

السؤال الأول

(أ) إذا كانت (x_n) متتالية من نوع كوشي وكانت (y_n) متتالية بحيث لكل $\epsilon > 0$ يوجد $M \in \mathbb{N}$ تحقق $|x_n - y_n| < \epsilon$ لكل $n > M$ أثبتني أن (y_n) من نوع كوشي .

(ب) باستخدام التعريف أثبتني أن $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-5x^2 + 1}{x^2 + 4} = -5$.

(ج) إذا كانت $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $\lim_{x \rightarrow \infty} xf(x) = l$ أثبتني أن $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

السؤال الثاني

(أ) "يقال أن $x \in \mathbb{R}$ نقطة حدية للمجموعة $A \subseteq \mathbb{R}$ إذا كان كل جوار V للنقطة x يحقق $V \cap A \neq \Phi$ و $V \cap A^c \neq \Phi$ ويرمز لمجموعة النقاط الحدية بالرمز ∂A ." أثبتني أن $x \in \partial A$ إذا وفقط إذا لكل $\epsilon > 0$ يوجد $a \in A$ و $b \in A^c$ بحيث $|x - a| < \epsilon$ و $|x - b| < \epsilon$.

(ب) باستخدام اتصال الدالة $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = e^x$ أثبتني أن المتتالية $(\sqrt[n]{e^{n+1}})$ تتقارب إلى e .

(ج) إذا كانت $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ متزايدة أثبتني أن $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ موجودة وتحقق $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \leq f(b)$.

السؤال الثالث

(أ) إذا كانت f, g دالتان متصلتان علي $[a, b]$ وكانت $A = \{x: f(x) = g(x)\}$ أثبتني أنه لكل متتالية (x_n) حيث $x_n \in A \forall n \in \mathbb{N}$ تتقارب إلى $x_0 \in A$.

(ب) إذا كانت $g(x) = \begin{cases} x & x \in [0, 1] \\ x+1 & x \in (1, 2] \end{cases}$ أوجد g^{-1} -١ أثبتني أن g^{-1}, g كلاهما متزايدة فعلا .

-٣ هل g^{-1}, g متصلتان علي مجالهما .

السؤال الرابع

(أ) لتكن $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$ و $g(x) = 6 \sin x$ -١ أثبتني أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$.

-٢ هل $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجودة علي إجابتك .

(ب) باستخدام نظرية القيمة المتوسطة للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ ، $x \neq 0$ أثبتني أن المعادلة $x^2 = ab$

لها حل في الفترة $[a, b]$ حيث $0 \notin [a, b]$.

ج) أنكري مع الإثبات نظرية داربو .

د) إذا كانت $f(x): (0,1] \rightarrow R$ حيث $f(x) = \begin{cases} 0 & x \notin Q \\ \frac{1}{q} & x = \frac{p}{q}, (p,q)=1 \end{cases}$ هل f مشتقة لدالة .

السؤال الخامس

أ) احسبي النهايات التالية إن وجدت :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{2 \sin x} \quad -3 \quad \lim_{x \rightarrow e} \frac{1}{\log x - 1} \quad -2 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left((-1)^n \frac{n}{n+1} \right) \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x + x} - \sqrt{\cos x - x}}{2x} \quad -4$$

ب) أثبتني صحة أو عدم صحة ما يلي :

١- مجموعة الأعداد الكسرية تحقق نظرية بولزانو فايرستراس .

٢- إذا كانت A مجموعة مفتوحة فإن $\sup A \notin A$.

٣- إذا كانت f دالة متصلة و g دالة محدودة فإن fg محدودة .

٤- إذا كانت الدالة f متصلة علي فترة I وقابلة للاشتقاق لكل $x \in I$ فإن f^{-1} قابلة

$$\text{للاشتقاق علي } f(I) \text{ وأن } (f^{-1})' f(x) = \frac{1}{f'(x)}$$