EXAMS SAMPLES:

KING SAUD UNIV.	MATH. 373	TIME 3: HOURS
MATHEMATICS DEPT.	FINAL EXAM	2^{nd} TERM 1421/1422

Q1: Let X be a non-empty set and A be a non-empty subset of X. Let

$$\Im = \{\phi, U : \text{where } U \text{ is a subset of } X \text{ containing } A\}.$$

Show that $\Im$ is a topology on X. Then answer the following for this topology:

(a) Describe closed sets.

(b) Let B be any subset of X, describe $\overline{B}$.

(c) Let B be any subset of X, describe $Int(B)$.

(d) Give a base for this topology different from the topology itself.

(e) Is this space Hausdorff?

(f) Is this space metrizable?

(g) Is this space compact?

(h) If $X = R$.Is it true that this space is homeomorphic to the usual topological space?

(i) If $(Y,\mathfrak{D})$ is the discrete topological space, is the function $f : X \to Y$ is continuous? Is it sequentially continuous?

(j) **Definition** " *A topological space Y is called connected space if there is no two non-empty disjoint open sets* U *and* V *such that* $X = U \cup V$ ". Is the space under consideration connected? (5+15 marks)

Q2: If (X, d) is a metric space. Answer the following:

(a) If $(Y, \Im)$ is a topological space. Prove that the function $f : X \to Y$ is sequentially continuous if and only if for every sequence (x_n) in X converge to x in X, then the sequence $(f(x_n))$ converges to $f(x)$ in Y.

(b) Prove that if $f : X \to Y$ is a continuous onto function from a sequentially compact space X onto a topological space Y, then Y is sequentially compact.

(c) Prove that the function $e : X \times X \to R$ defined by $e(x, y) = min\{1, d(x, y)\}$ is a bounded metric on X, and prove that $\Im(d) = \Im(e)$. (12 marks)

Q3: (a) Prove that a function $f: X \to Y$ from a topological space X into a topological space Y is continuous if and only if for every open set U in Y, $f^{-1}(U)$ is open in X.

(b) Let X be a topological space and A be a non-empty subset of X. Prove that the function $f: X \to R$, defined by $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ , if } x \in A \\ 0 \text{ , if } x \notin A \end{cases}$ is continuous at $p \in X$ if and only if $p \notin Bd(A)$. (6 marks)

Q4: (a) Prove that a bijective continuous function $f: X \to Y$ from a compact space X onto a Hausdorff space Y is a homeomorphism. (3 marks)

(b) Prove that the bijective function $f: S^3 - \{(0,0,0,1)\} \to R^3$ defined by $f(x, y, z, w) = \left(\frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right)$ is a homeomorphism. (4 marks)

Q5: Let $(X, \Im)$ be a topological space. Prove the following:

(a) If X is limit point compact and A ia a closed subspace of X, then A is limit point compact.

(b) If A is closed subspace of X and B is a limit point compact subspace of X, then $A \cap B$ is limit point compact. (6 marks)

Q6: Prove or disprove the following:

(1) If (R^2, d) is the usual metric space, then the collection

$$\left\{ B_d((0,0), 1/n) = \left\{ (x,, y) \in IR^2 : \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1/n \right\} \right\}$$

of subset of R^2 does not satisfy the finite intersection property.

(2) The subspace $R^2 - \{(0,0)\}$ of R^2 is compact.

(3) If the function $f: X \to Y$ is onto open function from a topological space X onto a topological space Y, and if the collection $\mathrm{B} = \{B_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ of subsets of X is a base for the topology on X, then the collection $\overline{\mathrm{B}} = \{f(B_\alpha) : \alpha \in \Delta\}$ of subsets of Y is a base for the topology on Y. (9 marks)

King Saud Univ.	Math 373	Time : 2 Hours
Math. Dept.	1st Med. Term Exam	1st Term 1422/1423

Q1: Show that if $\{\Im_\alpha : \alpha \in \Delta\}$ is a family of topologies on X, then their intersection is a topology on X. By giving a counter example, show that this does not hold if we replace intersection by union.

Q2: Let $A = \{ x \in R : 2 \leq x < 5\} \cup \{10,30,45\}$ be a subset of the real numbers R. Describe $Int(A), Bd(A), Ext(A), \overline{A}, A'$, if R has (i) usual topology (ii) cofinite topology.

Q3: Give a necessary and sufficient condition on a non empty subset A of a topological space X to be closed. Prove your claim.

Q4: (a) For any two non empty subsets A and B of a topological space X.

Prove (1) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$ (2) $X - Int(A) = \overline{X - A}$.

(b) *Definition:" An open subset U of a topological space X is called open regularly if and only if* $U = Int(\overline{U})$*. A closed subset M is called regularly closed if and only if* $M = \overline{Int(M)}$*". Answer the following:*

(i) The complement of a regularly open set is regularly closed set and the complement of a regularly closed set is regularly open.

(ii) Give an example of an open subset of the usual topological space R that is regularly open.

(iii) The intersection of a two regularly open set is regularly open.

نماذج لاختبارات شهرية ونهائية:

جامعة الملك سعود	الامتحان الفصلي	الزمن: ساعة ونصف
قسم الرياضيات	٣٧٣ ريض	الفصل الأول: ١٤٢٥/١٤٢٦

س١: لتكن $\mathbb{R}$ مجموعة الأعداد الحقيقية ولتكن U مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$ تحقق لكل $x \in U$ توجد فترة نصف مغلقة نصف مفتوحة $[a,b)$ بحيث $x \in [a,b) \subset U$. ليكن

$\mathfrak{I} = \{\ \mathbb{R}, \phi,$ جميع U المعرفة أعلاه $\}$

اثبت أن $\mathfrak{I}$ تبولوجي على $\mathbb{R}$. لهذا التبولوجي على $\mathbb{R}$ أجب عما يلي:

(١) هل الفترات المفتوحة (a,b) مجموعات مفتوحة في هذا التبولوجي؟

(٢) إذا كانت $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ مجموعة الأعداد غير النسبية. صف $\overline{\mathbb{R} - \mathbb{Q}}$.

(٣) إذا كانت $\mathbb{Z}$ مجموعة الأعداد الصحيحة. صف $Int(\mathbb{Z})$.

(٤) هل الفضاء هاوزدورف ؟

س٢: (أ) إذا كان $(X,\mathfrak{I})$ فضاء تبولوجي وكانت $\mathcal{B}$ قاعدة لــ $\mathfrak{I}$. اثبت أن المجموعة U الجزئية من X مفتوحة في X اذاا كان لكل x في U يوجد عنصر قاعدة B في $\mathcal{B}$ بحيث أن $x \in B \subset U$.

(ب) اثبت ان الفضاء التبولوجي X فضاء هاوزدورف اذا وفقط اذا كانت المجموعة القطرية

$$\Delta = \{(x,x) \in X \times X : x \in X\}.$$

مغلقة في $X \times X$.

س٣: لتكن $d:\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دالة معرفة على النحو: لكل $x = (x_1, x_2 \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2 \ldots, y_n)$ ف $\mathbb{R}^n$ فإن $d(x,y) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - y_i)^2}$. اثبت أن d مترك على $\mathbb{R}^n$. إذا كانت ρ المترك المربعة على $\mathbb{R}^n$، اوجد علاقة بين d و ρ.

س٤: إذا كانت A مجموعة جزئية من الفضاء التبولوجي X، إذا عرفنا $Bd(A) = \overline{A} \cap \overline{(X - A)}$ فاثبت ما يلي:

(ا) $Int(A)$ و $Bd(A)$ منفصلتان، وأيضا $Bd(A) = \overline{A} - Int(A)$.

(ب) $Bd(A) = \phi$ مجموعة مغلقة إذا وفقط إذا كانت A مغلقة ومفتوحة.

جامعة الملك سعود	الامتحان النهائي	الزمن: ثلاث ساعات
قسم الرياضيات	٣٧٣ ريض	الفصل الثاني:١٤٢٣/١٤٢٤

١: لتكن X مجموعة غير منتهية وليكن

$$\tau=\{X,\phi\ ,U\subset X : X-U \text{ منتهية } \}$$

تجمع من المجموعات الجزئية من X.

اثبت أن τ تبولوجي على X . لهذا التوبولوجي على X اثبت ما يلي:

(٥) صف المجموعات المغلقة .

(٦) إذا كانت مجموعة غير منتهية في. صف.

(٧) لأي مجموعة جزئية في. أوجد $Int(B)$.

(٨) هل الفضاء هاوزدورف ؟

(٩) هل الفضاء متراص ؟

(١٠) إذا كان $X=IR$. هل هذا الفضاء يكافئ توبولوجيا الفضاء المعتاد ؟

(١١) تعريف " يقال أن الفضاء التوبولوجي X غير مترابط إذا وجدت مجموعتين مفتوحتين V و U غير خاليتين في X بحيث أن $X=U\cup V$ $U\cap V=\phi$. ويقال أنه مترابط إذا لم توجد V و U تحققان الشرط السابق ذكره".هل الفضاء مترابط ؟

(١٢) هل الفضاء يحقق المسألة المترية ؟ (١٨ درجه)

٢. ليكن (X,d) فضاء متري. اثبت ما يلي:

(أ) إذا كان X متراص بالمتتابعات، فإن X يمكن تغطيته بعدد منته من أقراص مفتوحة ذات نصف قطر ε لكل $\varepsilon>0$.

(ب) أي مجموعة جزئية من X متراصة بالمتتابعات تكون مغلقة ومحدودة.

(ج) أعط مثالا تبين فيه أن المجموعة المغلقة والمحدودة في X ليست بالضرورة متراصة. (٩ درجات)

٣. (ا) اثبت أن الدالة $f:X\to Y$ من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y متصلة إذا وفقط إذا كان لكل مجموعة مغلقة M في Y فإن المجموعة $f^{-1}(M)$ مجموعة مغلقة في X .

(ب) ليكن β قاعدة للفضاء التوبولوجي X ، ولتكن $f:X\to Y$ دالة من الفضاء التوبولوجي X إلى الفضاء التوبولوجي Y. إذا كانت $f(B)$ مجموعة مفتوحة في Y لكل $B\in\beta$. اثبت أن f دالة مفتوحة.

(ج) لتكن $f:R^2\to R^3$ دالة معرفة على النحو:

$$f(x,y)=\left(x^2+y^2,\begin{cases} x^2+y^2\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & ;(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ;(x,y)=(0,0)\end{cases},\ \cos xy\right)$$

اثبت أن f دالة متصلة. (٩ درجات)

٤. لتكن $d: R^n \to R$ دالة معرفة على النحو: لكل $x=(x_1,x_2\ldots,x_n)$ و $y=(y_1,y_2\ldots,y_n)$ فإن $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(x_i-y_i)^2}$. اثبت أن d مترك على R^n. إذا كانت ρ المترك المربعة على R^n، اوجد علاقة بين d و ρ واستخدمها لإثبات أنهما تولدان نفس التوبولوجي على R^n. (١٠ درجات)

٥. (ا) من المعلوم أن الفضاء الجزئي من فضاء متراص ليس بالضرورة متراص، وأن الفضاء الجزئي المتراص من فضاء توبولوجي ليس بالضرورة مغلق. ما هو الشرط (الشروط إن وجدت) والتي يجب فرضها على الفضاء الجزئي من الفضاء المتراص كي يكون متراصا؟ وما هو الشرط (الشروط إن وجدت) التي يجب فرضها على الفضاء كي يكون الفضاء الجزئي المتراص مغلقا؟

برهن صحة فرضك في كل حالة.

(ب) أعط مثالا لكل مما يلي:

(١) دالة متصلة ومغلقة ولكنها غير مفتوحة.

(٢) دالة مغلقة ولكنها غير متصلة.

(٣) دالة مفتوحة ولكنه غير مغلقة.

(٤) فضاء متراص بنقطة النهاية ولكنه غير متراص بالتتابعات. (١٠ درجات)