تباع بها الحقائب من النوع الثاني بحيث يظل الحل الحالي أمثليًا.

٥- لو قرر العامل الأول أن يعمل لمدة 30 ساعة في الأسبوع فقط. هل سيبقى الحل الحالي أمثليًا؟ أوجد الحل الأمثلي في هذه الحالة.

٦- لو قرر العامل الأول أن يعمل لمدة 60 ساعة في الأسبوع فقط. هل سيبقى الحل الحالي أمثليًا؟ أوجد الحل الأمثلي في هذه الحالة.

(٦،٤) إذا كانت لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.} \quad & 2x_1 + x_2 \le 6 \\ & x_1 + x_2 \le 4 \\ & x_1, x_2 \ge 0 \end{aligned}$$

والتي لها الحل $z^* = 10$ عند $x_1^* = 2,\ x_2^* = 2,\ s_1^* = 0,\ s_2^* = 0$. في الحالتين التاليتين أوجد قيم Δ التي تبقي الأساس الأمثلي $BV = \{x_1, x_2\}$ أمثليًا في المسألة الجديدة، مع بيان قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف.

١- عندما تتغير b_2 إلى $b_2 = 4 + \Delta$. ما هو الحل عندما $\Delta = 4$؟

٢- عندما تتغير c_1 إلى $c_1 = 3 + \Delta$. ما هو الحل عندما $\Delta = 4$؟

(٦،٥) إذا كانت لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\qquad 3x_1 + x_2 &\le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 &\le 18 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

والتي لها الحل الأمثلي $z^* = 11$ عند $x_1^* = 4,\ x_2^* = 3,\ s_1^* = 0,\ s_2^* = 0$.

في الحالتين التاليتين أوجد قيم Δ_1, Δ_2 التي تبقي الأساس الأمثلي $BV = \{x_1, x_2\}$ أمثليًا في المسألة الجديدة، مع بيان قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف.

١- عندما تتغير b_1 إلى $b_1 = 15 + \Delta_1$.

٢- عندما تتغير c_2 إلى $c_2 = 1 + \Delta_2$.

٣- ما هو الحل عند قيم $\Delta_1 = -8$؟ $\Delta_1 = 3$؟ $\Delta_1 = 5$؟

٤- ما هو الحل عند قيم $\Delta_2 = -2/3$؟ $\Delta_2 = 0$؟ $\Delta_2 = 3$؟

(٦،٦) إذا كانت لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\qquad x_1 + x_2 &\le 6 \\ 4x_1 + x_2 &\le 12 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

والتي لها الحل الأمثل $z^* = 8$ عند $x_1^* = 2,\ x_2^* = 4,\ s_1^* = 0,\ s_2^* = 0$.

في الحالات التالية، أوجد قيم Δ التي تبقي الأساس الأمثلي

$BV = \{x_1, x_2\}$ أمثليا في المسألة الجديدة، مع بيان قيم المتغيرات الأساسية وقيمة دالة الهدف.

١- عندما تتغير b_1 إلى $b_1 = 6 + \Delta$.

٢- عندما تتغير b_2 إلى $b_2 = 12 + \Delta$.

٣- عندما تتغير c_1 إلى $c_1 = 2 + \Delta$.

٤- عندما تتغير c_2 إلى $c_2 = 1 + \Delta$.

٥- لو استبدلنا دالة الهدف بالدالة $z = 3x_1 + x_2$ ، هل الحل الأمثل سوف يتغير؟

الفصل السابع

الثنائية

Duality

- إيجاد المسألة المرافقة
- المعنى الاقتصادي لمسألة الثنائية
- النظرية الأساسية للثنائية

لكل مسألة برمجة خطية ، يوجد هناك مسألة برمجة خطية لها علاقة وثيقة بالمسألة الأولية ، تعرف هذه المسألة باسم المسألة المرافقة أو الثنائية (dual problem). إن معرفة العلاقة بين مسألة البرمجة الخطية والمسألة المرافقة من الأمور الهامة في فهم مواضيع متقدمة في البرمجة الخطية.

في هذا الفصل سوف نتكلم عن طريقة إيجاد المسألة المرافقة لمسألة برمجة خطية ، كما نتطرق إلى المعنى الاقتصادي للمسألة المرافقة. ثم نركز اهتمامنا على توضيح العلاقة بين حل المسألة الأولية وحل المسألة المرافقة من خلال نظرية الثنائية الضعيفة ونظرية الثنائية ، وكذلك نظرية متممة المكملة.

عندما نقوم بإيجاد المسألة المرافقة لمسألة برمجة خطية ، فإن المسألة المعطاة تسمى المسألة الأولية (primal problem). وإذا كانت المسألة الأولية مسألة قيمة عظمى "max" فإن المسألة المرافقة سوف تكون مسألة قيمة صغرى "min"، والعكس صحيح.

وأخيرًا، فإننا في مسألة القيمة العظمى سوف نضع اصطلاحًا المتغيرات $z, x_1, x_2, ..., x_n$ وفي مسألة القيمة الصغرى سوف تكون لدينا المتغيرات $w, y_1, y_2, ..., y_n$.

(٧,١) إيجاد المسألة المرافقة

Finding the Dual Problem

نبدأ تحت هذا العنوان باعتبار ***مسألة قيمة عظمى*** "max" ***طبيعية*** (normal max problem)، وهي المسألة التي تكون فيها جميع المتغيرات غير سالبة وجميع القيود على الشكل $\leq$. نستطيع كتابة مسألة القيمة العظمى الطبيعية بالصورة:

$$\begin{array}{ll} \max & z = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \\ \text{s.t.} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \leq b_1 \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ & \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \qquad \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \leq b_m \\ & \qquad x_1, x_2, ..., x_n \geq 0 \end{array} \tag{1}$$

المسألة المرافقة لهذه المسألة تعرف كالتالي:

$$\begin{array}{ll} \min & w = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \\ \text{s.t.} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \geq c_1 \\ & a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \geq c_2 \\ & \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \quad \vdots \\ & a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_m \geq c_n \\ & \qquad y_1, y_2, ..., y_m \geq 0 \end{array} \tag{2}$$

مسألة القيمة الصغرى السابقة التي تكون فيها جميع المتغيرات غير سالبة وجميع القيود على الشكل $\geq$ هي مسألة قيمة صغرى "min" طبيعية (normal min problem).

وإذا كانت مسألة القيمة الصغرى (2) هي المسألة الأولية، فإن المسألة المرافقة في هذه الحالة هي المسألة (1). يتضح مما سبق أن المسألة المرافقة لمسألة قيمة عظمى "max" طبيعية هي مسألة قيمة صغرى "min" طبيعية والعكس أيضًا صحيح.

(٧,١,١) إيجاد المسألة المرافقة لمسألة طبيعية

Finding the Dual Problem of a Normal LP

من الممكن الحصول على المسألة المرافقة لمسألة برمجة خطية طبيعية باستخدام العلاقتين (1) و (2)، كما يمكن أيضًا استخدام طريقة الجداول لإيجاد المسألة المرافقة. طريقة الجداول تسهل علينا إيجاد المسألة المرافقة لمسألة طبيعية، كما أنها تفيدنا في إيجاد المسألة المرافقة لمسألة غير طبيعية أيضًا، كما سوف نبين تحت العنوان التالي. إذا كانت المسألة الأولية مسألة قيمة عظمى طبيعية، فإننا نقوم في البداية برسم جدول، ونضع فيه تفاصيل المسألة الأولية بشكل أفقي، ثم نحصل من هذا الجدول على المسألة المرافقة بالنظر إلى الجدول بشكل عمودي، كما سوف نبين في المثال التالي:

مثال (٧,١)

أوجد المسألة المرافقة للمسألة التالية:

$$\begin{aligned}
\max\ z &= 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 + 4x_2 + 4x_3 \le 12 \\
& 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 30 \\
& 3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 18 \\
& x_1, x_2, x_3 \ge 0
\end{aligned}$$

الحل

في البداية نقوم بتلخيص المسألة السابقة على شكل جدول كما هو موضح في الجدول (٧,١). في هذا الجدول قمنا بوضع متغيرات القرار في المسألة الأولية في الأعلى، ثم

قمنا بكتابة القيود بشكل أفقي، وأخيرًا في الصف الأخير وضعنا معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف.

جدول (٧,١).

max z			
$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$(x_3 \geq 0)$	
x_1	x_2	x_3	
1	4	4	≤ 12
3	2	5	≤ 30
3	3	1	≤ 18
10	20	15	

بعد ذلك نضع في الطرف الأيسر متغيرات القرار في المسألة المرافقة، ولأن المسألة الأولية هي مسألة قيمة عظمى طبيعية، إذًا تكون جميع متغيرات القرار في المسألة المرافقة غير سالبة؛ لذلك نضع هذا الشرط في يسار الجدول، كما أن القيود في المسألة المرافقة سوف تكون $\geq$، لذلك نقوم بوضع علامة $\geq$ عند معاملات متغيرات القرار في دالة الهدف وذلك في الصف الأخير من الجدول، كما يوضح ذلك الجدول (٧,٢).

جدول (٧,٢).

min w		max z			
		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$(x_3 \geq 0)$	
		x_1	x_2	x_3	
$(y_1 \geq 0)$	y_1	1	4	4	≤ 12
$(y_2 \geq 0)$	y_2	3	2	5	≤ 30
$(y_3 \geq 0)$	y_3	3	3	1	≤ 18
		≥ 10	≥ 20	≥ 15	

لإيجاد المسألة المرافقة، ننظر للجدول من الأعلى للأسفل. فتكون معاملات دالة الهدف في المسألة الأولية عبارة عن الثوابت في الطرف الأيمن. أما القيود فتكون الأعمدة الثلاثة. وبهذا تصبح المسألة المرافقة:

$$\begin{aligned}
\min w &= 12y_1 + 30y_2 + 18y_3 \\
\text{s.t.} \quad & y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 10 \\
& 4y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 20 \\
& 4y_1 + 5y_2 + y_3 \geq 15 \\
& y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}$$

من الواضح أن القيد الأول من المسألة المرافقة يعطي الشروط على المتغير x_1 في المسألة الأولية، والقيد الثاني يعطي الشروط على المتغير x_2 وهكذا. □

نأخذ الآن مثالاً آخر نوضح فيه طريقة إيجاد المسألة المرافقة لمسألة قيمة صغرى "min" طبيعية. إذا كانت المسألة الأولية مسألة قيمة صغرى طبيعية، فإننا نقوم برسم جدول، ونضع فيه تفاصيل المسألة الأولية بشكل عمودي، ثم نحصل من هذا الجدول على المسألة المرافقة بالنظر إلى الجدول بشكل أفقي. أي أن مسألة القيمة العظمى توضع في الجدول بشكل أفقي، أما مسألة القيمة الصغرى فتوضع بشكل رأسي. ونوضح ذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٧,٢)

أوجد المسألة المرافقة للمسألة التالية:

$$\begin{aligned} \min w &= 3y_1 + 4y_2 + 6y_3 \\ \text{s.t.} \quad & 2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 10 \\ & 5y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 12 \\ & 7y_1 + 3y_2 + y_3 \geq 15 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{aligned}$$

الحل

نقوم بتمثيل مسألة البرمجة الخطية في جدول كما هو موضح في الجدول (٧،٣)، بحيث نضع متغيرات القرار في المسألة الأولية في اليمين، ثم نكتب القيود بشكل رأسي، ونضع معاملات المتغيرات الأساسية في العمود الأيمن.

بعد ذلك نقوم بوضع متغيرات القرار للمسألة المرافقة في الأعلى مع ملاحظة أن جميع متغيرات القرار للمسألة المرافقة غير سالبة كما أن جميع القيود على الشكل $\leq$ ؛ وذلك لأن المسألة الأولية مسألة طبيعية.

جدول (٧،٣).

min w		max z			
		$(x_1 \geq 0)$	$(x_2 \geq 0)$	$(x_3 \geq 0)$	
		x_1	x_2	x_3	
$(y_1 \geq 0)$	y_1	2	5	7	≤ 3
$(y_2 \geq 0)$	y_2	3	2	3	≤ 4
$(y_3 \geq 0)$	y_3	5	4	1	≤ 6
		≥ 10	≥ 12	≥ 15	

الآن نوجد المسألة المرافقة، وذلك بالنظر للجدول بشكل أفقي، ومن ثم تكون المسألة المرافقة:

$$\begin{aligned} \max\ \ z &= 10x_1 + 12x_2 + 15x_3 \\ \text{s.t.}\qquad 2x_1 + 5x_2 + 7x_3 &\le 3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 4 \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 &\le 6 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

وهذه المسألة مسألة قيمة عظمى طبيعية. □

(٧,١,٢) إيجاد المسألة المرافقة لمسألة غير طبيعية

Finding the Dual of a Nonnormal LP

في كثير من الحالات تكون مسائل البرمجة الخطية غير طبيعية (nonnormal LP). تحت هذا العنوان نبين كيف يمكن إيجاد المسألة المرافقة لمسألة برمجة خطية غير طبيعية وذلك من خلال المثال التالي:

مثال (٧,٣)

أوجد المسألة المرافقة للمسألة التالية:

$$\begin{aligned} \max\ \ z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t.}\qquad 2x_1 + x_2 &\le 3 \\ x_1 - x_2 &= 3 \\ 3x_1 + 5x_2 &\ge 4 \\ x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

هذه المسألة ليست منتظمة لأن هناك قيودًا بعلامة = و ≥ كما أن x_1 غير محدد الإشارة. هناك طريقتان لإيجاد المسألة المرافقة لهذه المسألة، سوف نقوم بشرح

الطريقتين، ولكننا بشكل عام سوف نستخدم الطريقة الثانية لسهولتها وقلة الحسابات فيها.

الطريقة الأولى

تحويل المسألة إلى مسألة منتظمة، ولعمل ذلك نقوم بالتالي:

١- تحويل $\geq$ إلى $\leq$ بضرب القيد في -1. فمثلاً لتحويل القيد الثالث $(3x_1 + 5x_2 \geq 4)$ إلى $\leq$ نضرب الطرفين في -1 فيصبح القيد الجديد $-3x_1 - 5x_2 \leq -4$.

٢- تحويل $=$ إلى متراجحتين $\geq$ و $\leq$ ثم نحول $\geq$ إلى $\leq$ بالضرب في -1. فمثلاً القيد الثاني $(x_1 - x_2 = 3)$ يمكن تحويله إلى القيدين التاليين $x_1 - x_2 \leq 3$ و $x_1 - x_2 \geq 3$ ثم نضرب القيد $x_1 - x_2 \geq 3$ في -1 فنحصل على القيد $-x_1 + x_2 \leq -3$.

٣- نستبدل أي متغير غير محدد الإشارة x_i بـ $x_i = x_i' - x_i''$ حيث $x_i', x_i'' \geq 0$. فمثلاً x_1 في القيود يمكن استبداله بـ $x_1 = x_1' - x_1''$ حيث $x_1', x_1'' \geq 0$.

بعد القيام بهذه الخطوات الثلاث، نجد أن المسألة السابقة يمكن كتابتها بالصورة:

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 3x_1' - 3x_1'' + 5x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1' - 2x_1'' + x_2 \leq 3 \\
& x_1' - x_1'' - x_2 \leq 3 \\
& -x_1' + x_1'' + x_2 \leq -3 \\
& -3x_1' + 3x_1'' - 5x_2 \leq -4 \\
& x_1', x_1'', x_2 \geq 0
\end{aligned}
$$

وبذلك نكون قد حولنا المسألة إلى الصيغة الطبيعية، وبإمكاننا إيجاد المسألة المرافقة بسهولة عن طريق استخدام الجدول كما شرحنا سابقًا. أما لو كانت المسألة مسألة قيمة صغرى "min" فإننا نتبع نفس الخطوات السابقة ولكن القيود تحول إلى $\geq$.

الطريقة الثانية

هذه الطريقة تمكننا من الحصول على المسألة المرافقة دون أن نقوم بتحويل المسألة الأولية إلى الصيغة الطبيعية. إذا كانت المسألة الأولية عبارة عن مسألة قيمة عظمى "max" غير طبيعية فإننا نستطيع إيجاد المسألة المرافقة عن طريق الجدول مع مراعاة مايلي:

١- إذا كان القيد رقم i على الصورة $\leq$ في المسألة الأولية، فإن المتغير المقابل y_i لابد أن يحقق $y_i \geq 0$. فمثلاً في الجدول (٧،٤)، نلاحظ أن القيد الأول يحتوي علامة $\leq$، إذًا y_1 لابد أن تكون غير سالبة.

٢- إذا كان القيد رقم i على الصورة $\geq$ في المسألة الأولية، فإن المتغير المقابل y_i لابد أن يحقق $y_i \leq 0$. فمثلاً في الجدول (٧،٤)، نلاحظ أن القيد الثالث يحتوي علامة $\geq$، إذًا y_3 لابد أن تكون غير موجبة.

٣- إذا كان القيد رقم i على الصورة $=$ في المسألة الأولية، فإن المتغير المقابل y_i لا بد أن يكون غير محدد الإشارة. فمثلاً في الجدول (٧،٤)، نلاحظ أن القيد الثاني يحتوي علامة $=$، إذًا y_2 لابد أن تكون غير محددة الإشارة.

٤- كل متغير غير محدد الإشارة في المسألة الأولية، يقابله القيد =. فمثلاً في الجدول (٧،٤)، نجد أن x_1 غير محدد الإشارة، إذًا القيد المقابل للمتغير x_1 سوف يحتوي على علامة =.

جدول (٧،٤).

min w		max z (x_1 urs)	max z ($x_2 \geq 0$)	
		x_1	x_2	
($y_1 \geq 0$)	y_1	2	1	≤ 3
(y_2 urs)	y_2	1	-1	$= 3$
($y_3 \leq 0$)	y_3	3	5	≥ 4
		$= 3$	≥ 5	

إذًا المسألة المرافقة لهذه المسألة سوف تكون:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 3y_1 + 3y_2 + 4y_3 \\ \text{s.t.}\quad & 2y_1 + y_2 + 3y_3 = 3 \\ & y_1 - y_2 + 5y_3 \geq 5 \\ & y_1 \geq 0, y_2 \text{ urs}, y_3 \leq 0 \end{aligned}$$

وهذه الطريقة أسهل بكثير من الطريقة السابقة. □

وبنفس الطريقة نتعامل مع مسألة القيمة الصغرى "min" حسب الشروط التالية:

١- مقابل كل قيد $\geq$ في المسألة الأولية، لابد للمتغير المقابل x_i أن يحقق $x_i \geq 0$.

٢- مقابل كل قيد $\leq$ في المسألة الأولية، لابد للمتغير المقابل x_i أن يحقق $x_i \leq 0$.

٣- مقابل كل قيد = في المسألة الأولية، لابد للمتغير المقابل x_i إن يكون غير محدد الإشارة (أي x_i urs).

٤- مقابل كل متغير غير محدد الإشارة في المسألة الأولية، لابد أن يكون القيد المقابل =.

(٧,٢) المعنى الاقتصادي لمسألة الثنائية

Economic Interpretation of the Dual Problem

تحت هذا العنوان نبين المعنى الاقتصادي للمسألة المرافقة؛ وذلك بتغيير نظرتنا للمسألة، فبدلاً من النظر لعدد المواد المنتجة من كل نوع لزيادة الربح مثلاً، نبحث عن تقليل السعر المدفوع لإنتاج كمية معينة من كل نوع. المثال التالي يوضح المعنى الاقتصادي لمسألة الثنائية.

مثال (٧,٤)

تقوم شركة أثاث بصنع نوعين من المنتجات، طاولات وكراسي. يحتاج صنع الطاولة إلى ٦ ساعات عمل و٥ كجم من المواد الأولية، بينما يحتاج صنع الكراسي إلى ٣ ساعات عمل و٤ كجم من المواد الأولية. تستطيع الشركة أن تعمل ١٠٠ ساعة أسبوعيًا ولديها ٨٠ كجم من المواد الأولية، وتبحث الشركة عن تحقيق أكبر كمية ربح، علمًا أن ربح الشركة من كل طاولة ٤٠ ريالاً، ومن كل كرسي ٣٠ ريالاً.

نقوم في البداية بصياغة هذه المسألة كمسألة برمجة خطية؛ وذلك بتعريف متغيري القرار x_1, x_2 كالتالي:

$x_1 :=$ عدد الطاولات المنتجة أسبوعيًا

$x_2 :=$ عدد الكراسي المنتجة أسبوعيًا

بتحديد دالة الهدف والقيود نحصل على مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 40x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.}\quad 6x_1 + 3x_2 &\le 100 \\ 5x_1 + 4x_2 &\le 80 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

حيث القيد الأول هو القيد المفروض على ساعات العمل، بينما القيد الثاني فهو القيد المفروض على المواد الخام. نستطع حساب المسألة المرافقة لهذه المسألة بطريقة مباشرة أو باستخدام الجدول، فنحصل على المسألة المرافقة التالية :

$$\begin{aligned} \min w &= 100y_1 + 80y_2 \\ \text{s.t.}\quad 6y_1 + 5y_2 &\ge 40 \\ 3y_1 + 4y_2 &\ge 30 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

إن القيد الأول هو القيد المفروض على الطاولات والقيد الثاني هو القيد المفروض على الكراسي. كما أن y_1 مقترن بساعات العمل بينما y_2 فهو مقترن بالمواد الخام. لتوضيح ذلك سوف نقوم بتغيير طريقة تفكيرنا في المسألة الأولية كالتالي، لنفرض أن شخصًا يرغب في شراء طاولات وكراسي من هذه الشركة، ويرغب هذا الشخص في تحديد المبلغ الذي ينبغي عليه دفعه لكل وحدة من منتجات الشركة. لأجل ذلك نقوم بتعريف y_1, y_2 كما يلي :

$y_1 :=$ السعر المدفوع لساعة عمل

$y_2 :=$ السعر المدفوع لكيلوغرام من المواد الخام

السعر النهائي الذي سوف يتم دفعه هو $100y_1 + 80y_2$ ، وبما أن المطلوب تقليل التكلفة، إذًا المطلوب إيجاد $\min w = 100y_1 + 80y_2$ وهي دالة الهدف للمسألة المرافقة. بقي أن نحدد القيود للمسألة المرافقة وهي القيود التي ينبغي للمشتري أن يأخذها باعتباره. لا بد للمشتري أن يعرض على الشركة مبلغًا مناسبًا مقابل المصادر. فمثلاً، لا بد للمشتري أن يعرض مبلغ 40 ريالاً على الأقل وذلك للمصادر التي تشتمل على 6 ساعات عمل و 5 كجم من المواد الخام. وذلك لأن الشركة تستطيع أن تستخدم هذه المصادر لإنتاج طاولة يمكن بيعها بمبلغ 40 ريالاً. ولأن المشتري سوف يدفع $6y_1 + 5y_2$ ريالاً للمصادر المستخدمة في إنتاج الطاولة، إذًا لا بد أن يختار y_1 و y_2 بحيث تحقق المتراجحة التالية $6y_1 + 5y_2 \geq 40$.

ولنفس السبب، فلابد للمشتري أن يعرض على الشركة مبلغ 30 ريالاً على الأقل وذلك للمصادر اللازمة لإنتاج كرسي وهي 3 ساعات عمل و 4 كجم من المواد الخام. إذًا لا بد أن يختار y_1 و y_2 بحيث تحقق المتراجحة التالية $3y_1 + 4y_2 \geq 30$. وهذا هو القيد الثاني (قيد الكراسي).

وأخيرًا فلا بد أن تكون المتغيرات y_1 و y_2 غير سالبة، فنحصل على المسألة المرافقة السابقة. □

(٧,٣) النظرية الأساسية للثنائية

Fundamental Theorem of Duality

تحت هذا العنوان سوف نبين كيف يمكن الحصول على حل المسألة المرافقة من خلال معرفتنا لحل المسألة الأولية، وذلك عن طريق *نظرية الثنائية* (Dual Theorem)، والتي تعد من أهم النظريات في البرمجة الخطية. ويمكن تلخيص نظرية الثنائية بأن قيمة

دالة الهدف الأمثلية للمسألة الأولية وللمسألة المرافقة متساوية متى ما كان للمسألة الأولية حل أمثلي.

خلال دراستنا تحت هذا العنوان سوف نأخذ الحالة التي تكون فيها المسألة الأولية مسألة قيمة عظمى طبيعية، والتي تحتوي على m من القيود و n من المتغيرات.

$$\begin{aligned}
\max\ & z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \\
\text{s.t.}\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2 \\
& \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \\
& x_1, x_2, \dots, x_n \ge 0
\end{aligned}$$

في هذه الحالة سوف تكون المسألة المرافقة عبارة عن مسألة قيمة صغرى طبيعية، وسوف تحتوي على m من المتغيرات و n من القيود كالتالي:

$$\begin{aligned}
\min\ & w = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \\
\text{s.t.}\ & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2 \\
& \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\
& a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_m \ge c_n \\
& y_1, y_2, \dots, y_m \ge 0
\end{aligned}$$

(٧,٣,١) الصيغة الثنائية الضعيفة

Weak Duality

إذا اخترنا أي حل مقبول للمسألة الأولية وأي حل مقبول للمسألة المرافقة، فإن قيمة دالة الهدف w للحل المقبول للمسألة المرافقة سوف تكون أكبر من أو تساوي قيمة دالة الهدف z للحل المقبول للمسألة الأولية.

هذه العلاقة المهمة نقوم بتوضيحها من خلال التمهيدية التالية، والتي تعطى مع البرهان.

تمهيدية(٧,١): الثنائية الضعيفة Weak Duality

ليكن $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T$ ، أي حل أساسي مقبول للمسألة الأولية، وليكن $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad \dots \quad y_m]$ ، أي حل مقبول للمسألة المرافقة. في هذه الحالة تكون قيمة z عند $\mathbf{x}$ أقل من أو تساوي قيمة w عند $\mathbf{y}$. أي أن:

$$z(\mathbf{x}) \le w(\mathbf{y})$$

البرهان

لنأخذ القيد رقم i في المسألة الأولية:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$$

وبما أن $y_i \ge 0$ ، فإننا نستطيع ضرب طرفي المتراجحة السابقة في y_i دون أن تتغير الإشارة لنحصل على:

$$\sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \le y_i b_j \qquad (i = 1, \dots, m)$$

وبالجمع لقيم $i = 1, \dots, m$ ، نحصل على:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j \le \sum_{i=1}^{n} y_i b_i \qquad (3)$$

وبالمثل نقوم بضرب القيد رقم j في المسألة المرافقة بـ $x_j \ge 0$ ، فنحصل على:

$$\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} y_i \ge c_j x_j$$

ثم بالجمع لقيم $j = 1, 2, \dots, n$ نحصل على:

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} y_i \geq \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (4)$$

ومن (3) و (4) ، نحصل على :

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \leq \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} x_j a_{ij} y_i \leq \sum_{i=1}^{n} y_i b_i$$

أي أن :

$$z(\mathbf{x}) \leq w(\mathbf{y})$$

وهو المطلوب إثباته. □

ملاحظة

إذا استطعنا إيجاد حل مقبول للمسألة الأولية أو المسألة المرافقة فإننا نستطيع استخدام تمهيدية (٧,١) للحصول على حد (bound) لقيمة دالة الهدف في المسألة الأخرى. فمثلاً إذا كانت المسألة الأولية مسألة قيمة عظمى فإننا نستطيع أن نستخدم أي حل مقبول للمسألة الأولية كحد أدنى لدالة الهدف في المسألة المرافقة كما يوضح المثال التالي.

مثال (٧,٥)

في المثال (٧,٤)، نلاحظ أن $x_1 = 2,\ x_2 = 4$ هو حل مقبول للمسألة الأولية، وقيمة دالة الهدف عند هذه النقطة $z = 40(2) + 30(4) = 200$. من تمهيدية (٧,١)، نجد أن أي حل (y_1, y_2) للمسألة المرافقة لا بد أن يحقق $100y_1 + 80y_2 \geq 200$. وبما أن المسألة المرافقة عبارة عن مسألة "min" ، إذًا w^* (القيمة الصغرى للدالة w في منطقة الحل) لا بد أن تحقق :

$$w^* \geq 200$$ □

لنعرف الآن المتجهات التالية :

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix}$$

إذًا دالة الهدف للمسألة الأولية ، والمسألة المرافقة يمكن كتابتها باستخدام المتجهات السابقة لتصبح :

$$z(\mathbf{x}) = \mathbf{cx}$$

$$w(\mathbf{y}) = \mathbf{yb}$$

وباستخدام المتجهات السابقة ، نستطيع الحصول على التمهيدية التالية باستخدام صيغة الثنائية الضعيفة.

تمهيدية (٧,٢)

لتكن $\overline{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \overline{x}_1 & \overline{x}_2 & \dots & \overline{x}_n \end{bmatrix}^T$ حلاً أساسيًا مقبولاً للمسألة الأولية ، وليكن $\overline{\mathbf{y}} = \begin{bmatrix} \overline{y}_1 & \overline{y}_2 & \dots & \overline{y}_m \end{bmatrix}$ حلاً أساسيًا مقبولاً للمسألة المرافقة.
وإذا كان :

$$z(\overline{\mathbf{x}}) = w(\overline{\mathbf{y}})$$

فإن $\overline{\mathbf{x}}$ حل أمثلي للمسألة الأولية و $\overline{\mathbf{y}}$ حل أمثلي للمسألة المرافقة.

البرهان

من صيغة الثنائية الضعيفة ، نعلم أنه لأي حل مقبول للمسألة الأولية $\mathbf{x}$ فإن $\mathbf{cx} \le \mathbf{y}^*\mathbf{b}$. وبما أن $\mathbf{x}^*$ حل مقبول للمسألة الأولية وتحقق $\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$ ، إذًا $\mathbf{x}^*$ لابد

أن يكون حلاً أمثليًا (لماذا؟). وبالمثل ، بما أن $\mathbf{x}^*$ حل مقبول للمسألة الأولية ، إذًا أي حل مقبول للمسألة المرافقة $\mathbf{y}$ لابد أن يحقق $\mathbf{cx}^* \le \mathbf{yb}$. ولكن $\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b}$ ، إذًا $\mathbf{y}^*$ لابد أن يكون حلاً أمثليًا.

المثال التالي يوضح كيف يمكن استخدام التمهيدية (٧,٢) للتحقق أن حلاً أساسيًا مقبولاً لمسألة البرمجة الخطية يمثل حلاً أمثليًا. □

مثال (٧,٦)

في المثال (٧,٤) نجد أن $\mathbf{x}^* = \begin{bmatrix} 16 & 0 \end{bmatrix}^T$ حل مقبول للمسألة الأولية وقيمة دالة الهدف عند هذه النقطة تساوي :

$$z\,(\mathbf{x}^*) = \mathbf{cx}^* = \begin{bmatrix} 40 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 16 \\ 0 \end{bmatrix} = 640$$

كما أن $\mathbf{y}^* = \begin{bmatrix} 0 & 8 \end{bmatrix}$ حل مقبول للمسألة المرافقة وقيمة دالة الهدف عند هذه النقطة تساوي :

$$w\,(\mathbf{y}^*) = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 100 \\ 80 \end{bmatrix} = 640$$

وبما أن $\mathbf{cx}^* = \mathbf{y}^*\mathbf{b} = 640$ ، إذًا $\mathbf{x}^*$ هو حل أمثلي للمسألة الأولية و $\mathbf{y}^*$ هو حل أمثلي للمسألة المرافقة. □

(٧,٣,٢) نظرية الثنائية

The Dual Theorem

قبل أن نشرع في بيان نظرية الثنائية ، نبين العلاقة بين المسألة الأولية والمسألة المرافقة إذا كانت إحداهما غير محدودة الحل وذلك من خلال التمهيدية التالية ، والتي يمكن استنتاجها مباشرة من صيغة الثنائية الضعيفة.

تمهيدية (٧,٣)

١- إذا كانت المسألة الأولية غير محدودة الحل ، فالمسألة المرافقة ليس لها حل.
٢- إذا كانت المسألة المرافقة غير محدودة الحل ، فالمسألة الأولية ليس لها حل.

ملاحظة

إذا كانت المسألة الأولية أو المسألة المرافقة ليس لها حل ، فإننا لا نستطيع أن نستنتج أن المسألة الأخرى يجب أن تكون غير محدودة الحل. فمن الممكن أن تكون كلا المسألتين ليس لهما حل. نوضح ذلك من خلال المثال التالي :

مثال (٧,٧)

لتكن لدينا المسألة التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + x_2 \\ \text{s.t.}\quad x_1 &\le -1 \\ 2x_1 - x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

نستطع حساب المسألة المرافقة لهذه المسألة باستخدام الجدول فنحصل على التالي :

$$\begin{aligned} \min w &= -y_1 + 2y_2 \\ \text{s.t.}\quad y_1 + 2y_2 &\ge -1 \\ -y_2 &\ge 1 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

كلا المسألتين السابقتين ليس لهما حل (لماذا؟). □

ورغم وجود حالات تكون فيها المسألة الأولية غير محدودة الحل أو ليس لها حل ، إلا أن اهتمامنا ينصب على المسائل التي يكون للمسألة الأولية حل أمثلي. وفيما

يلي سوف نعتبر z^* الحل الأمثلي للمسألة الأولية و w^* الحل الأمثلي للمسألة المرافقة. إذا كانت المسألة الأولية لها حل فإننا نحصل على النظرية التالية، والتي تبين العلاقة بين حل المسألة الأولية وحل المسألة المرافقة.

نظرية(٧,١): نظرية الثنائية The Dual Theorem

ليكن BV^* هو الحل الأساسي الأمثل للمسألة الأولية. في هذه الحالة يكون $(\mathbf{c}_B B^{-1})^*$ حلاً أمثليًا للمسألة المرافقة، كما أن $z^* = w^*$.

البرهان

لتكن لدينا مسألة قيمة عظمى "max" طبيعية، وتحتوي على m من القيود و n من المتغيرات، وليكن BV^* أساسًا أمثليًا للمسألة الأولية. الآن نعرف $y_1, y_2, \ldots, y_m$ كالتالي:

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{bmatrix} := \mathbf{c}_B B^{-1}$$

نسعى الآن لإثبات أن $\mathbf{c}_B B^{-1}$ حل مقبول ثم نثبت أنه حل أمثلي.

الخطوة الأولى: إثبات أن $\mathbf{c}_B B^{-1}$ حل مقبول

بما أن BV حل أمثلي للمسألة الأولية، إذًا المعاملات في الصف Row 0 في الجدول الأمثلي لابد أن تكون غير سالبة. نحسب الآن $\overline{c}_j$ (معامل x_j) في الصف Row 0 وذلك لكل $j = 1, 2, \ldots, n$

$$\bar{c}_j = \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{a}_j - c_j$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} - c_j$$

$$= y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \dots + y_m a_{mj} - c_j$$

ولكننا نعلم أن $\bar{c}_j \geq 0$ ، إذًا لكل $j = 1, 2, \dots, n$ نجد أن :

$$y_1 a_{1j} + y_2 a_{2j} + \dots + y_m a_{mj} \geq c_j$$

أي أن $\mathbf{c}_B B^{-1}$ تحقق جميع قيود المسألة المرافقة. بالإضافة لذلك، نجد أن معامل s_i في الصف Row 0 للجدول الأمثلي هو العنصر رقم i من $\mathbf{c}_B B^{-1}$ ، أي y_i ، كما أشرنا إلى ذلك في الفصل الخامس. وبما أن المتغيرات المكملة s_i غير سالبة، إذًا $y_i \geq 0$ لكل $i = 1, 2, \dots, m$ ، أي أن $\mathbf{c}_B B^{-1}$ تحقق أيضًا قيد الإشارة. إذًا $\mathbf{c}_B B^{-1}$ حل مقبول للمسألة المرافقة.

الخطوة الثانية: إثبات أن $\mathbf{c}_B B^{-1}$ حل أمثلي للمسألة المرافقة

الآن بقي إثبات أن قيمة دالة الهدف للمسألة المرافقة عند $\mathbf{c}_B B^{-1}$ تساوي قيمة دالة الهدف للمسألة الأولية للمتغيرات الأساسية BV . نعلم من الفصل الخامس أن قيمة دالة الهدف في المسألة الأولية عند المتغيرات الأساسية BV تساوي $\mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$. الآن نحسب قيمة دالة الهدف للمسألة المرافقة عند $\mathbf{c}_B B^{-1}$.

$$w\,(\mathbf{c}_B B^{-1}) = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \ldots + b_m y_m$$

$$= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{c}_B B^{-1}\mathbf{b}$$

بما أن قيمة دالة الهدف للمسألة المرافقة عند $\mathbf{c}_B B^{-1}$ تساوي قيمة دالة الهدف الأولية عند المتغيرات الأساسية BV ، إذًا نستنتج من تمهيدية (٧- ٢) أن $\mathbf{c}_B B^{-1}$ هو حل أمثلي للمسألة المرافقة كما أن $z^* = w^*$. □

النظرية السابقة تبين أنه في حالة توصلنا إلى حل أمثلي للمسألة الأولية باستخدام طريقة السمبلكس ، فإننا نستطيع مباشرة إيجاد الحل الأمثلي للمسألة المرافقة وهو $\mathbf{c}_B B^{-1}$.

مثال(٧،٨)

في مثالنا السابق (٧،٤)، كانت المسألة الأولية :

$$\begin{aligned}
\max\ \ z &= 40x_1 + 30x_2 \\
\text{s.t.}\qquad & 6x_1 + 3x_2 \le 100 \\
& 5x_1 + 4x_2 \le 80 \\
& x_1, x_2 \ge 0
\end{aligned}$$

والمتغيرات الأساسية في الحل الأمثل $BV = \{s_1, x_1\}$ ، إذا $\mathbf{c}_B = \begin{bmatrix} 0 & 40 \end{bmatrix}$ ، كما أن :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

وباستخدام طريقة جاوس جوردن لإيجاد المعكوس ، نجد أن :

$$B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -6/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$$

إذًا حل المسألة المرافقة هو :

$$\begin{bmatrix} y_1^* & y_2^* \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 40 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -6/5 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad \square$$

بما أن العنصر رقم i من $\mathbf{c}_B B^{-1}$ هو معامل المتغير s_i في الصف Row 0 ، فنستنتج ما يلي :

قاعدة ١

إذا كانت المسألة مسألة قيمة عظمى "max" طبيعية ، فإن حل المسألة المرافقة يمكن الحصول عليه كالتالي :

قيمة y_i في الحل الأمثلي للمسألة المرافقة تساوي معامل s_i في الصف Row 0 في الجدول الأمثلي.

قاعدة ٢

إذا كانت المسألة مسألة قيمة صغرى "min" طبيعية ، فإن حل المسألة المرافقة يمكن الحصول عليه كالتالي :

قيمة x_i في الحل الأمثلي للمسألة المرافقة تساوي سالباً مضروبًا في معامل e_i في الصف Row 0 في الجدول الأمثلي.

المثال التالي يبين كيفية الحصول على الحل الأمثلي للمسألة المرافقة بمعلومية الحل الأمثلي للمسألة الأولية.

مثال(٧,٩)

لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية والتي وردت في المثال (٦,٤).

$$
\begin{aligned}
\max\ z &= 10x_1 + 20x_2 + 15x_3 \\
\text{s.t.}\quad x_1 + 4x_2 + 4x_3 &\le 12 \\
3x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 30 \\
3x_1 + 3x_2 + x_3 &\le 18 \\
x_1, x_2, x_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

والتي لها الجدول الأمثلي :

$$
\begin{array}{llllllll}
z & & + 5/9x_3 & +10/3s_1 & & + 20/9s_3 & = 80 \\
& x_2 & + 11/9x_3 & + 1/3s_1 & & - 1/9s_3 & = 2 \\
& & 47/9x_3 & + 1/3s_1 & + s_2 & - 10/9s_3 & = 14 \\
x_1 & & - 8/9x_3 & - 1/3s_1 & & + 4/9s_3 & = 4
\end{array}
$$

أوجد المسألة المرافقة للمسألة الأولية ثم أوجد الحل الأمثلي للمسألة المرافقة.

الحل

المسألة المرافقة لهذه المسألة هي :

$$
\begin{aligned}
\min\ w &= 12y_1 + 30y_2 + 18y_3 \\
\text{s.t.}\quad y_1 + 3y_2 + 3y_3 &\ge 10 \\
4y_1 + 2y_2 + 3y_3 &\ge 20 \\
4y_1 + 5y_2 + y_3 &\ge 15 \\
y_1, y_2, y_3 &\ge 0
\end{aligned}
$$

ونستطيع أن نستنتج الحل الأمثل للمسألة المرافقة من الجدول الأمثلي للمسألة الأصلية، حيث إن قيمة y_i تساوي معامل s_i في الصف Row 0 في الجدول الأمثلي، كما أن قيمة $z^* = w^*$. إذًا الحل الأمثلي لهذه المسألة هو $y_1^* = 10/3, y_2^* = 0, y_3^* = 20/9,$ $w^* = 80$. □

(٧,٣,٣) نظرية متممة المكملة

The Complementary Slackness Theorem

تعتبر نظرية متممة المكملة من النظريات المهمة التي تربط بين الحلول الأمثلية للمسألة الأولية والمسألة المرافقة. سوف نفرض أن المسألة الأولية عبارة عن مسألة قيمة عظمى طبيعية تحتوي على n من المتغيرات و m من القيود، ولتكن $s_1, s_2, ..., s_m$ المتغيرات المكملة للمسألة الأولية. في هذه الحالة، تكون المسألة المرافقة مسألة قيمة صغرى طبيعية تحوي m من المتغيرات و n من القيود، ولتكن $e_1, e_2, ..., e_n$ المتغيرات الزائدة للمسألة المرافقة. في هذه الحالة يمكن صياغة نظرية متممة المكملة كما يلي:

نظرية(٧,٢): متممة المكملة Complementary Slackness

ليكن $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad ... \quad x_n]^T$ حلاً أساسيًا مقبولاً للمسألة الأولية، وليكن $\mathbf{y} = [y_1 \quad y_2 \quad ... \quad y_m]$ حلاً أساسيًا مقبولاً للمسألة المرافقة. تكون $\mathbf{x}$ حلاً أمثليًا للمسألة الأولية و $\mathbf{y}$ حلاً أمثليًا للمسألة المرافقة إذا وفقط إذا:

$$s_i y_i = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., m)$$
$$e_j x_j = 0 \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

نأخذ الآن مثالا يوضح كيفية تطبيق نظرية (٧,٢) لإيجاد حل المسألة المرافقة.

مثال (٧,١٠)

باستخدام نظرية متممة المكملة، أوجد حل المسألة المرافقة للمسألة التالية الواردة في مثال (٧,٤)، وأوجد قيمة المتغيرات الزائدة:

$$\begin{aligned} \max\ z &= 40x_1 + 30x_2 \\ \text{s.t.}\quad 6x_1 + 3x_2 &\le 100 \\ 5x_1 + 4x_2 &\le 80 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

الحل

إن الحل الأمثل لهذه المسألة هو $z^* = 640,\ x_1^* = 16,\ x_2^* = 0,\ s_1^* = 36,\ s_2^* = 0$.

كما أن المسألة المرافقة لهذه المسألة هي:

$$\begin{aligned} \min\ w &= 100y_1 + 80y_2 \\ \text{s.t.}\quad 6y_1 + 5y_2 &\ge 40 \\ 3y_1 + 4y_2 &\ge 30 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

والتي يمكن كتابتها بالصيغة القياسية كالتالي:

$$\begin{aligned} \min w &= 100y_1 + 80y_2 \\ \text{s.t.}\quad 4y_1 + 5y_2 - e_1 \quad &= 40 \\ 3y_1 + 4y_2 \quad - e_2 &= 30 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

ونريد الآن حساب قيم الحل الأمثلي للمسألة المرافقة، أي إيجاد قيمة المتغيرات $w^*, y_1^*, y_2^*, e_1^*, e_2^*$. واضح أن $w^* = z^* = 640$، والشروط على بقية المتغيرات هي:

$$s_1^* y_1^* = s_2^* y_2^* = x_1^* e_1^* = x_2^* e_2^* = 0$$

وبما أن $x_1^* \neq 0$ ، وكذلك $s_1^* \neq 0$ إذًا $y_1^* = 0$ ، وأيضًا $e_1^* = 0$. لإيجاد قيمة بقية المتغيرات نقوم بالتعويض عن قيم y_1^*, e_1^* في قيود المسألة المرافقة فنحصل على المعادلتين:

$$\begin{aligned} 5y_2^* \qquad &= 40 \\ 4y_2^* - e_2^* &= 30 \end{aligned}$$

والتي حلها $y_2^* = 8,\ e_2^* = 2$. □

تمارين الفصل السابع

(٧,١) أوجد المسألة المرافقة للمسائل التالية :

-١
$$\begin{aligned} \max\ z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s. t.}\quad -x_1 + x_2 &\le 1 \\ -2x_1 + 3x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

-٢
$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 2x_2 \\ \text{s. t.}\quad -2x_1 + x_2 &\ge 5 \\ x_1 + 4x_2 &\ge 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

-٣
$$\begin{aligned} \max\ z &= x_1 + 3x_2 - x_3 \\ \text{s. t.}\quad x_1 + 5x_2 &\le 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &\ge 2 \\ x_1 + 6x_2 - 7x_3 &= 4 \\ x_1 &\ge 0 \end{aligned}$$

-٤
$$\begin{aligned} \min w &= -y_1 + 4y_2 \\ \text{s. t.}\quad 2y_1 - 4y_2 &\ge 1 \\ y_1 + 5y_2 &\ge 2 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

-٥
$$\begin{aligned} \min w &= 5y_1 + 2y_2 - 6y_3 \\ \text{s. t.}\quad 3y_1 + 4y_2 + y_3 &\le 1 \\ y_1 - 2y_2 + 3y_3 &= 2 \\ y_1, y_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

(٧,٢) في مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\quad 2x_1 - x_2 &\le 2 \\ -x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

كانت المتغيرات الأساسية هي $BV = \{x_1, x_2\}$. أوجد المسألة المرافقة، ثم أوجد حلها مباشرة ودون عمل أي تحوير.

(٧,٣) في مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 2 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

كانت المتغيرات الأساسية هي $BV = \{x_2, s_1\}$. أوجد المسألة المرافقة، ثم أوجد حلها مباشرة ودون عمل أي تحوير.

(٧,٤) لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 4x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\quad 3x_1 + 2x_2 &\le 6 \\ 6x_1 + 3x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

قام أحد الطلاب بحل هذا السؤال باستخدام طريقة السمبلكس وتوصل إلى أن الصف Row 0 في الجدول الأمثلي يساوي $z + 2x_2 + s_2 = 20/3$ ، استخدم نظرية الثنائية لبيان أن هذا الحل غير صحيح.

(٧,٥) لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned}\max\ z &= c_1x_1 + c_2x_2\\ \text{s. t.}\quad & 3x_1 + 4x_2 \le 6\\ & 2x_1 + 3x_2 \le 4\\ & x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

والتي لها الجدول الأمثلي :

$$\begin{aligned}z \qquad\quad &+s_1 + 2s_2 = 14\\ x_1 \quad &+3s_1 - 4s_2 = 2\\ x_2 &- 2s_1 + 3s_2 = 0\end{aligned}$$

أوجد قيم c_1, c_2 بدون عمل أي تحوير.

(٧,٦) ١ - بين أن المسألة التالية :

$$\begin{aligned}\max\ z &= -2x_1 + 6x_2\\ \text{s. t.}\quad & x_1 + x_2 \ge 2\\ & -x_1 + x_2 \le 1\\ & x_1, x_2 \ge 0\end{aligned}$$

غير محدودة الحل

٢ - باستخدام الفقرة (١)، وضح ما الذي تستنتجه من حل مسألة القيمة الصغرى التالية :

$$\begin{aligned}\min w &= -2y_1 + y_2\\ \text{s.t.}\quad & y_1 + y_2 \le 2\\ & -y_1 + y_2 \ge 6\\ & y_1, y_2 \ge 0\end{aligned}$$

(٧,٧) عند حل مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= -x_1 + 5x_2 \\ \text{s. t.}\quad x_1 + 2x_2 &\le 0.5 \\ -x_1 + 3x_2 &\le 0.5 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

كان الصف Row 0 في الجدول الأمثلي يساوي $z + 0.4s_1 + 1.4s_2 = a$ ، أوجد قيمة a بدون حل المسألة.

(٧,٨) لتكن لدينا مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= -3x_1 + x_2 + 2x_3 \\ \text{s. t.}\quad x_2 + 2x_3 &\le 3 \\ -x_1 \qquad + 3x_3 &\le -1 \\ -2x_1 - 3x_2 \qquad &\le -2 \\ x_1, x_2, x_3 &\ge 0 \end{aligned}$$

١- أوجد المسألة المرافقة لهذه المسألة وبين أن لها نفس منطقة الحل للمسألة.

٢-استخدم نظرية الثنائية الضعيفة لحساب الحل الأمثل للمسألة الأولية.

(٧,٩) مسألة البرمجة الخطية التالية :

$$\begin{aligned} \max\ z &= 3x_1 + x_2 \\ \text{s. t.}\quad 2x_1 + x_2 &\le 8 \\ 4x_1 + x_2 &\le 10 \\ x_1, x_2 &\ge 0 \end{aligned}$$

لها الحل الأمثلي $x_1^* = 1,\ \ x_2^* = 6,\ \ z^* = 9$ ، أوجد باستخدام نظرية متممة المكملة الحل الأمثلي للمسألة المرافقة ، وأوجد قيمة المتغيرات الزائدة.

(٧,١٠) لتكن لدينا المسألة التالية :

$$
\begin{aligned}
\min\ w &= y_1 - 5y_2 + 6y_3 \\
\text{s. t.}\quad & 2y_1 \qquad + 4y_3 \geq 50 \\
& y_1 + 2y_2 \qquad \geq 30 \\
& \qquad\qquad y_3 \geq 10 \\
& y_1, y_2, y_3 \quad urs
\end{aligned}
$$

١- أوجد المسألة المرافقة لهذه المسألة.

٢- أثبت أن المسألة المرافقة ليس لها حل.

٣- من فقرة (٢) هل تستطيع أن تبين نوع المسألة. (لها حل وحيد، لها أكثر من حل، ليس لها حل، غير محدودة الحل، غير منتظمة).

٤- أوجد قيمًا للمتغيرات y_1, y_2, y_3 تحقق شروط المسألة الأولية.

٥- ماذا تستطيع أن تستنتج عن نوع المسألة الأولية. (لها حل وحيد، لها أكثر من حل، ليس لها حل، غير محدودة الحل، غير منتظمة).

الفصل الثامن

مسائل النقل والتوظيف

Transportation and Assignment Problems

- مسائل النقل
- مسائل التوظيف

في هذا الفصل سوف نناقش نوعين خاصين من مسائل البرمجة الخطية وهما مسائل النقل ومسائل التوظيف. كل نوع من هذه المسائل يمكن حله باستخدام طريقة السمبلكس، إلا أن هناك طرائق خاصة لحل كل نوع، وهذه الطرائق أسهل بكثير من طريقة السمبلكس المعتادة.

سوف نشرح كيف يمكن حل مسائل النقل باستخدام طريقة السمبلكس الخاصة بحل مسائل النقل. بعد ذلك نقوم بتوضيح الطريقة الهنغارية لحل مسائل التوظيف.

(٨,١) مسائل النقل
Transportation Problem

في هذا النوع من المسائل، نرغب في نقل بضائع من مراكز تموين (supply points) عددها m ، إلى مراكز طلب (demand points) عددها n . يستطيع

مركز التموين رقم i إمداد مراكز الطلب بكمية s_i من الوحدات على الأكثر. كما أن مركز الطلب رقم j لابد أن يستقبل كمية d_j من الوحدات على الأقل. وأخيرًا فإن تكلفة نقل وحدة واحدة من مركز التموين رقم i إلى مركز الطلب رقم j تساوي c_{ij} ، حيث c_{ij} عدد ثابت.

نقوم الآن بصياغة مسألة النقل بشكل عام. المطلوب في هذا النوع من المسائل نقل كمية معينة من البضائع من مراكز التموين إلى مراكز الطلب بحيث تكون تكلفة النقل أقل ما يمكن. في البداية نقوم بتعريف متغير القرار x_{ij} كالتالي :

$x_{ij} :=$ عدد الوحدات المنقولة من مركز التموين i إلى مركز الطلب j

نلاحظ أن المطلوب في مسألة النقل تقليل التكلفة ، إذًا المسألة في هذه الحالة مسألة قيمة صغرى "min". نأتي الآن لإيجاد دالة الهدف لمسألة النقل. إن تكلفة النقل من مركز التموين i إلى مركز الطلب j تساوي $c_{ij}x_{ij}$. وبناء على ذلك ، فإن تكلفة النقل الإجمالية تساوي :

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$$

نأتي الآن لبحث القيود على مراكز التموين والطلب. نجد أن القيد على مركز التموين رقم i ، أن يقوم هذا المركز بمد مراكز الطلب بكمية s_i من الوحدات على الأكثر ، أي أن :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le s_i \qquad (i = 1,2,...,m)$$

أما من حيث القيود على مركز الطلب j ، فنجد أن مركز الطلب j لابد أن يستقبل كمية d_j من الوحدات على الأقل ، أي أن :

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \qquad (j = 1, 2, ..., n)$$

إذًا الصيغة النهائية لمسألة النقل يمكن كتابتها بالصورة :

$$\begin{aligned}
\min & \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \\
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leq s_i \qquad (i = 1, 2, ..., m) \\
& \sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq d_j \qquad (j = 1, 2, ..., n) \\
& x_{ij} \geq 0 \qquad (i = 1, ..., m; \\
& \qquad\qquad\quad j = 1, ..., n)
\end{aligned}$$

إذا كان :

$$\sum_{i=1}^{m} s_i = \sum_{j=1}^{n} d_j$$

فإن الطلب يكون مساويًا للعرض ، وفي هذه الحالة تسمى المسألة ***مسألة نقل متوازنة*** (balanced transportation problem). وهذا النوع من المسائل هو الذي سوف نناقشه في هذا الكتاب ولن نتطرق للحالات التي تختلف فيها كمية العرض عن كمية الطلب.

إذا كانت مسألة النقل متوازنة ، فإن جميع القيود لابد أن تكون ملزمة. أي أنه لكل $i = 1, 2, ..., m$ و $j = 1, 2, ..., n$ ، فإن :

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i , \qquad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j$$

ومن ثَم فإن مسألة النقل المتوازنة يمكن كتابتها بالشكل التالي :

$$\min \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = d_j \quad (j = 1, 2, \ldots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n)$$

لو أردنا أن نقوم بحل هذه المسألة باستخدام طريقة السمبلكس فإننا نحتاج إلى إضافة متغير اصطناعي لكل قيد من القيود، ومن ثَم فإن الحصول على حل أساسي مبدئي مقبول سوف يكون صعبًا نوعًا ما ؛ لذلك فإننا لن نستخدم طريقة السمبلكس للحصول على حل أساسي بل سوف نستخدم طريقة أخرى يتم تفصيلها لاحقًا.

نأخذ الآن مثالاً نبين فيه كيفية صياغة مسألة النقل.

مثال (٨,١)

تمتلك شركة كهرباء ثلاث محطات لتوليد الكهرباء، وتود إيصال الكهرباء إلى أربع مدن. المحطة الأولى تستطيع إنتاج ٢٠ مليون كيلو واط في الساعة (ك.و.س) بينما تنتج المحطة الثانية ٣٠ مليون ك.و.س وأخيرًا تنتج المحطة الثالثة ٤٠ مليون ك.و.س. أما احتياجات المدن من الكهرباء فهي كالتالي : تحتاج المدينة الأولى إلى ١٥ مليون ك.و.س، وتحتاج المدينة الثانية إلى ١٨ مليون ك.و.س، وتحتاج المدينة الثالثة إلى ٢٥ مليون ك.و.س، وأخيرًا تحتاج المدينة الرابعة

إلى ٣٢ مليون ك.و.س. يكلف نقل مليون ك.و.س من المحطة الأولى إلى المدينة الأولى ١٠ ريالات، وإلى المدينة الثانية ٨ ريالات وإلى المدينة الثالثة ٧ ريالات وإلى المدينة الرابعة ٩ ريالات. الجدول التالي يبين قيمة نقل الكهرباء من المحطات الكهربائية إلى المدن:

جدول (٨,١).

	المدينة١	المدينة٢	المدينة٣	المدينة٤	**العرض** مليون ك.و.س
المحطة ١	10	8	7	9	20
المحطة ٢	5	11	12	14	30
المحطة ٣	13	15	6	8	40
الطلب مليون ك.و.س	15	18	25	32	

أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية.

الحل

بما أن المطلوب هو تحديد كمية الكهرباء المرسلة من كل محطة (مركز تموين) إلى كل مدينة (مركز طلب)؛ إذًا نعرف متغيرات القرار كالتالي:

$x_{ij} :=$ عدد ملايين ك.و.س المنقولة من المحطة i إلى المدينة j

إذًا تكلفة النقل الإجمالية سوف تكون:

$$z = 10x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14} \quad \text{(تكلفة النقل من المحطة ١)}$$

$$+5x_{21} + 11x_{22} + 12x_{23} + 14x_{24} \quad \text{(تكلفة النقل من المحطة ٢)}$$

$$+13x_{31}+15x_{32}+6x_{33}+8x_{34} \quad \text{(تكلفة النقل من المحطة ٣)}$$

بعد أن أوجدنا دالة الهدف، نقوم بتحديد القيود. يوجد نوعان من القيود، النوع الأول هو ***قيود العرض*** (supply constraints)، وفي هذا النوع من القيود نلاحظ أن هناك حدًا معينًا تستطيع المحطة إنتاجه. فمثلاً، بالنسبة للمحطة الأولى لا تستطيع إرسال كمية أكبر من 20 مليون ك.و.س إلى المدن الأربعة. أي أن :

$$x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} \le 20$$

كما أن المحطة الثانية لا تستطيع إرسال كمية أكبر من 30، والثالثة لا تستطيع إرسال كمية أكبر من 40. إذًا قيود العرض تأخذ الشكل التالي :

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14} &\le 20 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24} &\le 30 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34} &\le 40 \end{aligned}$$

النوع الثاني من القيود هو ***قيود الطلب*** (demand constraints)، حتى نضمن أن كل مدينة قد غطت احتياجاتها من الكهرباء. فمثلاً المدينة الأولى لابد أن يصلها 15 مليون ك.و.س على الأقل، أي أن :

$$x_{11}+x_{21}+x_{31} \ge 15$$

وبنفس الطريقة مع بقية المدن نحصل على القيود التالية :

$$\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31} &\ge 15 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32} &\ge 18 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33} &\ge 25 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34} &\ge 32 \end{aligned}$$

وبما أن x_{ij} لابد أن تكون غير سالبة؛ إذًا $x_{ij} \ge 0$. ومن ثم نستطيع تلخيص المسألة لتصبح :

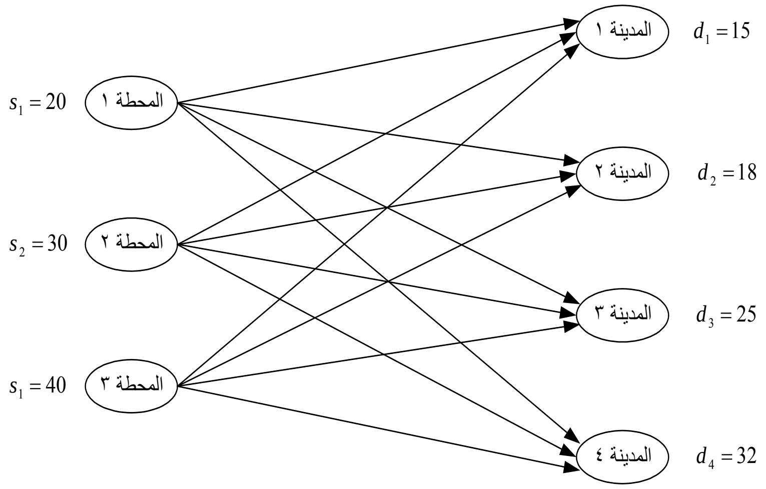
$$\begin{aligned} \min\ z = {} & 10x_{11} + 8x_{12} + 7x_{13} + 9x_{14} \\ & + 5x_{21} + 11x_{22} + 12x_{23} + 14x_{24} \\ & + 13x_{31} + 15x_{32} + 6x_{33} + 8x_{34} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t.} \quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 20 \\ & x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 30 \\ & x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 40 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 15 \\ & x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 18 \\ & x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 25 \\ & x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 32 \end{aligned}$$

$$x_{ij} \ge 0 \quad (i = 1,2,3; \; j = 1,2,3,4)$$

بإمكاننا رسم المسألة السابقة كالتالي :



شكل (٨,١)

في هذا المثال كانت كمية العرض $90 = 40 + 30 + 20$ ، وكمية الطلب $90 = 32 + 25 + 18 + 15$. ولأن كمية العرض تساوي كمية الطلب إذًا هذه المسألة عبارة عن مسألة نقل متوازنة. ومن ثم يمكن وضع إشارة مساواة في جميع القيود بدلاً من إشارة ≤ و ≥. □

إن أي مسألة نقل يمكن وضعها كالتالي: نضع في الأعلى مراكز الطلب، وعلى اليسار مراكز التموين، ويقسم الجدول إلى mn من الخلايا (cell) بحيث تكون الخلية (i, j) هي الخلية التي تعطينا جميع المعلومات التي تربط بين مركز التموين i ومركز الطلب j ، ونقوم بوضع مستطيل صغير في الجزء الشمالي الشرقي داخل الخلية (i, j) يحتوي على قيمة c_{ij}. وعلى يمين الجدول نضع كمية العرض وفي الأسفل نضع كمية الطلب. والآن نستطيع تلخيص المثال السابق في الجدول التالي:

جدول (٨,٢).

	المدينة ١	المدينة ٢	المدينة ٣	المدينة ٤	**العرض**
المحطة ١	10	8	7	9	20
االمحطة ٢	5	11	12	14	30
المحطة ٣	13	15	6	8	40
الطلب	15	18	25	32	

الجدول (٨،٢) يعطينا فكرة سريعة عن المسألة بكافة تفاصيلها؛ ولذلك سوف نعتمد طريقة الجدول في تلخيص مسألة النقل.

(٨,١,١) إيجاد حل أساسي مقبول لمسألة النقل

Finding a Basic Feasible Solution for TP

لتكن لدينا مسألة نقل تحتوي على m من مراكز التموين و n من مراكز الطلب. في هذه الحال سوف يكون لدينا $m+n$ من القيود على شكل معادلات. وبذلك فعند رغبتنا في إيجاد حل أساسي مقبول يلزمنا استخدام طريقة M-الكبيرة أو طريقة المرحلتين، وهذا العمل يتطلب جهدًا كبيرًا. ولكن لحسن الحظ ونظرًا لبناء مسألة النقل، فإنه يسهل إيجاد حل أساسي مقبول لها. التمهيدية التالية سوف تفيدنا في إيجاد حل أساسي مقبول لمسألة النقل.

تمهيدية (٨,١)

إذا وُجِدَت هناك قيم معينة لمتغيرات القرار x_{ij} بحيث تحقق هذه القيم جميع قيود مسألة النقل المتوازنة ماعدا قيدًا واحدًا، فإن هذه القيم لابد أن تحقق هذا القيد.

لنفرض على سبيل المثال أننا استطعنا في مسألة شركة الكهرباء إيجاد قيم تحقق جميع القيود ما عدا قيد الطلب الأخير. في هذه الحالة، تكون كمية الكهرباء التي تمدها المحطات الثلاث هي $s_1+s_2+s_3=90$ مليون ك.و.س. أما كمية الكهرباء التي وصلت للمدن الثلاث الأولى فهي $d_1+d_2+d_3=60$ مليون ك.و.س. إذًا المدينة الرابعة لابد أن يأتيها $90-60=30$ مليون ك.و.س. أي أن الشرط الأخير محقق. من هنا نستنتج أننا عندما نقوم بحل مسألة نقل، فإننا نستطيع

أن نقوم بحذف أحد القيود، ثم نقوم بحل المسألة بعدد $m+n-1$ من القيود. سوف نقوم بحذف القيد الأول دائمًا. بعد ذلك نقوم باختيار $m+n-1$ من المتغيرات من بين $m\,n$ من المتغيرات لتكون متغيرات أساسية، ولكن لا بد لهذه المتغيرات أن تحقق شروطًا معينة، نوضحها من خلال النظرية (٨,١). ولكن قبل أن نقوم بذكر نص النظرية، نحتاج إلى تعريف الدائرة المغلقة (loop).

تعريف (٨,١): الدائرة المغلقة Loop

الدائرة المغلقة (loop) هي متتالية مرتبة من أربعة خلايا على الأقل بحيث تحقق الشروط التالية:

١- أي خليتين متعاقبتين (consecutive cells) لابد أن يكونا في نفس الصف أو نفس العمود.

٢- لا توجد ثلاث خلايا متعاقبة تقع في نفس الصف أو العمود.

٣- الخلية الأخيرة في المتتالية لابد أن تكون في نفس الصف أو العمود الذي تقع فيه الخلية الأولى.

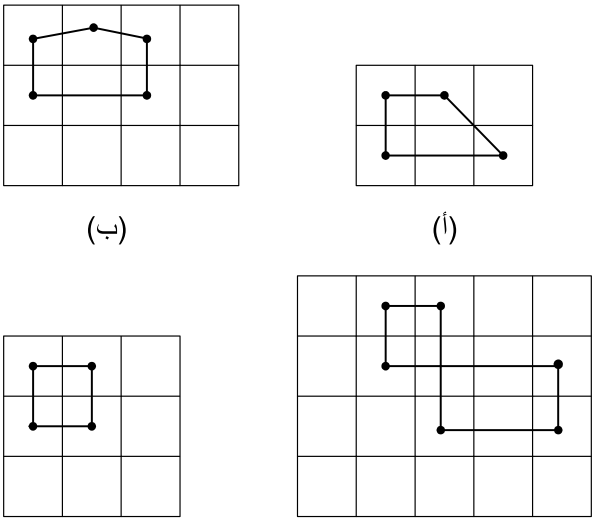
إن مفهوم الدائرة المغلقة من المفاهيم المهمة لحل مسائل النقل كما سوف يتضح تحت العنوان (٨,١,٢) القادم. في المثال التالي، نقوم بتوضيح فكرة الدائرة المغلقة من خلال بيان ما إذا كانت متتالية من الخلايا تمثل دائرة مغلقة أم لا.

مثال (٨,٢)

في الشكل (٨,٢)، نلاحظ أن الشكل (أ) لا يمثل دائرة مغلقة؛ وذلك لأن الخليتين $(1,2)$ و $(2,3)$ عبارة عن خليتين متعاقبتين ولكنهما ليسا في نفس الصف ولا في نفس العمود.

الشكل (ب) أيضًا لا يمثل دائرة مغلقة ؛ لأن هناك ثلاث خلايا متعاقبة تقع في نفس الصف.

وأخيرًا فإن الشكلين (جـ) و (د) يمثلان دائرتين مغلقتين. □



(ب) (أ)

(د) (جـ)

شكل (٨,٢)

النظرية التالية تبين لنا أهمية مفهوم الدائرة المغلقة ، ونذكرها بدون برهان.

نظرية (٨,١)

في مسألة النقل المتوازنة - التي تحتوي m من مراكز الطلب و n من مراكز العرض- تكون مجموعة $m+n-1$ من المتغيرات أساسية إذا وفقط إذا كانت تقع في خلايا غير محتوية على دائرة مغلقة.

نبين الآن كيف يمكن استخدام النظرية (٨،١) لإيجاد حل أساسي مقبول لمسألة النقل. توجد هناك عدة طرائق لإيجاد حل أساسي مقبول، نقوم بشرح أحد هذه الطرائق تحت العنوان التالي وهي طريقة الركن الشمالي الغربي.

(٨,١,٢) طريقة الركن الشمالي الغربي
Northwest Corner Method

هذه الطريقة هي أحد الطرائق المتبعة لإيجاد حل أساسي مقبول لمسألة النقل. نبدأ هذه الطريقة باختيار الركن الأعلى الأيسر (الركن الشمالي الغربي) من جدول النقل ونضع x_{11} مساوية لأكبر قيمة ممكنة (أي أقل القيمتين s_1 و d_1). إذا كانت $x_{11} = s_1$ ، فإننا نشطب الصف الأول من جدول النقل أي أنه لا يوجد أي متغير أساسي سوف يأتي من الصف الأول. أيضًا نقوم بتغيير d_1 إلى $d_1 - s_1$. إذا كانت $x_{11} = d_1$ ، فإننا نشطب العمود الأول من جدول النقل ونقوم بتغيير s_1 إلى $s_1 - d_1$. إذا كانت $x_{11} = s_1 = d_1$ ، فإننا نشطب الصف الأول أو العمود الأول (ولكن ليس كليهما). إذا حذفنا الصف الأول فإننا نضع $d_1 = 0$ ، وإذا حذفنا العمود الأول فإننا نضع $s_1 = 0$.

بعد ذلك نبحث عن الخلية الموجودة في الركن الشمالي الغربي في الجدول بعد حذف الصف الأول أو العمود الأول، ثم نكرر نفس الخطوات السابقة. في النهاية سوف نصل إلى مرحلة يكون لدينا خلية واحدة وسوف تكون قيمة العرض في هذه الخلية مساوية لقيمة الطلب فنضع قيمة العرض في هذه الخلية؛ وبذلك تنتهي طريقة الركن الشمالي الغربي، ونكون قد حصلنا على حل أساسي مبدئي. وهذه الطريقة كما هو واضح أسهل بكثير من طريقة السمبلكس.

فيما يلي نعطي مثالاً يبين كيفية استخدام طريقة الركن الشمالي لإيجاد حل أساسي مقبول لمسألة نقل.

مثال (٨,٣)

الجدول (٨,٣) يبين العرض والطلب في مسألة نقل. استخدم طريقة الركن الشمالي الغربي لإيجاد حل أساسي مقبول.

في الجدول (٨,٣)، أهملنا كتابة التكلفة c_{ij} ؛ وذلك لأن طريقة الركن الشمالي الغربي تعتمد فقط على العرض والطلب لاختيار الحل الأساسي المقبول.

جدول (٨,٣).

					العرض
					$s_1 = 4$
					$s_2 = 3$
					$s_3 = 5$
الطلب	$d_1 = 3$	$d_2 = 4$	$d_3 = 2$	$d_4 = 3$	

الحل

حتى نقوم بحل هذه المسألة، نبدأ بالخلية الموجودة في الركن الشمالي الغربي من الجدول (٨,٣)، وهي الخلية رقم $(1,1)$ ، ونضع فيها:

$$x_{11} = \min\{s_1, d_1\} = \min\{4, 3\} = 3$$

ثم نشطب العمود الأول ونستبدل s_1 بـ $s_1 - d_1 = 4 - 3 = 1$ ، فنحصل على الجدول (٨,٤).

جدول (٨,٤).

3				1
				3
				5
×	4	2	3	

الآن تكون الخلية $(1,2)$ هي الخلية الموجودة في الركن الشمالي الغربي، وأكبر قيمة يمكن وضعها في هذه الخلية هي $x_{12} = \min\{s_1, d_2\} = \min\{1,4\} = 1$. إذًا سوف نضع في هذه الخلية العدد 1 ، ونقوم بشطب الصف الأول واستبدال 4 في العمود الثاني بـ $4 - 1 = 3$ ، فنحصل على الجدول (٨,٥).

جدول (٨,٥).

3	1			×
				3
				5
×	3	2	3	

الآن تكون الخلية $(2,2)$ موجودة في الركن الشمالي الغربي، وأكبر قيمة نستطيع وضعها في هذه الخلية هي $x_{22} = \min\{s_2, d_2\} = \min\{3,3\} = 3$ ، إذًا سوف

نضع في هذه الخلية العدد 3. بما أن $s_2 = d_2$ ، إذًا نستطيع شطب الصف الثاني ووضع العمود الثاني مساويًا للصفر، أو شطب العمود الثاني وجعل الصف الثاني مساويًا للصفر. سوف نستخدم الطريقة الثانية، فنحصل على الجدول (٨,٦).

جدول (٨,٦).

3	1			×
	3			0
				5
×	×	2	3	

الآن تكون الخلية $(2,3)$ موجودة في الركن الشمالي الغربي، وأكبر قيمة نستطيع وضعها في هذه الخلية هي $x_{23} = \min\{s_2, d_3\} = \min\{0,2\} = 0$. إذًا نضع في هذه الخلية العدد 0 ونقوم بشطب الصف الثاني ونستبدل 2 في العمود الثالث بالعدد $2 - 0 = 2$ ، فنحصل على الجدول (٨,٧).

جدول (٨,٧).

3	1			×
	3	0		×
				5
×	×	2	3	

الآن نضع $x_{33} = \min\{2,5\} = 2$ ، ونستبدل 5 بـ $5 - 2 = 3$ ، فنحصل على الجدول (٨،٨).

جدول (٨،٨).

3	1			×
	3	0		×
		2		3
×	×	×	3	

وأخيرًا نضع $x_{34} = s_3 = d_4 = 3$ ، فنحصل على الجدول (٨،٩).

جدول (٨،٩).

3	1			×
	3	0		×
		2	3	×
×	×	×	×	

ولأنه لا يوجد أي خلية فارغة، فنكون قد حصلنا على الحل الأساسي المقبول $x_{11} = 3, x_{12} = 1, x_{22} = 3, x_{23} = 0, x_{33} = 2, x_{34} = 3$. وبما أن هناك متغيرًا أساسيًا مساويًا للصفر فهذا الحل الأساسي غير منتظم. □

إن طريقة الركن الشمالي الغربي تضمن أن جميع المتغيرات الأساسية لن تأخذ قيمًا سالبة، كما أن جميع قيود العرض والطلب سوف تكون محققة. ولهذا

فإن الحل الناتج يكون حلاً مقبولاً. بالإضافة لذلك، فإن طريقة الركن الشمالي الغربي سوف تعطي قيمًا لـ $m+n-1$ من المتغيرات، وهذه المتغيرات لا يمكن أن تحتوي على دائرة مغلقة، وبناء على نظرية (٨,١) فهذه المتغيرات لا بد أن تكون حلاً أساسيًا مقبولاً.

(٨,١,٣) طريقة السمبلكس لحل مسألة النقل

The Transportation Simplex Method

تحت هذا العنوان نبين كيف يمكن حل مسألة النقل باستخدام طريقة السمبلكس الخاصة بمسائل النقل، والتي يمكن تلخيصها بالخطوات التالية:

١- إيجاد حل أساسي مقبول لمسألة النقل وذلك باستخدام طريقة الركن الشمالي الغربي والتي سبق شرحها تحت العنوان (٨,١,٢) السابق.

٢- تحديد المتغير الداخل، وذلك عن طريق حساب معاملات المتغيرات غير الأساسية ثم اختيار المتغير ذي المعامل الأكبر ليكون متغيرًا داخلاً.

٣- عمل تحوير للانتقال إلى حل أساسي مقبول آخر.

٤- تكرار الخطوتين (٢) و (٣) حتى نصل إلى حل تكون فيه معاملات المتغيرات غير الأساسية غير موجبة، وبذلك نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل.

لتوضيح طريقة حل مسائل النقل باستخدام طريقة السمبلكس سوف نقوم بحل مسألة النقل الواردة في المثال (٨,١).

مثال (٨,٤)

لتكن لدينا مسألة النقل التي سبق الإشارة إليها في المثال (٨,١)، والتي يمكن تلخيصها في الجدول (٨,١٠).

جدول (٨,١٠).

	المدينة ١	المدينة ٢	المدينة ٣	المدينة ٤	**العرض**
المحطة ١	10	8	7	9	20
االمحطة ٢	5	11	12	14	30
المحطة ٣	13	15	6	8	40
الطلب	15	18	25	32	

حتى نقوم بحل هذه المسألة، نقوم باستخدام طريقة السمبلكس وذلك بتطبيق الخطوات الأربع التي سبق الإشارة إليها.

الخطوة الأولى: إيجاد حل أساسي مقبول

نهدف في الخطوة الأولى لإيجاد حل أساسي مقبول لمسألة النقل ؛ ولذلك نستخدم طريقة الركن الشمالي الغربي التي سبق الإشارة إليها، فنحصل على الجدول (٨,١١).

جدول (٨,١١).

15	5			20
	13	17		30
		8	32	40
15	18	25	32	

من الجدول (٨.١١)، نحصل على الحل الأساسي المبدئي الذي تكون فيه قيمة المتغيرات الأساسية :

$$bfs_1: \; x_{11} = 15, x_{12} = 5, x_{22} = 13, x_{23} = 17, x_{33} = 8, x_{34} = 32$$

الخطوة الثانية: تحديد المتغير الداخل

لحساب المتغير الداخل، يلزمنا حساب معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Row 0 ، ولأن المسألة عبارة عن مسألة قيمة صغرى "min" ، إذًا نختار المتغير الداخل ذا المعامل الأكبر بإشارة موجبة. وإذا كانت جميع المعاملات غير موجبة نكون قد توصلنا للحل الأمثل للمسألة.

نقوم الآن بحساب معامل x_{ij} في الصف Row 0 باستخدام العلاقة :

$$\overline{c}_{ij} = \mathbf{c}_B B^{-1} a_{ij} - c_{ij}$$

حيث c_{ij} هو معامل x_{ij} في دالة الهدف الأصلية.

a_{ij} هو عمود x_{ij} في المسألة الأصلية.

إذًا الحل الأساسي المقبول يكون أمثليًا إذا كانت جميع قيم المعاملات $\bar{c}_{ij}$ غير موجبة. وإذا وجد عدد $\bar{c}_{ij} > 0$، فإننا نختار المتغير الداخل ليكون المتغير ذا أكبر عدد موجب $\bar{c}_{ij}$. ولحساب قيمة $\bar{c}_{ij}$ يلزمنا فقط إيجاد قيمة $\mathbf{c}_B B^{-1}$. ولأن عدد المتغيرات الأساسية عادة ما يكون كبيرًا فإنه من الصعب إيجاد قيمة B^{-1} ؛ ولذلك نستخدم طريقة أخرى لحساب $\mathbf{c}_B B^{-1}$.

نعلم أنه في مسألة النقل إذا تحققت جميع الشروط ما عدا شرطًا واحدًا، فإن هذا الشرط لا بد أن يتحقق. لذلك، نستطيع إلغاء أحد القيود دون أن يؤثر ذلك على المسألة الأصلية. وبإمكاننا حذف أي قيد وليكن القيد الأول. إذًا $c_B B^{-1}$ سوف تحتوي على $m+n-1$ من العناصر، أي:

$$\mathbf{c}_B B^{-1} = [u_2\ u_3\ \dots u_m\ v_1\ v_2\ \dots v_n]$$

حيث $u_2, u_3, \dots, u_m$ هي عناصر $c_B B^{-1}$ المتفقة مع قيود العرض ($m-1$ من القيود) بينما $v_1, v_2, \dots, v_n$ هي عناصر $\mathbf{c}_B B^{-1}$ المتفقة مع قيود الطلب (n من القيود).

ولتحديد $\mathbf{c}_B B^{-1}$ نستخدم القاعدة التالية.

قاعدة ١

في أي جدول مسألة برمجة خطية، فإن معامل كل متغير أساسي x_{ij} في الصف Row 0 لابد أن يكون مساويًا للصفر. أي أن:

$\bar{c}_{ij} = 0$.

إذًا لأي متغير من المتغيرات الأساسية ($m+n-1$ من المتغيرات) نجد أن:

$$\mathbf{c}_B B^{-1} a_{ij} - c_{ij} = 0$$

نقــوم الآن بحــساب قيمــة المــتغيرات $v_n,...,v_2,v_1,u_m,...,u_3,u_2$ ، باســتخدام $m+n-1$ معادلة على الشكل $\mathbf{c}_B B^{-1}a_{ij} - c_{ij} = 0$ وذلك لكل متغير أساسي.

وللتسهيل نقوم بإعادة كتابة الجدول (٨،١١) مع إضافة سعر التكلفة c_{ij} فنحصل على الجدول (٨،١٢).

جدول (٨,١٢).

15 (10)	5 (8)	(7)	(9)	20
(5)	13 (11)	17 (12)	(14)	30
(13)	(15)	8 (6)	32 (8)	40
15	18	25	32	

الآن لدينا الحل الأساسي المقبول:

$$bfs_1 : x_{11} = 15, x_{12} = 5, x_{22} = 13, x_{23} = 17, x_{33} = 8, x_{34} = 32$$

أي أن المتغيرات الأساسية هي :

$$BV = \{x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33}, x_{34}\}$$

نقوم الآن بحساب $\overline{c_{ij}}$ للمتغيرات الأساسية ونساويها بالصفر :

$$\bar{c}_{11} = [u_2\ u_3\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4]\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - 10 = v_1 - 10 = 0$$

$$\bar{c}_{12} = [u_2\ u_3\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4]\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} - 8 = v_2 - 8 = 0$$

$$\bar{c}_{22} = [u_2\ u_3\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\0\\0\end{bmatrix} - 11 = u_2 + v_2 - 11 = 0$$

$$\bar{c}_{23} = [u_2\ u_3\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4]\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} - 12 = u_2 + v_3 - 12 = 0$$

$$\bar{c}_{33} = [u_2\ u_3\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\1\\0\end{bmatrix} - 6 = u_3 + v_3 - 6 = 0$$

$$\bar{c}_{34} = [u_2\ u_3\ v_1\ v_2\ v_3\ v_4]\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix} - 8 = u_3 + v_4 - 8 = 0$$

نلاحظ أنه لأي متغير أساسي x_{ij} (ماعدا عند $i = 1$) فإن:

$$\mathbf{c}_B B^{-1} a_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} = 0$$

أي أن $u_i + v_j = c_{ij}$. الآن بتعريف $u_1 = 0$ ، نحصل على العلاقة:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

وهذه العلاقة صحيحة لكل متغير أساسي. نستطيع الآن إيجاد قيمة $\mathbf{c}_B B^{-1}$ عن طريق حل المعادلات التالية:

$$\begin{aligned}
&u_1 = 0, && u_1 + v_1 = 10\\
&u_1 + v_2 = 8, && u_2 + v_2 = 11\\
&u_2 + v_3 = 12, && u_3 + v_3 = 6\\
&u_3 + v_4 = 8 &&
\end{aligned}$$

فنحصل على القيم التالية :

$$v_1 = 10, v_2 = 8, u_2 = 3, v_3 = 9, u_3 = -3, v_4 = 11$$

الآن نقوم بتحديد المتغير الداخل وذلك بحساب قيمة معاملات المتغيرات غير الأساسية في الصف Row 0 . باستخدام العلاقة :

$$\overline{c_{ij}} = \mathbf{c}_B B^{-1} a_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

نحصل على المعاملات التالية للمتغيرات غير الأساسية :

$$\begin{aligned}
\overline{c_{13}} &= 0 + 9 - 7 = 2 \\
\overline{c_{14}} &= 0 + 11 - 9 = 2 \\
\overline{c_{21}} &= 3 + 10 - 5 = 8^{*} \\
\overline{c_{24}} &= 3 + 11 - 14 = 0 \\
\overline{c_{31}} &= -3 + 10 - 13 = -6 \\
\overline{c_{32}} &= -3 + 8 - 15 = -10
\end{aligned}$$

وبما أن المعامل $\overline{c_{21}}$ هي أكبر عدد بإشارة موجبة إذًا x_{21} سوف يكون هو المتغير الداخل.

إن باستطاعتنا تسهيل الإجراءات السابقة باستخدام الجداول، حيث نقوم برسم جدول مسألة النقل ونضع علامة × مكان المتغيرات الأساسية. ثم نضع في الصف العلوي v_i وفي العمود الأيسر u_i.

ولإيجاد قيم u_i, v_j ، نبدأ بوضع $u_1 = 0$ ، ثم بعد ذلك نوجد قيم بقية المتغيرات بحيث يكون المجموع $u_i + v_j$ مساويا لـ c_{ij} في المربعات التي تحتوي إشارة ×.

جدول (٨,١٣).

	v_1	v_2	v_3	v_4
u_1	10 ×	8 ×	7	9
u_2	5	11 ×	12 ×	14
u_3	13	15	6 ×	8 ×

الآن $u_1 = 0$ ، ولأن الخليــة $(1,1)$ تحتــوي علــى مــتغير أساســي ، إذًا نستطيع إيجاد قيمة v_1 بحيث $u_1 + v_1 = 10$ ، إذًا $v_1 = 10$.

بعد ذلك نوجد قيمة v_2 (وذلك لأن الخلية $(1,2)$ تحتوي على متغير أساسي) بحيث $u_1 + v_2 = 8$ ، إذًا $v_2 = 8$.

ثـم نقـوم بعـد ذلـك بإيجاد قيمـة u_2 بحيث $u_2 + v_2 = 11$ ، إذًا $u_2 = 3$.
وبنفس الطريقة نجد أن $v_3 = 9$ ، لأن $u_2 + v_3 = 12$ ، وكذلك $u_3 = -3$ ، لأن $u_3 + v_3 = 6$ ، وأخيرًا فإن $v_4 = 11$ ، لأن $u_3 + v_4 = 8$.

في الجـدول الـسابق نقـوم بوضـع قـيم u_i, v_j في الجـدول لنحـصل علـى الجـدول (٨,١٤).

جدول (٨,١٤).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 8$	$v_3 = 9$	$v_4 = 11$
$u_1 = 0$	10 ×	8 ×	7	9
$u_2 = 3$	5	11 ×	12 ×	14
$u_3 = -3$	13	15	6 ×	8 ×

الآن نحسب قيمة $\overline{c}_{ij}$ لكل متغير غير أساسي من العلاقة :

$$\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

ثم نضع قيمة $\overline{c}_{ij}$ في الخلايا التي ليس فيها علامة ×. فمثلاً في الخلية $(1,3)$ نضع القيمة :

$$\overline{c}_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 9 - 7 = 2$$

وفي الخلية $(1,4)$ نضع القيمة :

$$\overline{c}_{14} = u_1 + v_4 - c_{14} = 0 + 11 - 9 = 2$$

وبالمثل نجد أن $\overline{c}_{21} = 8,\ \overline{c}_{24} = 0,\ \overline{c}_{31} = -6,\ \overline{c}_{32} = -10$.

وبوضع هذه القيم في الجدول السابق، نحصل على الجدول (٨,١٥).

جدول (٨,١٥).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 8$	$v_3 = 9$	$v_4 = 11$
$u_1 = 0$	10 ×	8 ×	7 2	9 2
$u_2 = 3$	5 8 *	11 ×	12 ×	14 0
$u_3 = -3$	13 -6	15 -10	6 ×	8 ×

وبعد حساب قيم المعاملات $\overline{c}_{ij}$ نضع علامة (*) على أكبر عدد $\overline{c}_{ij}$ بإشارة موجبة وبذلك يكون x_{ij} هو المتغير الداخل. في الجدول (٨,١٥) كان العدد 8 في الخلية $(2,1)$ هو أكبر عدد بإشارة موجبة وعليه فإن المتغير الداخل هو x_{21}.

الخطوة الثالثة: عمل تحوير (pivot) للانتقال إلى حل أساسي مقبول آخر

١- في البداية نقوم بإيجاد مسار مغلق (loop) بحيث يبدأ من خلية المتغير الداخل ويتكون من خلايا أخرى تحتوي على متغيرات أساسية (من الممكن إثبات أن هناك مساراً مغلقاً وحيداً).

في مثالنا السابق كان x_{21} هو المتغير الداخل. نقوم الآن بإيجاد مسار مغلق يمر بالخلية $(2,1)$، وتكون جميع الخلايا المكونة لهذا المسار (عدا الخلية $(2,1)$) تحتوي على متغيرات أساسية.

نختار المسار المغلق التالي $(1,1)-(1,2)-(2,2)-(2,1)$. بعد ذلك نقوم بترقيم الخلايا الموجودة في المسار المغلق حسب بعدها عن خلية

المتغير الداخل. فمثلاً الخلية $(2,1)$ تأخذ الرقم 0 ، والخلية $(2,2)$ تأخذ الرقم 1 ... وهكذا.

الخلايا التي ترقيمها عدد زوجي تسمى ***خلايا زوجية*** (even cells) والخلايا التي ترقيمها عدد فردي تسمى ***خلايا فردية*** (odd cells). أي أنه في المسار السابق نجد أن الخلايا $(2,1)$ و $(1,2)$ خلايا زوجية ، أما الخلايا $(2,2)$ و $(1,1)$ فهي خلايا فردية. ويمكن كتابة ذلك بالصورة التالية :

$$\begin{array}{ccccccc} E & & O & & E & & O \\ (2,1) & - & (2,2) & - & (1,2) & - & (1,1) \end{array}$$

٢- بعد ذلك نضع إشارة (+) في الخلايا الزوجية (أي أننا سوف نضيف مقدارًا معينًا θ لأي خلية زوجية)، ونضع إشارة (-) في الخلايا الفردية (أي أننا سوف نطرح مقدارًا معينًا θ لأي خلية فردية). نقوم الآن بكتابة الجدول (٨.١٦) والذي يحتوي على قيمة المتغيرات الأساسية وعلامة (*) مكان المتغير الداخل. ثم نقوم برسم المسار المغلق ونحدد إشارة كل خلية.

٣- نحسب قيمة التغير θ وهي عبارة عن أقل قيمة للمتغيرات الأساسية الموجودة في الخلايا الفردية في المسار المغلق (أي الخلايا ذات الإشارة السالبة في المسار). في المسار السابق نجد أن $\theta = \min\{13,15\} = 13$.

الآن نقوم بطرح $\theta = 13$ من الخلايا الفردية في المسار (أي الخلايا ذات الإشارة السالبة)، ونضيف $\theta = 13$ إلى الخلايا الزوجية في المسار (أي الخلايا ذات الإشارة الموجبة). فنحصل على الجدول (٨.١٧).

جدول (٨,١٦).

[10] 15 -	[8] 5 +	[7]	[9]	20
[5] * +	[11] 13 -	[12] 17	[14]	30
[13]	[15]	[6] 8	[8] 32	40
15	18	25	32	

جدول (٨,١٧).

[10] 2	[8] 18	[7]	[9]	20
[5] 13	[11]	[12] 17	[14]	30
[13]	[15]	[6] 8	[8] 32	40
15	18	25	32	

في الجـدول (٨،١٧)، لم نقـم بوضـع 0 في الخليـة (2,2) وذلـك لأن المتغير x_{22} أصبح متغيرًا خارجًا. إذًا نستطيع أن نستنتج أن ***الخلية الفردية ذات أصغر عدد هي الخلية التي تحتوي على المتغير الخارج.*** الآن أصبح x_{22} متغيرًا خارجًا وبـذلك نكـون قـد حـصلنا علـى الحـل الأساسـي المقبول:

$$bfs_2 : x_{11} = 2, x_{12} = 18, x_{21} = 13, x_{23} = 17, x_{33} = 8, x_{34} = 32$$

الخطوة الرابعة: تكرار الخطوتين الثانية والثالثة حتى نصل للحل الأمثل

بعد أن حصلنا على الحل الأساسي المقبـول bfs_2، نختبر هـذا الحـل مـن حيـث كونـه أمثليًـا وذلـك بتنفيـذ الخطـوة الثانيـة. نقـوم الآن بحـساب معـاملات المتغيرات الأساسية:

$$\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

ومن ثم مساواتها بالصفر كما فعلنا سابقًا وذلك لتحديد قيم u_i, v_j.

في الجدول (٨،١٨) قمنا برسم مسألة النقل ووضعنا علامة × مكان كـل متغير أساسي. ثم أوجدنا قيم u_i, v_j بحيث تحقق العلاقة:

$$u_i + v_j = c_{ij}$$

وذلـك لكـل مـتغير أساسـي x_{ij}. في البدايـة نـضع $u_1 = 0$، فنحـصل علـى $v_2 = 8,\ v_3 = 17$. ثم نوجد بقية المتغيرات كما هو موضح في الجدول (٨،١٨).

جدول (٨,١٨).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 8$	$v_3 = 17$	$v_4 = 19$
$u_1 = 0$	10 ×	8 ×	7	9
$u_2 = -5$	5 ×	11	12 ×	14
$u_3 = -11$	13	15	6 ×	8 ×

الآن نحسب قيمة $\overline{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ لكل متغير غير أساسي ونضعها في الخلايا التي لا تحتوي على متغيرات أساسية.

جدول (٨,١٩).

	$v_1 = 10$	$v_2 = 8$	$v_3 = 17$	$v_4 = 19$
$u_1 = 0$	10 ×	8 ×	7 10^*	9 10^*
$u_2 = -5$	5 ×	11 -8	12 ×	14 0
$u_3 = -11$	13 -14	15 -18	6 ×	8 ×

بما أن $\overline{c}_{13} = \overline{c}_{14} = 10$ ، هي أكبر عدد بإشارة موجبة ، فإننا نستطيع اختيار x_{13} أو x_{14} ليكون متغيرًا داخلاً. سوف نختار x_{13} ليكون المتغير الداخل. الآن لنبحث عن مسار مغلق في الجدول بحيث يبدأ هذا المسار بالخلية $(1,3)$ ، ويحتوي على خلايا تحوي متغيرات أساسية. نختار المسار المغلق ليكون $(1,3)-(1,1)-(2,1)-(2,3)$ ، ثم نضع إشارة (+) في الخلايا الزوجية $(1,3),(2,1)$ ، وإشارة (-) في الخلايا الفردية $(1,1),(2,3)$ ، كما هو موضح في الجدول (٨,٢٠).

جدول (٨,٢٠).

[10] 2 -	[8] 18	[7] +	[9]	20
[5] 13 +	[11]	[12] 17 -	[14]	30
[13]	[15]	[6] 8	[8] 32	40
15	18	25	32	

نحسب قيمة التغير θ والتي تساوي :

$$\theta = \min\{2,17\} = 2$$

الآن نقوم بطرح $\theta = 2$ من الخلايا ذات الإشارة السالبة ونضيف $\theta = 2$ للخلايا ذات الإشارة الموجبة. فنحصل على الجدول (٨,٢١).

جدول (٨,٢١).

[10]	[8] 18	[7] 2	[9]	20
[5] 15	[11]	[12] 15	[14]	30
[13]	[15]	[6] 8	[8] 32	40
15	18	25	32	

وبذلك يكون x_{11} متغيرًا خارجًا ويكون لدينا الحل الأساسي المقبول:

$.bfs_3 : x_{12} = 18, x_{13} = 2, x_{21} = 15, x_{23} = 15, x_{33} = 8, x_{34} = 32$

جدول (٨,٢٢).

	$v_1 = 0$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	[10]	[8] ×	[7] ×	[9]
$u_2 = 5$	[5] ×	[11]	[12] ×	[14]
$u_3 = -1$	[13]	[15]	[6] ×	[8] ×

لتحديد قيم u_i, v_j ، قمنا بوضع علامة × مكان كل متغير أساسي في الجدول (٨,٢٢)، ثم بعد ذلك استخدمنا العلاقة $u_i + v_j = c_{ij}$ لكل متغير أساسي في الجدول.

الآن نحسب قيمة معاملات المتغيرات غير الأساسية باستخدام العلاقة :

$$\bar{c}_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

ثم بعد ذلك نضع قيمة $\bar{c}_{ij}$ في الخلية (i, j) والتي لا تحتوي على العلامة × كما هو موضح في الجدول (٨,٢٣).

جدول (٨,٢٣).

	$v_1 = 0$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	10 -10	8 ×	7 ×	9 0
$u_2 = 5$	5 ×	11 2 *	12 ×	14 0
$u_3 = -1$	13 -14	15 -8	6 ×	8 ×

بما أن $\bar{c}_{22}$ هي أكبر عدد بإشارة موجبة فإننا نختار المتغير x_{22} ليكون متغيرًا داخلاً.

لتحديد المتغير الخارج، نختار المسار المغلق الذي يبدأ بالخلية $(2,2)$ والتي تحتوي المتغير الداخل، ويتكون من خلايا تحوي متغيرات أساسية. نختار المسار المغلق التالي :

$$(2,2)-(2,3)-(1,3)-(1,2)$$

ثم نضع إشارة (+) في الخلايا الزوجية $(1,3),(2,2)$ ، وإشارة (-) في الخلايا الفردية $(1,2),(2,3)$ ، كما هو موضح في الجدول (٨,٢٤).

جدول (٨,٢٤).

[10]	[8] 18 -	[7] 2 +	[9]	20
[5] 15	[11] * +	[12] 15 -	[14]	30
[13]	[15]	[6] 8	[8] 32	40
15	18	25	32	

بعد أن حددنا المسار المغلق، نحسب قيمة التغير θ والتي تساوي :

$$\theta = \min\{15,18\} = 15$$

الآن نقوم بطرح $\theta = 15$ من الخلايا ذات الإشارة السالبة، ونضيف $\theta = 15$ للخلايا ذات الإشارة الموجبة. فنحصل على الجدول (٨,٢٥).

جدول (٨,٢٥).

[10]	[8] 3	[7] 17	[9]	20
[5] 15	[11] 15	[12]	[14]	30
[13]	[15]	[6] 8	[8] 32	40
15	18	25	32	

وبذلك يكون x_{23} متغيرًا خارجًا ويكون لدينا الحل الأساسي المقبول:

$$bfs_4 : x_{12} = 3, x_{13} = 17, x_{21} = 15, x_{22} = 15, x_{33} = 8, x_{34} = 32$$

جدول (٨,٢٦).

	$v_1 = 2$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	[10]	[8] ×	[7] ×	[9]
$u_2 = 3$	[5] ×	[11] ×	[12]	[14]
$u_3 = -1$	[13]	[15]	[6] ×	[8] ×

لتحديد قيم u_i, v_j ، قمنا بوضع علامة × مكان كل متغير أساسي في الجدول (٨,٢٦)، ثم استخدمنا العلاقة $u_i + v_j = c_{ij}$ ؛ وذلك لكل متغير أساسي في الجدول.

الآن نحسب قيمة معاملات المتغيرات غير الأساسية باستخدام العلاقة :

$$\overline{c_{ij}} = u_i + v_j - c_{ij}$$

ثم بعد ذلك نضع قيمة $\overline{c_{ij}}$ في الخلية (i, j) كما هو موضح في الجدول (٨,٢٧).

جدول (٨,٢٧).

	$v_1 = 2$	$v_2 = 8$	$v_3 = 7$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	[10] -8	[8] ×	[7] ×	[9] 0
$u_2 = 3$	[5] ×	[11] ×	[12] -2	[14] -2
$u_3 = -1$	[13] -12	[15] -8	[6] ×	[8] ×

بما أن $\overline{c_{ij}} \leq 0$ لجميع المتغيرات غير الأساسية، إذًا الحل الأساسي المقبول bfs_4 هو حل أمثلي وقيمة z تساوي :

$$z = 8(3) + 7(17) + 5(15) + 11(15) + 6(8) + 8(32) = 687$$

نلاحظ في الحل السابق أن $\overline{c_{14}} = 0$ ، وبناء على ذلك فإن المسألة لها أكثر من حل. ولكي نحصل على حل آخر لهذه المسألة، نختار x_{14} ليكون متغيرًا داخلاً. بعد ذلك نوجد مسارًا مغلقًا يتكون من الخلية $(1,4)$ وخلايا أخرى تحوي متغيرات أساسية، فيكون المسار هو :

$$(1,4) - (3,4) - (3,3) - (1,3)$$

جدول (٨,٢٨).

[10]	[8] 3	[7] 17 −	[9] * +	20
[5] 15	[11] 15	[12]	[14]	30
[13]	[15]	[6] 8 +	[8] 32 −	40
15	18	25	32	

بعد أن قمنا بتحديد المسار المغلق، نقوم الآن بحساب قيمة التغير θ ، والتي تساوي:

$$\theta = \min\{17, 32\} = 17$$

الآن نقوم بطرح $\theta = 17$ من الخلايا ذات الإشارة السالبة، ونضيف $\theta = 17$ للخلايا ذات الإشارة الموجبة. فنحصل على الجدول (٨,٢٩)

جدول (٨,٢٩).

[10]	[8] 3	[7]	[9] 17	20
[5] 15	[11] 15	[12]	[14]	30
[13]	[15]	[6] 25	[8] 15	40
15	18	25	32	

من الجدول (٨,٢٩) ، يتبين أن الحل التالي هو حل آخر لمسألة النقل :

$$bfs_5 : x_{12} = 3, x_{14} = 17, x_{21} = 15, x_{22} = 15, x_{33} = 25, x_{34} = 15$$

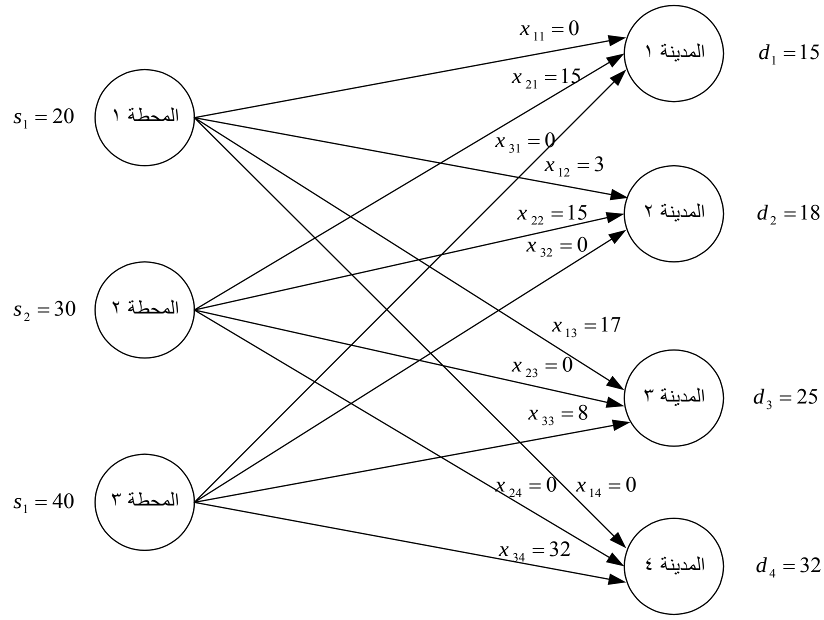
الآن نوجد قيمة دالة الهدف عند الحل bfs_5 ، والتي من الواضح أنها سوف تساوي قيمة دالة الهدف عند الحل السابق bfs_4 وهي 687 .

$$z = 8(3) + 9(17) + 5(15) + 11(15) + 6(25) + 8(15) = 687$$

يمكن رسم الحل الأول bfs_4 كما هو مبين في الشكل (٨,٣). □

ملاحظة

في المثال السابق كانت جميع الدوائر المغلقة مكونة من 4 خلايا ، إلا أن الدائرة المغلقة قد تكون مكونة من 6 خلايا أو أكثر.



شكل (٨,٣).

(٨,٢) مسائل التوظيف
Assignment Problems

تحت العنوان (٨,١,٣) السابق بيَّنَّا أن طريقة السمبلكس لحل مسائل النقل تعتبر طريقة فعالة ، ولكن يوجد هناك نوع خاص من مسائل النقل يصعب حله باستخدام طريقة السمبلكس ، وهو مسائل التوظيف.

تحت هذا العنوان نعرف مسائل التوظيف ، ثم نوضح طريقة حل هذا النوع من المسائل وذلك من خلال المثال التالي :

مثال (٨,٥)

يمتلك أحد المصانع ٤ آلات ويرغب في إنجاز ٤ أعمال. ويود صاحب هذا المصنع أن يخصص آلة واحدة لكل عمل.

الجدول (٨,٣٠) يوضح عدد الدقائق الذي تستغرقه كل آلة لإنهاء الأعمال الأربعة.

جدول (٨,٣٠).

	العمل ١	العمل ٢	العمل ٣	العمل ٤
الآلة ١	3	11	6	9
الآلة ٢	7	6	12	4
الآلة ٣	14	2	6	3
الآلة ٤	7	2	8	4

والمطلوب تقليل الوقت اللازم لإنهاء الأعمال الأربعة.

الحل

المطلوب في هذا السؤال هو تحديد مكينة لكل عمل. نقوم الآن بتعريف متغيرات القرار لتكون x_{ij} حيث $i, j = 1,2,3,4$ ، والمعرفة كالتالي:

إذا كانت المكينة i تقوم بالعمل j ، $x_{ij} := 1$

إذا كانت المكينة i لن تقوم بالعمل j ، $x_{ij} := 0$

ويمكننا بعد ذلك صياغة المسألة بالشكل التالي:

$$
\begin{aligned}
\min\ z = {} & 3x_{11} + 11x_{12} + 6x_{13} + 9x_{14} \\
& + 7x_{21} + 6x_{22} + 12x_{23} + 4x_{24} \\
& + 14x_{31} + 2x_{32} + 6x_{33} + 3x_{34} \\
& + 7x_{41} + 2x_{42} + 8x_{43} + 4x_{44}
\end{aligned}
$$

$$
\text{s. t.} \quad
\begin{aligned}
x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} &= 1 \\
x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} &= 1 \\
x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} &= 1 \\
x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} &= 1
\end{aligned}
$$

(قيود الآلات)

$$
\begin{aligned}
x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} &= 1 \\
x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} &= 1 \\
x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} &= 1 \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} &= 1
\end{aligned}
$$

(قيود الأعمال)

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j = 1:4)$$

القيود الأربعة الأولى تؤكد أن كل مكينة سوف يعين لها عمل ، والقيود الأربعة الأخيرة تؤكد أن كل عمل سوف تتم تأديته.

هذه المسألة في الواقع هي مسألة نقل متوازنة بحيث أن أي مركز عرض يستطيع إمداد وحدة واحدة وأي مركز طلب فهو يحتاج إلى وحدة واحدة. وبشكل عام فإن مسألة التوظيف هي مسألة نقل بحيث يكون العرض والطلب فيها مساويا 1.

لحل هذا النوع من المسائل نستخدم الطريقة الهنغارية (The Hungarian Method) وهي ما سوف نتحدث عنه تحت العنوان التالي.

(٨,٢,١) الطريقة الهنغارية

The Hungarian Method

الطريقة الهنغارية مصممة لإيجاد القيمة الصغرى "min" لمسألة التوظيف. سوف نقوم بتوضيح خطوات الطريقة الهنغارية لحل مسائل التوظيف من خلال المثال التالي :

مثال (٨,٦)

في هذا المثال سوف نقوم بإيجاد الحل الأمثلي للمثال (٨,٥). في البداية نقوم بوضع جدول التكلفة للمسألة ، كما هو موضح في الجدول (٨,٣١)، بحيث تمثل الأعمدة الأعمال مرتبة من اليسار إلى اليمين ، وتمثل الصفوف الآلات مرتبة من الأعلى إلى الأسفل.

جدول (٨,٣١).

3	11	6	9
7	6	12	4
14	2	6	3
7	2	8	4

الخطوة الأولى

في جدول التكلفة الذي يتكون من المعاملات c_{ij} ، نقوم بإيجاد العنصر الأصغر في كل صف ونضعه في الجهة اليمنى من الصف، فنحصل على الجدول (٨،٣٢).

جدول (٨,٣٢).

3	11	6	9	3
7	6	12	4	4
14	2	6	3	2
7	2	8	4	2

بعد ذلك نطرح العنصر الأصغر من الصف الذي يقابله. فعلى سبيل المثال في الصف الأول نقوم بطرح العدد 3 من كل عنصر من الصف الأول، وفي الصف الثاني نقوم بطرح العدد 4 من كل عنصر من عناصر الصف الثاني، ... وهكذا مع كل من الصفين الثالث والرابع، فنحصل على الجدول (٨،٣٣).

جدول (٨,٣٣).

0	8	3	6
3	2	8	0
12	0	4	1
5	0	6	2

الخطوة الثانية

في الجـدول الجديـد نقـوم بإيجـاد العنـصر الأصـغر في كـل عمـود ونـضعه أسـفل العمود، كما هو موضح في الجدول (٨,٣٤).

جدول (٨,٣٤).

0	8	3	6
3	2	8	0
12	0	4	1
5	0	6	2
0	0	3	0

بعد ذلك نطرح العنصر الأصغر من العمود الذي يقابله. في هذه الحالة سوف نطرح العدد 3 من كل عنصر من العمود الثالث، فنحصل على الجدول (٨,٣٥)

جدول (٨,٣٥).

0	8	0	6
3	2	5	0
12	0	1	1
5	0	3	2

الخطوة الثالثة

نرسم *أقل عدد* من المستقيمات الأفقية والعمودية التي يمكن أن تغطي جميع الأصفار الموجودة في الجدول (٨,٣٥). إذا كان عدد المستقيمات يساوي 4 (m في

الحالة العامة)، فإننا نستطيع أن نوجد الحل الأمثل وذلك باختيار 4 خلايا تحتوي على أصفار بحيث لا توجد خليتان من هذه الخلايا في نفس الصف أو نفس العمود. أما لو كان عدد المستقيمات أقل من 4 ، فإننا نواصل الحل وذلك بالانتقال إلى الخطوة الرابعة.

في هذا المثال، نجد أن أقل عدد من المستقيمات يمكن أن يغطي جميع الأصفار الموجودة في الجدول (٨,٣٧) هو ثلاثة مستقيمات. قمنا بتوضيح ذلك في الجدول (٨,٣٦).

جدول (٨,٣٦).

0	8	0	6
3	2	5	0
12	0	1	1
5	0	3	2

الخطوة الرابعة

نبحث في الجدول الجديد عن أصغر عدد من الأعداد غير المغطاة بالمستقيمات المرسومة، ثم نطرح هذا العدد من جميع الأعداد غير المغطاة ونضيف هذا العدد إلى الإعداد المغطاة بخطين.

نلاحظ أن أقل عدد غير مغطى في الجدول (٨,٣٦) هو العدد 1 ، نقوم بإضافة 1 إلى العددين 6 و 8 ، ونطرح العدد 1 من الأعداد الستة غير المغطاة، فنحصل على الجدول (٨,٣٧).

جدول (٨,٣٧).

0	9	0	7
2	2	4	0
11	0	0	1
4	0	2	2

بعد ذلك نقوم بتطبيق الخطوة الثالثة مرة أخرى. نلاحظ في الجدول (٨,٣٧) أن أقل عدد من المستقيمات اللازمة لتغطية جميع الأصفار هو 4 مستقيمات كما هو موضح في الجدول (٨,٣٨).

جدول (٨,٣٨).

0	9	0	7
2	2	4	0
11	0	0	1
4	0	2	2

لإيجاد الحل الأمثل نختار 4 خلايا تحتوي على أصفار بحيث لا توجد خليتان من هذه الخلايا في نفس الصف أو نفس العمود.

نأخذ الخلايا $(4,2)-(3,3)-(2,4)-(1,1)$ ، ومن ثم يكون الحل الأمثل هو $x_{11}=x_{24}=x_{33}=x_{42}=1$ ، وفي هذه الحالة قيمة z تساوي $3+4+6+2=15$.

نلاحظ في هذه المسألة أنه لا يوجد إلا خيار واحد فقط لاختيار المتغيرات الأساسية. إذا المسألة لها حل وحيد. ولكن لو كان هناك أكثر من خيار للمتغيرات الأساسية فالمسألة لها أكثر من حل. □

تمارين الفصل الثامن

(٨,١) تقوم شركة بتوصيل بضائع إلى ثلاثة زبائن، كل زبون يحتاج إلى 30 وحدة من البضائع. تمتلك الشركة مخزنين، المخزن الأول يحتوي على 40 وحدة من البضائع والمخزن الثاني يحتوي على 50 وحدة الجدول (٨,٣٩) يبن تكلفة نقل وحدة واحدة من البضائع من المخزن إلى الزبون.

جدول (٨,٣٩).

	الزبون ١	الزبون ٢	الزبون ٣
المخزن ١	7	8	4
المخزن ٢	5	6	4

أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية، ثم أوجد الحل الأمثلي للمسألة.

(٨,٢) يتكون قسم المحاسبة في أحد الشركات من 4 موظفين، ويرغب القسم في إنجاز 4 مهام. يحتوي الجدول (٨,٤٠) على عدد الساعات الذي يحتاجه كل موظف لإنهاء كل مهمة من المهام الأربع.

أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة بحيث يكون الوقت المستغرق أقل ما يمكن، ثم أوجد حل المسألة.

جدول (٨,٤٠).

	المهمة ١	المهمة ٢	المهمة ٣	المهمة ٤
الموظف ١	12	5	8	12
الموظف ٢	7	8	14	4
الموظف ٣	10	6	9	6
الموظف ٤	3	5	13	4

(٨,٣) أوجد حل المسألة التالية :

$$
\begin{aligned}
\min\ z = {} & 3x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} \\
& 5x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23} \\
& 2x_{31} + 10x_{32} + 6x_{33} \\
& 11x_{41} + x_{42} + 4x_{43}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{s. t.}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 10 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 12 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} \le 11 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} \le 14
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} \ge 20 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} \ge 10 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} \ge 17
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_{ij} \ge 0, \quad (i &= 1:4; \\
j &= 1:3)
\end{aligned}
$$

(٨,٤) أوجد حلاً أساسيًا مقبولاً للمسألة التالية :

$$\begin{aligned}
\min\ z &= 3x_{11} + 6x_{12} + 4x_{13} \\
&\quad 5x_{21} + 7x_{22} + 9x_{23} \\
\text{s. t.}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} \le 10 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} \le 12 \\
& x_{11} + x_{21} \ge 6 \\
& x_{12} + x_{22} \ge 8 \\
& x_{13} + x_{23} \ge 8 \\
& x_{ij} \ge 0, \quad (i = 1:2,\ j = 1:3)
\end{aligned}$$

(٨,٥) ١- أوجد حل المسألة التالية :

$$\begin{aligned}
\min\ z &= 2x_{11} + 4x_{12} + 6x_{13} + 5x_{14} \\
&\quad 3x_{21} + 11x_{22} + 12x_{23} + x_{24} \\
&\quad 6x_{31} + 5x_{32} + 3x_{33} + 7x_{34} \\
\text{s. t.}\quad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} \le 8 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} \le 10 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} \le 20 \\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} \ge 5 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} \ge 7 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} \ge 9 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} \ge 17 \\
& x_{ij} \ge 0, \quad (i = 1:3,\ j = 1:4)
\end{aligned}$$

٢- هل لهذه المسألة أكثر من حل؟

(٨،٦) أوجد حل المسألة التالية ، وبين ما إذا كان لها حلول أخرى :

$$\begin{aligned}
\min z = {} & 4x_{11}+6x_{12}+7x_{13}+2x_{14}+3x_{15} \\
& 2x_{21}+5x_{22}+x_{23}+4x_{24}+4x_{25} \\
& 5x_{31}+9x_{32}+2x_{33}+5x_{34}+7x_{35} \\
& 4x_{41}+6x_{42}+2x_{43}+9x_{44}+x_{45} \\
& x_{51}+3x_{52}+6x_{53}+7x_{54}+2x_{55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{s. t.} \quad & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1 \\
& x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1 \\
& x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=1 \\
& x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=1 \\
& x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}=1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1 \\
& x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1 \\
& x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1 \\
& x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1 \\
& x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=1
\end{aligned}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad (i, j = 1:5)$$

(٨،٧) أوجد حل المسألة التالية ، وبين ما إذا كان لها حلول أخرى :

$$
\begin{aligned}
\min\ z = {} & 3x_{11} + 5x_{12} + 8x_{13} + 6x_{14} \\
& 6x_{21} + 4x_{22} + 9x_{23} + x_{24} \\
& 4x_{31} + 6x_{32} + 11x_{33} + 2x_{34} \\
& x_{41} + 4x_{42} + 5x_{43} + 6x_{44}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{s. t.} \qquad & x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 1 \\
& x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 1 \\
& x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 1 \\
& x_{41} + x_{42} + x_{43} + x_{44} = 1 \\
\\
& x_{11} + x_{21} + x_{31} + x_{41} = 1 \\
& x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{42} = 1 \\
& x_{13} + x_{23} + x_{33} + x_{43} = 1 \\
& x_{14} + x_{24} + x_{34} + x_{44} = 1 \\
\\
& x_{ij} \geq 0, \quad (i, j = 1:4)
\end{aligned}
$$

الفصل التاسع

مسائل الشبكات

Networks Problems

- **تعاريف أساسية**
- **مسألة المسار الأقصر**
- **مسألة التدفق الأعظم**

إن هناك العديد من مسائل البرمجة الخطية يمكن تمثيلها عن طريق الشبكات. في هذا الفصل سوف نناقش نوعين خاصين من مسائل الشبكات، وهما مسألة المسار الأقصر ومسألة التدفق الأعظم.

في البداية نقوم بإعطاء بعض التعاريف المهمة في الشبكات ثم نشرح مسألة المسار الأقصر ونبين كيفية حلها، وكذلك نقوم بشرح مسألة التدفق الأعظم مع تفصيل طريقة حل هذه المسألة.

(٩,١) تعاريف أساسية

Essential Definitions

لعل من المناسب أن نقدم تعريفًا للشبكة ومكوناتها، ومن ثم نقوم بإعطاء بعض الأمثلة على الشبكات حتى يسهل على القارئ فهم مسألة المسار الأقصر ومسألة التدفق الأعظم واللتين سوف نقوم بدراستهما تحت العناوين القادمة.

يمكـن تعريـف الـشبكة أنهـا تتكـون مـن مجمـوعتين همـا رؤوس (vertices) (وأحيانًا تـسمى عقـداً (nodes)) وأضـلاعاً (arcs). تمثـل الـرؤوس مجموعـة مـن النقـاط ويرمز لها بالرمز V، بينما يرمز للأضلاع بالرمز A ، وتعرف كالتالي:

تعريف(٩,١): الضلع Arc

يتكون الضلع من زوج مرتب من الرؤوس ، ويبين الاتجاه الـذي مـن الممكـن أن تتم فيه الحركة بين الرأسين.

إذا احتوت شبكة ما على الـضلع (i, j) ، فإن اتجاه الحركة يكـون مـن الـرأس i إلى الـرأس j . يـسمى الـرأس i رأس ابتـداء (initial vertex) ويـسمى الـرأس j رأس انتهاء (terminal vertex).

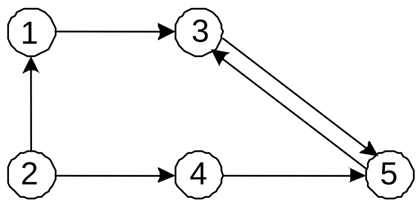
مثال(٩,١)

لتكن لدينا الشبكة الموضحة في الشكل (٩,١)، في هذه الحالة تكون الرؤوس:

$$V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

والأضلاع:

$$A = \{(1,3), (2,1), (2,4), (3,5), (4,5), (5,3)\}$$



شكل (٩,١).

لنفرض أن الرؤوس في الشكل (٩،١) عبارة عن مدن، والأضلاع عبارة عن طريق بمسار واحد. في هذه الحالة يكون هناك طريق من المدينة 1 إلى المدينة 3، ولكن لا يوجد طريق من المدينة 3 إلى المدينة 1. وأخيرًا فإنه يوجد طريق ذو مسارين بين المدينة 3 والمدينة 5. □

فيما يلي نعطي تعريف كل من السلسلة (chain)، والمسار (path).

تعريف(٩,٢): السلسلة Chain

السلسلة هي متتالية من الأضلاع بحيث إن كل ضلع يشترك في رأس واحد فقط مع الضلع الذي يسبقه.

تعريف(٩,٣): المسار Path

المسار هو سلسلة يكون فيها رأس الانتهاء لأي ضلع هو رأس الابتداء للضلع الذي يليه.

في المثال (٩،١)، لو أخذنا متتالية الأضلاع التالية $(4,5)-(2,4)-(2,1)$، نجد أن هذه المتتالية تمثل سلسلة ولكنها لا تمثل مسارًا. أما المتتالية $(3,5)-(1,3)-(2,1)$ فهي تمثل سلسلة ومسارًا. هذا المسار يمكن اعتباره طريقًا ينقلنا من المدينة 2 إلى المدينة 5.

(٩,٢) مسألة المسار الأقصر

Shortest Path Problem

تحت هذا العنوان سوف نفترض أن كل ضلع في الشبكة له طول معين، ونهدف إلى إيجاد أقصر طريق من الرأس 1 إلى بقية الرؤوس، يسمى هذا النوع من

المسائل مسألة المسار الأقصر (shortest path problem). ولحل هذا النوع من المسائل، نستخدم طريقة دايجكسترا (Dijkstra's Algorithm).

(٩,٢,١) طريقة دايجكسترا
Dijkstra's Algorithm

تستخدم طريقة دايجكسترا لإيجاد أقصر مسار من الرأس رقم 1 إلى بقية الرؤوس. تعتمد هذه الطريقة على ترقيم الرؤوس مبدئيًا بقيم مؤقتة ثم تثبيت الترقيم فيما بعد، بحيث يدل الترقيم المثبت على قيمة أقصر مسار من الرأس رقم 1 إلى الرأس المرقم. في البداية نقوم بترقيم الرأس رقم 1 بقيمة دائمة تساوي 0. بعد ذلك نرقم كل رأس i متصل بالرأس 1 بضلع واحد بترقيم مؤقت هو طول الضلع الواصل بين الرأس i والرأس 1. بقية الرؤوس التي لا تتصل مباشرة بالرأس 1 تعطى ترقيمًا مؤقتًا يساوي ∞. بعد ذلك نختار الرأس ذا أقل ترقيم وليكن الرأس j ونقوم بتثبيت الترقيم لهذا الرأس. ثم نبحث عن الرؤوس المتصلة بالرأس j ونستبدل الترقيم لكل رأس k متصل بالرأس j بأقل الترقيمين التاليين:

١- الترقيم المؤقت الحالي للرأس k.

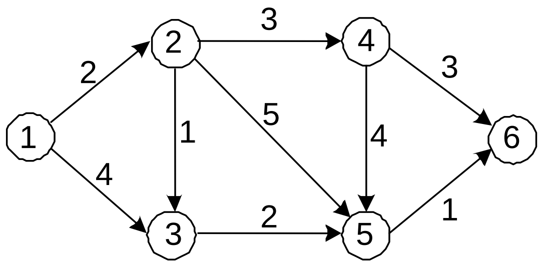
٢- الترقيم المثبت للرأس j + طول الضلع (j,k).

في المثال التالي نوضح مسألة مسار أقصر، ثم نشرح طريقة دايجكسترا لحل المسألة.

مثال(٩,٢)

يود أحد العمال الذين يعملون في مصنع ما الانتقال من مدينة رقم 1 إلى المدينة رقم 6. ولأنه لا يوجد طريق مباشر من المدينة 1 إلى المدينة 6، فإنه لا بد أن يمر ببعض المدن الأخرى. الشكل (٩.٢) يبين الطرق التي تربط المدن والمسافة بين هذه

المدن. ويرغب هذا العامل في الوصول إلى المدينة رقم 6 وذلك باستخدام أقصر طريق ممكن.



شكل(٩,٢).

الحل

في البداية نقوم بترقيم الرأس رقم 1 بقيمة دائمة تساوي 0 ، ثم نقوم بترقيم الرؤوس المتصلة بالرأس رقم 1 (وهي 2 و 3) ترقيمًا مؤقتًا يمثل طول الضلع الواصل بين الرأس 1 والرأسين 2 و 3. ومن ثم يكون ترقيم الرأس 2 مساويًا لـ 2 وترقيم الرأس 3 مساويًا لـ 4. بقية الرؤوس يتم ترقيمها ترقيمًا مؤقتًا يساوي ∞.

نقوم الآن بوضع ترقيم الرؤوس على شكل صف بحيث إن العنصر رقم i في هذا الصف يمثل ترقيم الرأس i. في هذا المثال يكون صف الترقيم :

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

بعد ذلك نضع علامة * فوق العناصر التي تم ترقيمها ترقيمًا دائمًا (permanent label). ولأن الرأس 1 تم ترقيمه ترقيمًا دائمًا ، إذًا نحصل على صف الترقيم :

$$\begin{bmatrix} 0^* & 2 & 4 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

الخطوة التالية نقوم بتثبيت أصغر عدد في صف الترقيم (العنصر الثاني في هذه الحالة) فيصبح صف الترقيم:

$$\begin{bmatrix} 0^* & 2^* & 4 & \infty & \infty & \infty \end{bmatrix}$$

الآن نبدأ بآخر رأس تم تثبيته وهو الرأس رقم 2. نبحث عن جميع الرؤوس التي تتصل بهذا الرأس وهي الرؤوس $3,4,5$ ، ونقوم بترقيم هذه الرؤوس ترقيمًا مؤقتًا هو عبارة عن أقل القيمتين التاليتين:

١- ترقيم الرأس الحالي.

٢- ترقيم الرأس 2 الدائم مضافًا إليه طول الضلع الواصل بين الرأس 2 وهذا الرأس.

نبدأ الآن ترقيم الرؤوس $3,4,5$. كان الترقيم المؤقت للرأس 3 يساوي 4 ، والترقيم الدائم للرأس 2 يساوي 2 وطول الضلع $(2,3)$ يساوي 1. إذًا نختار الترقيم الجديد المؤقت للرأس 3 ليكون:

$$\min\{4, 2+1\} = 3$$

بالنسبة للرأس 4 كان الترقيم المؤقت له يساوي ∞ ، والترقيم الدائم للرأس 2 يساوي 2 وطول الضلع $(2,4)$ يساوي 3. إذًا نختار الترقيم الجديد المؤقت للرأس 4 ليكون:

$$\min\{\infty, 2+3\} = 5$$

وبالمثل، فإن الترقيم المؤقت الجديد للرأس رقم 5 يصبح:

$$\min\{\infty, 2+5\} = 7$$

ومن ثم نحصل على صف الترقيم التالي:

$$\begin{bmatrix} 0^* & 2^* & 3 & 5 & 7 & \infty \end{bmatrix}$$

نقوم بتثبيت أصغر قيمة في صف الترقيم لم يتم تثبيتها وهي 3.

$$\begin{bmatrix} 0^* & 2^* & 3^* & 5 & 7 & \infty \end{bmatrix}$$

بعد ذلك نأخذ الرأس رقم 3 وهو آخر رأس تم تثبيت ترقيمه، ثم نبحث الرؤوس المتصلة به فنجد أنه لا يوجد إلا رأس واحد وهو الرأس رقم 5. الترقيم المؤقت للرأس رقم 5 يساوي 7 ، والترقيم الدائم للرأس رقم 3 يساوي 3 وطول الضلع $(3,5)$ يساوي 2. إذًا الترقيم المؤقت للرأس رقم 5 يساوي:

$$\min\{7, 3+2\} = 5$$

وبذلك نحصل على صف الترقيم التالي:

$$\begin{bmatrix} 0^* & 2^* & 3^* & 5^* & 5 & \infty \end{bmatrix}$$

بإمكاننا الآن تثبيت أي من الرأسين 4 أو 5 ، سوف نختار الرأس رقم 4. الرؤوس التي ترتبط بالرأس رقم 4 هي الرؤوس $\{5,6\}$. نلاحظ أن ترقيم الرأس رقم 5 لن يتغير لأن ترقيمه يساوي ترقيم الرأس رقم 4. أما ترقيم الرأس رقم 6 فيصبح:

$$\min\{\infty, 5+3\} = 8$$

فيكون الترقيم الجديد:

$$\begin{bmatrix} 0^* & 2^* & 3^* & 5^* & 5^* & 8 \end{bmatrix}$$

نقوم الآن بتثبيت أصغر ترقيم مؤقت وهو الرأس 5 ونجد أن هذا الرأس يرتبط بالرأس رقم 6 ، ومن هنا يكون الترقيم الجديد للرأس رقم 6.

$$\min\{8, 5+1\} = 6$$

وبهذا نحصل على صف الترقيم النهائي وهو:

$$\begin{bmatrix} 0^* & 2^* & 3^* & 5^* & 5^* & 6^* \end{bmatrix}$$

ومن ذلك نستنتج أن أقصر طريق من الرأس 1 إلى الرأس 6 سوف يكون طوله 6.

لكي نتعرف على أقصر طريق من الرأس 1 إلى الرأس 6 نقوم بالعمل بطريقة عكسية. فنبحث عن الرؤوس التي ترتبط مباشرة بالرأس رقم 6 بحيث يكون فرق الترقيم بين الرأسين مساويًا لطول الضلع الواصل بينهما، ونكرر العملية بالنسبة للرأس الجديد حتى نصل إلى الرأس رقم 1. نبدأ بالرأس رقم 6 ونلاحظ أن الفرق بين ترقيم الرأسين 6 و 5 هو 1 ويساوي طول الضلع (5,6). إذًا الرأس 5 يسبق الرأس 6 مباشرة. وبالنسبة للرأس رقم 5، نجد أن الفرق بين ترقيم الرأسين 5 و 3 هو 2 ويساوي طول الضلع (3,5). إذًا الرأس 3 يسبق الرأس 5 مباشرة. وبالمثل نجد أن الفرق بين ترقيم الرأسين 3 و 2 هو 1 ويساوي طول الضلع (2,3). إذًا الرأس 2 يسبق الرأس 3 مباشرة. وأخيرًا، فإن الرأس 1 يسبق الرأس 2، وبذلك نحصل على أقصر طريق من الرأس 1 إلى الرأس 6 وهو المسار 6−5−3−2−1. □

(٩,٣) مسألة التدفق الأعظم

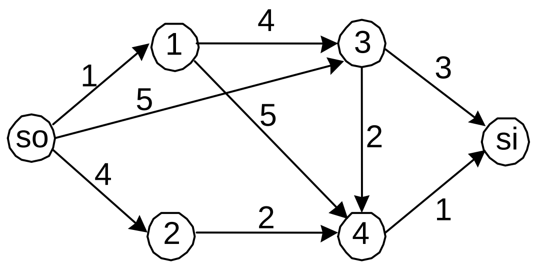
Maximum Flow Problem

في هذا النوع من المسائل يكون للضلع سعة معينة (capacity) تحد من كمية المنتج المرسلة عبر هذا الضلع. وفي هذه الحالة، نبحث عن أكبر كمية يمكن نقلها من نقطة مبدئية تسمى منبع (source) إلى نقطة نهائية تسمى مصب (sink). يسمى هذا النوع من المسائل مسألة التدفق الأعظم (maximum flow problem). نأخذ الآن مثالاً نبين فيه كيفية صياغة مسائل التدفق الأعظم، ومن ثم نشرح طريقة فورد فولكرسون (Ford-Fulkerson Method) لحل هذا النوع من المسائل.

مثال (٩,٣)

تود شركة بترول أن تقوم بنقل أكبر كمية من البترول عن طريق أنابيب من الرأس so إلى الرأس si مرورًا بالمحطات 1,2,3,4. في الشكل (٩,٣)، قمنا برسم هذه

المسألة ووضعنا على كل ضلع سعة هذا الضلع c_{ij} وهي أكبر كمية من البترول يمكن للأنبوب نقلها مقاسة بملايين اللترات في الساعة. أوجد صياغة مناسبة لهذه المسألة كمسألة برمجة خطية.

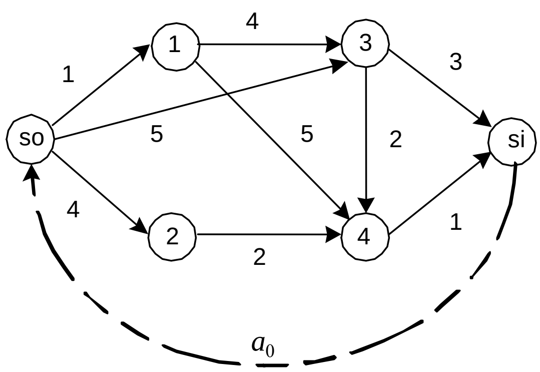


شكل (٩,٣).

الحل

في البداية نقوم بإضافة ضلع a_0 من المصب si إلى المنبع so كما في الشكل (٩,٤). هذا الضلع في الواقع لن يحتوي على أي كمية من البترول وإنما تم وضعه ليدل على كمية البترول التي وصلت إلى المصب ولذلك فهو يعتبر ***ضلع اصطناعي*** (artificial arc). بعد ذلك، نقوم بتعريف متغيرات القرار كالتالي :

x_{ij} =: كمية البترول المنقولة خلال الضلع $(i\,,j)$ مقاسة بملايين اللترات في الساعة



شكل (٩,٤).

إذا فرضنا أن كمية البترول التي تصل إلى الرأس si مقاسة بملايين اللترات في الساعة تساوي x_0 ، فإن هذه الكمية سوف يتم نقلها خلال الضلع a_0 من المصب إلى المنبع وذلك فقط من خلال الرسم وليس في الواقع. وفي هذه الحالة تكون المسألة عبارة عن البحث عن أكبر قيمة ممكنة لـ x_0 بحيث إن الكمية المنقولة في كل ضلع لا تتعدى سعته c_{ij} ، كما أن الكمية الداخلة في الرأس i لا بد أن تساوي الكمية الخارجة منه بما في ذلك المنبع والمصب (ولهذا الشرط تمت إضافة الضلع a_0). إذًا المسألة تأخذ الصورة:

$$
\begin{aligned}
& \max\ z = x_0 \\
\text{s.t.}\quad & x_{so,1} \le 1 \\
& x_{so,2} \le 4 \\
& x_{so,3} \le 5 \\
& x_{13} \le 4 \\
& x_{14} \le 5 \\
& x_{24} \le 2 \\
& x_{3,si} \le 3 \\
& x_{34} \le 2 \\
& x_{4,si} \le 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
x_0 &= x_{so,1} + x_{so,3} + x_{so,2} \\
x_{so,1} &= x_{13} + x_{14} \\
x_{so,2} &= x_{24} \\
x_{so,3} + x_{13} &= x_{34} + x_{3,si} \\
x_{14} + x_{24} + x_{34} &= x_{4,si} \\
x_{3,si} + x_{4,si} &= x_0 \\
x_{ij} &\ge 0
\end{aligned}
$$

□

نبين الآن كيف يمكن حل مسألة التدفق الأعظم وذلك باستخدام طريقة فورد فولكرسون.

(٩,٣,١) طريقة فورد فولكرسون
Ford-Fulkerson Method

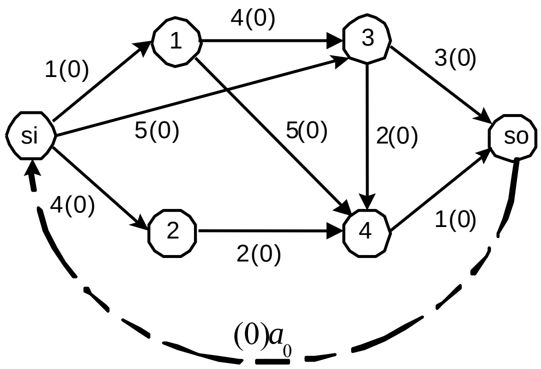
تعتمد طريقة فورد فولكرسون على إيجاد سلسلة من المنبع so إلى المصب si بحيث تحقق هذه السلسلة شروطًا معينة (سوف نتحدث عن شروط السلسلة بالتفصيل لاحقًا)، ومن ثم نقل أكبر كمية ممكنة من التدفق خلال هذه السلسلة. ثم بعد ذلك يتم البحث عن سلسلة أخرى تحقق نفس الشروط، ونقل أكبر كمية ممكنة من التدفق خلالها، ... وهكذا. وتتوقف طريقة فورد فولكرسون عندما لا توجد أي سلسلة تحقق الشروط.

مثال (٩,٤)

أوجد حل المسألة في المثال (٩,٣) باستخدام طريقة فورد فولكرسون.

الحل

في المثال (٩,٣) قمنا بإضافة الضلع a_0 من المصب إلى المنبع. بعد ذلك نضع على كل ضلع (i,j) الكمية المنقولة عبر هذا الضلع (x_{ij}) بين قوسين بجانب c_{ij} والتي تمثل سعة الضلع (i,j). تبدأ طريقة فورد فولكرسون بفرض أن التدفق المبدئي يساوي 0 لجميع الأضلاع. ومن ثم يكون التدفق المبدئي الموجود في الشكل (٩,٥) تدفقاً مسموحاً به.



شكل (٩,٥).

من الواضح أن كمية النفط المنقولة عبر الضلع (i,k) لا يمكن أن تتجاوز سعة هذا الضلع. كما أن الكمية التي تدخل إلى الرأس i لا بد أن تساوي الكمية الخارجة من هذا الرأس، ولذلك قمنا بإضافة الضلع a_0 للمسألة حتى تكون الكمية الداخلة للمصب مساوية للكمية الخارجة منه عن طريق الضلع a_0. يمثل الضلع a_0 الكمية التي دخلت إلى المصب؛ ولذلك فعندما ننتهي من حل المسألة فإن أكبر كمية يمكن نقلها من المنبع إلى المصب هي a_0.

الآن نبحث عن أي سلسلة من المنبع إلى المصب ونلاحظ أن هناك نوعين من الأضلاع في أي سلسلة C: النوع الأول هو *الأضلاع الأمامية* (forward arcs)، والنوع الثاني هو *الأضلاع العكسية* (backward arcs). الضلع الأمامي C هو الضلع الذي يكون فيه الرأس الابتدائي هو المنبع so، أو رأس الانتهاء للضلع الذي يسبقه. بينما الضلع الخلفي فهو الضلع الذي يكون فيه رأس الابتداء هو المصب si، أو رأس الابتداء للضلع الذي يليه. فمثلاً لو أخذنا السلسلة $(so,2)-(2,4)-(3,4)-(3,si)$، فإن جميع الأضلاع أمامية ماعدا الضلع $(3,4)$.

ولحل مسألة التدفق الأعظم نقوم بإيجاد سلسلة من المنبع إلى المصب بحيث تحقق الشرطين التاليين:

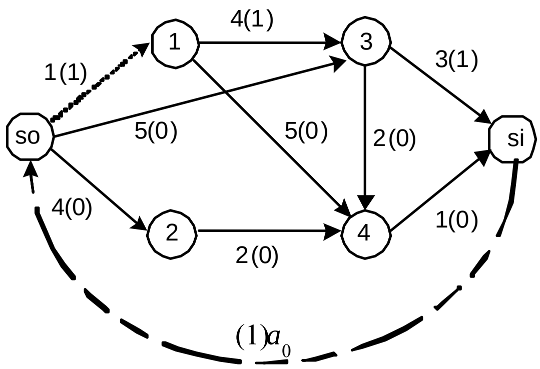
١- لأي ضلع أمامي فإن الكمية المنقولة عبر الضلع أقل من سعته.

٢- لأي ضلع عكسي فإن الكمية المنقولة عبر الضلع أكبر من الصفر.

ثم بعد ذلك نقوم بنقل كمية معينة من البترول عبر هذه السلسلة كما سوف نوضح لاحقًا. نستمر بهذه العملية حتى يستحيل إيجاد سلسلة تحقق الشرطين المذكورين آنفاً.

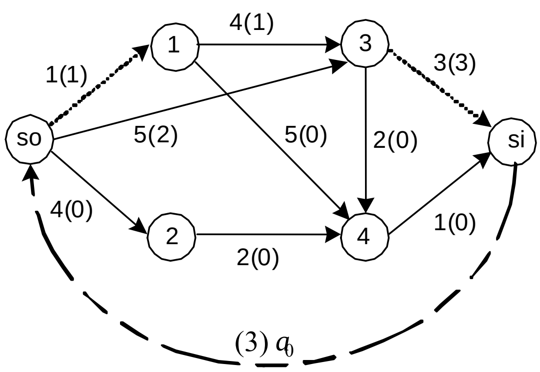
تعتمد طريقة فورد فولكرسون على زيادة التدفق في الأضلاع الأمامية وتقليله في الأضلاع الخلفية. نلاحظ أن الكمية الإضافية التي يمكن زيادتها عبر الضلع الأمامي تساوي $c_{ij} - x_{ij}$ ، والكمية التي يمكن تقليلها في الضلع العكسي تساوي x_{ij}. الآن تكون كمية التدفق θ التي سوف تضاف من المنبع إلى المصب عبر السلسلة C هي أقل الأعداد $c_{ij} - x_{ij}$ إذا كان الضلع أماميًا، و x_{ij} إذا كان الضلع عكسيا.

لنبدأ بالسلسلة $(so,1)-(1,3)-(3,si)$ ، نلاحظ أن جميع الأضلاع في هذه السلسلة هي أضلاع أمامية ولذلك فإن أكبر كمية نستطيع نقلها عبر هذه السلسلة تساوي $\min\{1,4,3\}=1$. إذًا نقوم بنقل وحدة واحدة عبر هذه السلسلة ونضع $x_{ij}=1$ داخل قوسين لكل ضلع في هذه السلسلة. نلاحظ أن الضلع $(so,1)$ قد وصل إلى أعلى سعة له، ولهذا فلا يمكن زيادة الكمية المنقولة عبر هذا الضلع، إذًا هذا الضلع أصبح عديم الفائدة كضلع أمامي لذلك نقوم بوضعه على شكل خط مستقيم مقطع مما يعني أنه يستحيل نقل أي نفط عبره. وبشكل عام، فإن الضلع يصبح عديم الفائدة كضلع أمامي إذا كانت الكمية المنقولة فيه تساوي سعته. بعد ذلك نقوم أيضًا بزيادة قيمة a_0 بوحدة واحدة. الشكل (٩،٦) يبين هذه الخطوة.



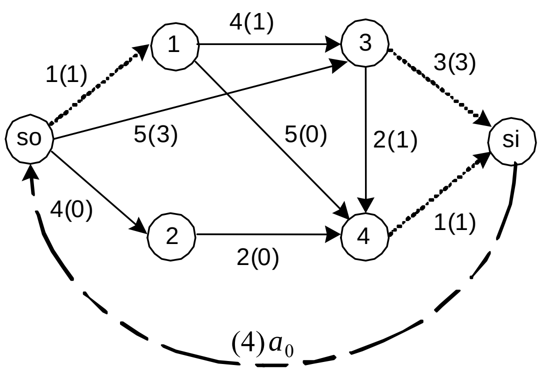
شكل (٩,٦).

الآن نختار سلسلة أخرى بين المنبع والمصب يمكننا فيها زيادة التدفق، مع مراعاة أن *الكمية التي يمكن نقلها عبر أي ضلع أمامي تساوي سعته مطروحًا منها الكمية التي تم نقلها عبر هذا الضلع* كما بينا سابقًا. نأخذ الآن السلسلة $(so,3)-(3,si)$ ، نلاحظ أن جميع الأضلاع في هذه السلسلة هي أضلاع أمامية ولذلك فإن أكبر كمية نستطيع نقلها عبر هذه السلسلة تساوي $\min\{5,3-1\}=2$. إذًا نقوم بنقل وحدتين عبر هذه السلسلة ونضع 2 داخل قوسين للضلع $(so,3)$ ، و 2+1 للضلع $(3,si)$. نلاحظ أن الضلع $(3,si)$ قد وصل إلى أعلى سعة له فلا يمكن زيادة الكمية المنقولة عبر هذا الضلع. بعد ذلك نقوم أيضًا بزيادة قيمة a_0 بوحدتين كما هو موضح في الشكل (٩,٧).



شكل (٩,٧).

الآن نختار سلسلة أخرى بين المنبع والمصب يمكننا فيها زيادة التدفق. لنأخذ الآن السلسلة $(so,3)-(3,4)-(4,si)$ ، نلاحظ أن جميع الأضلاع في هذه السلسلة هي أضلاع أمامية ولذلك فإن أكبر كمية نستطيع نقلها عبر هذه السلسلة تساوي $\min\{5-2,2,1\}=1$. إذًا نقوم بنقل وحدة واحدة عبر هذه السلسلة. نلاحظ أن الضلع $(4,si)$ قد وصل إلى أعلى سعة له، ولهذا فلا يمكن زيادة الكمية المنقولة عبر هذا الضلع. بعد ذلك نقوم أيضًا بزيادة قيمة a_0 بوحدة واحدة. الشكل (٩,٨) يبين هذه الخطوة.



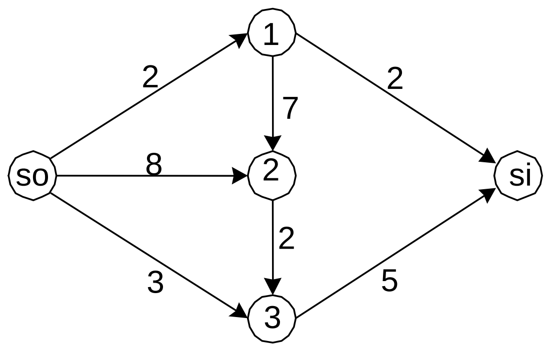
شكل (٩,٨).

نلاحظ الآن أنه لا يوجد أي سلسلة بين المنبع والمصب تحقق الشرطين١ و ٢ ، وبذلك نكون قد توصلنا إلى الحل الأمثل لهذه المسألة وتكون قيمة التدفق الأعظم $a_0=4$ ، كما أن قيمة المتغير الأساسي x_{ij} هي كمية التدفق المنقولة عبر الضلع (i,j) . □

نأخذ الآن مثالاً آخر على مسألة التدفق الأعظم، ونبين كيفية حل المثال باستخدام طريقة فورد فولكرسون بحيث تحتوي أحد السلاسل في هذا المثال على ضلع عكسي.

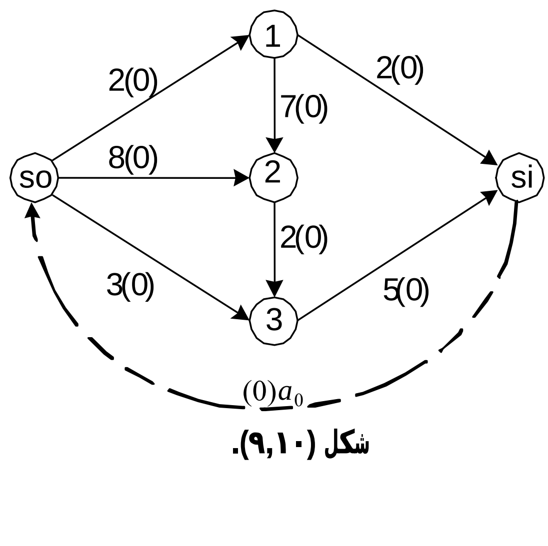
مثال (٩,٥)

في الشكل (٩,٩)، أوجد التدفق الأعظم لهذه الشبكة من المنبع إلى المصب ؛ وذلك باستخدام طريقة فورد فولكرسون.



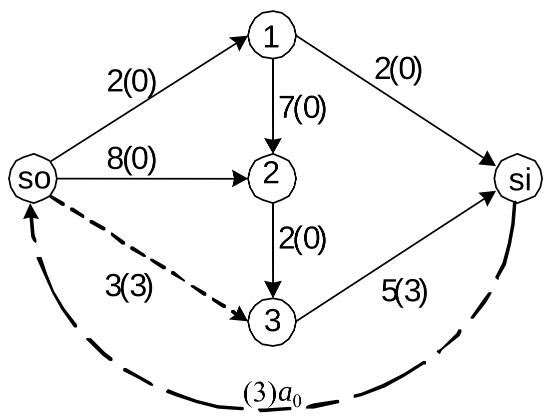
شكل (٩,٩).

نبدأ الآن بفرض أن التدفق المبدئي يساوي 0 لجميع الأضلاع ونضيف الضلع الاصطناعي a_0 من المصب إلى المنبع، فنحصل على الشكل (٩,١٠) كتدفق مبدئي مسموح به.



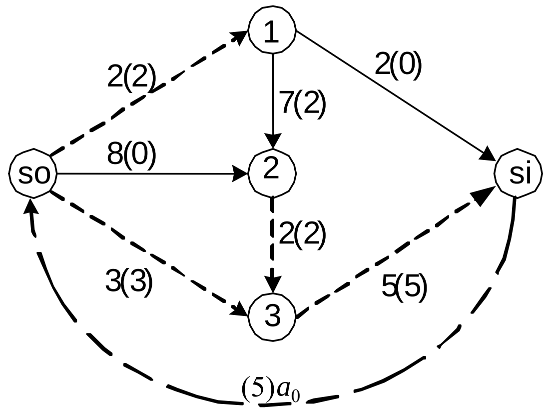
شكل (٩,١٠).

الآن نأخذ السلسلة $(so,3)-(3,si)$ ، ونلاحظ أن جميع الأضلاع في هذه السلسلة هي أضلاع أمامية ولذلك فإن أكبر كمية نستطيع نقلها عبر هذه السلسلة تساوي $\min\{3,5\} = 3$. من ثَم نقوم بنقل ثلاث وحدات عبر هذه السلسلة. نلاحظ أن الضلع $(so,3)$ قد وصل إلى أعلى سعة له، ولهذا فلا يمكن زيادة الكمية المنقولة عبر هذا الضلع. بعد ذلك نقوم بزيادة قيمة a_0 بثلاث وحدات كما في الشكل (٩،١١).



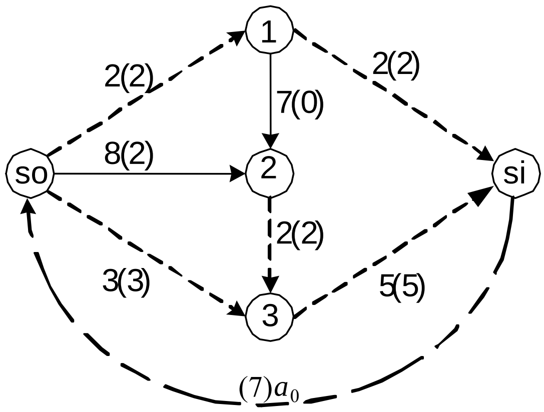
شكل (٩,١١).

بعد ذلك نختار سلسلة أخرى بين المنبع والمصب يمكننا فيها زيادة التدفق ولتكن السلسلة $(so,1)-(1,2)-(2,3)-(3,si)$ ، نلاحظ أن جميع الأضلاع في هذه السلسلة هي أضلاع أمامية ؛ ولذلك فإن أكبر كمية نستطيع نقلها عبر هذه السلسلة تساوي $\min\{2,7,2,5-3\} = 2$. إذا نقوم بنقل وحدتين عبر هذه السلسلة أي أننا نضيف لكل ضلع في هذه السلسلة مقدار وحدتين. بعد ذلك نقوم أيضًا بزيادة قيمة a_0 بوحدتين فنحصل على الشكل(٩،١٢).



شكل (٩,١٢).

الآن نختار سلسلة أخرى بين المنبع والمصب يمكننا فيها زيادة التدفق. نلاحظ أن السلسلة لا بد أن تحتوي على ضلع عكسي ولا يوجد إلا سلسلة واحدة وهي $(so,2)-(1,2)-(1,si)$. نلاحظ أن الضلعين $(so,2)$ و $(1,si)$ عبارة عن ضلعين أماميين، وأعلى سعة لهما هي 8 و 2 على التوالي. بينما الضلع $(1,2)$ عبارة عن ضلع عكسي، وأكبر كمية يمكن تقليلها من هذا الضلع تساوي كمية التدفق في هذا الضلع أي 2. ومن ثم فإن أكبر كمية نستطيع نقلها عبر هذه السلسلة تساوي $\min\{8,2,2\}=2$. إذًا نقوم بنقل وحدتين عبر هذا المسار، أي أننا نضيف لكل ضلع أمامي وحدتين ونطرح من كل ضلع عكسي وحدتين. بعد ذلك نقوم بزيادة قيمة a_0 بوحدتين كما في الشكل (٩,١٣).

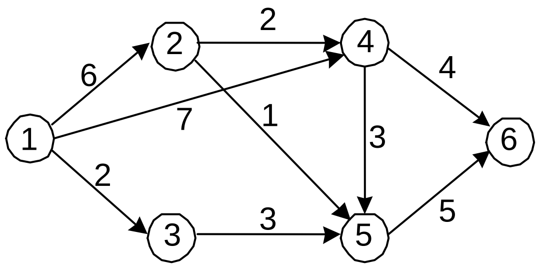


شكل (٩,١٣).

نلاحظ الآن أنه لا يوجد سلسلة بين المنبع والمصب تحقق الشرطين١ و ٢ ، إذًا نتوقف وتكون قيمة التدفق الأعظم $a_0 = 7$. □

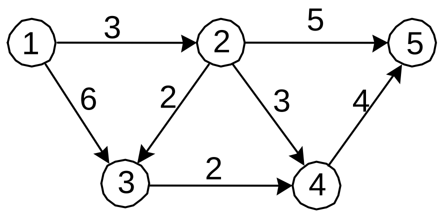
تمارين الفصل التاسع

(٩،١) أوجد المسار الأقصر من الرأس رقم 1 إلى الرأس رقم 6 في الشكل (٩،١٤)



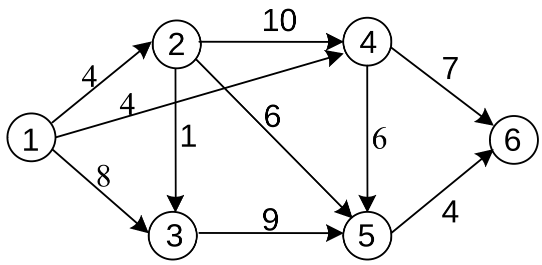
شكل (٩،١٤).

(٩،٢) أوجد المسار الأقصر من الرأس رقم 1 إلى الرأس رقم 5 في الشكل (٩،١٥).



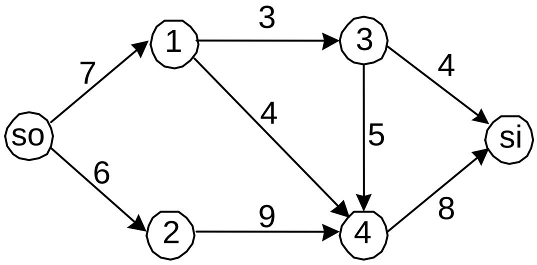
شكل (٩،١٥).

(٩،٣) في الشكل (٩،١٦)، احسب أقصر طريق من المدينة 1 إلى بقية المدن :



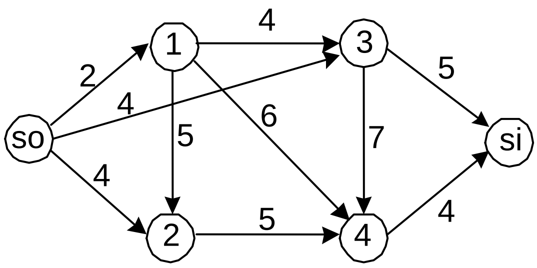
شكل (٩،١٦).

(٩,٤) احسب قيمة التدفق الأعظم في الشكل (٩,١٧) من المنبع so إلى المصب si.



شكل (٩,١٧).

(٩,٥) حسب قيمة التدفق الأعظم في الشكل (٩,١٨) من المنبع so إلى المصب si بطريقتين مختلفتين بحيث تكون جميع المسارات في الطريقة الأولى أمامية، ويكون أحد المسارات على الأقل في الطريقة الثانية عكسيًا.



شكل (٩,١٨).

المراجع

المراجع العربية

أبوعمة، عبد الرحمن و العش، محمد. *البرمجة الخطية*. الرياض، جامعة الملك سعود (١٩٩٠م).

الحميدان، سليمان وحامد، عمر وحميدة، حسن. *الأسس الرياضية للبرمجة الخطية*. الرياض، جامعة الملك سعود (٢٠٠٢م).

المراجع الأجنبية

Haughes, A. and Grawiog, D. *Linear Programming: An Emphasis on Decision Making.* Addison-Wesley, Reading, Massachusetts. (1973).

Phillips, D. and Solberg, J. *Operations Research: Principles and Practice.* John Wiley & Sons, New York. (1990).

Luenberger, D. *Linear and Nonlinear Programming*. Addison-Wesley, Reading, Massachusetts. (2004).

Bazaraa, M., Jarvis, J. and Sheali, H. *Linear Programming and Network Flows.* . John Wiley & Sons, New York. (2004).

Ahuja, R., Magnati, T. and Orlin, J. *Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications.* Prentice Hall, New Jersey. (1993).

Taha, H. *Operations Research: An Introduction.* Prentice Hall, New Jersey. (2002).

Winston, W., Kahn, W. and Munirpallam, V. *Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms.* Brooks/Cole. (2002)

Hillier, F. and Lieberman, G. *Introduction to operations research.* McGraw-Hill companies, Boston. (2004).

كشاف الموضوعات

Index

أولاً: عربي- إنجليزي

خ

د

ر