الملحق (ج)

مفاهيم الاحتمالية

Probability Concepts

(ج,١) مقدمة INTRODUCTION

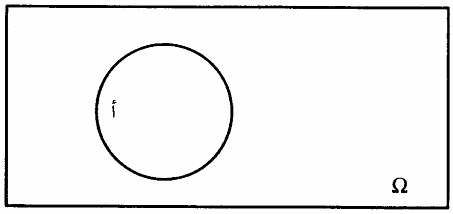
مسائل هندسة الزلازل الجيوتقنية محفوفة بالشكوك. وعند موقع محدد، يعتمد الحمل المحدث زلزالياً على حجم الزلزال وموقعه ـ ولا يمكن التنبؤ بأي منهما بشكل مؤكد. ولأن التغيرية الملازمة للترب والمحدودية التي لا مفر منها على الاستكشاف للظروف التحت سطحية، فإن مقاومة التربة لذلك الحمل لن تكون معروفة بشكل مؤكد. وعندما يكون الحمل والمقاومة غير مؤكدين، فإن التأثيرات الناتجة تكون غير مؤكدة كذلك. ويحاول عدد من تحليلات هندسة الزلازل الجيوتقنية تحديد كمية الشكوكية في المعاملات المدخلة المختلفة لمسألة محددة، وتحسب الشكوكية الناتجة في المخرجات.

ويعطي هذا الملحق مدخلاً مختصراً لبعض المفاهيم الرئيسية للاحتمالية، ويصف عدة توزيعات احتمالية تستعمل في متن الكتاب. ويمكن الحصول على معلومات مفصلة أكثر عن هذه المواضيع في المراجع مثل بنيامين وكورنل (Benjamin and Cornell, 1970)، وآنج وتانج (Ang and Tang, 1975 a, b , 1984) وهار (Harr 1987).

(ج,٢) مساحات العينة والحوادث SAMPLE SPACES AND EVENTS

تتعامل نظرية الاحتمالية مع النتائج، أو المخرجات، للعمليات التي عادة ما تكون موصوفة في الحس عام كتجارب (experiments). وتدعى مجموعة كل النتائج الممكنة للتجربة فراغ العينة (sample space)، ويدعى كل ناتج للتجربة نقطة العينة (Sample point). ويتكون إذاً فراغ العينة من كل النقاط الممكنة. وربما يكون فراغ العينة متصلاً، والذي يكون فيه عدد نقاط العينة غير محدد، أو ربما يكون منفصلاً (discrete)، مثل عندما يكون عدد نقاط العينة محدداً أو معدوداً.

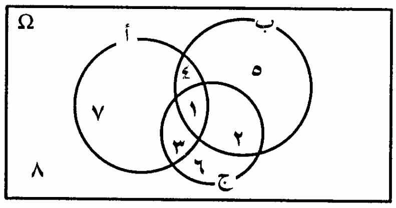
ويكون الحدث (event) جزءاً من فراغ العينة، ولذا يمثل مجموعة من نقاط العينة. ويتكون الحدث المفرد (Single event) من نقطة عينة مفردة، ويتكون الحدث المركب (Compound event) من أكثر من نقطة عينة. وإذا كانت تمثل فراغ عينة و أ تمثل حدثاً، فإن الحدث المكمل (Complementary event)، أ، يكون مجموعة كل نقاط العينة في والتي ليست في أ ويمكن تمثيل العلائق المتداخلة بين المجموعات (sets) بشكل مقنع بواسطة متوسط شكل فين (Venn diagram) [الشكل (١, ج)]. وفي الشكل (١،ج) يمثل فراغ العينة بواسطة المستطيل والحدث أ بواسطة الدائر وهكذا تكون أ جزءاً من ويكون الحدث المكمل أ مطابَقاً للجزء من المثلث الذي يقع خارج الدائـــرة. و لأنــه لا يوجـــد نقاط عيّنة في أ و أ، فإن التقاطع (intersection) لـ أ و أ يكون مجموعة فارغة (null set)، ϕ (بمعنى، أ $\cap$ أ=ϕ). وبالمثل، تكون كل نقاط العينة في أ و أ، لذا يكون اتحاد (union) أ وأ هو Ω (بمعنى، أ $\cup$ أ = Ω). ويقال إن الحدثين، أ و ب، غير متقاطعين (mutually exclusive) إذا كانت لا تشارك نقاط عينة بينهما (بمعنى، ب $\cap$ أ= ϕ)



الشكل (١, ج) شكل فين ممثلاً الحدث أ في فراغ العينـة Ω.

مثال (١,ج)

اعتبر شكل فين للأحداث الثلاثة، أ، وب، و ج الموضح في الشكل (المثال (١,ج)).



الشكل (المثال (١,ج))

أ $\cap$ ب = المناطق ١ و ٤ أ $\cap \bar{ب}$ = المناطق ٣ و ٧

ب ∪ ج	= المناطق ١، ٢، ٣، ٤، ٦،٥	(أ ∪ ب) ∩ ج	=المناطق ١، ٢، ٣
أ ∩ ب ∩ج	= المنطقة ١	$(\bar{أ} \cap \bar{ب}) \cap \bar{ج}$	= المنطقة ٨

(ج,٣) حقائق الاحتمالية AXIOMS OF PROBABILITY

يمكن تعيين مقياس الاحتمالية، ح، لكل نقطة عينة أو لمجموعة من نقاط العينة في فراغ العينة. ويعبر عن احتمالية الحدث أ بواسطة الرمز ح [أ]. وتعتمد النظرية الكلية على الحقائق الرئيسية الثلاث التالية.

الحقيقة ١: تمثل الاحتمالية للحدث بواسطة عدد أكبر من أو يساوي الصفر، لكن أقل من أو يساوي ١ :

$$0 \le P \le 1 \qquad (ج,١)(أ)$$

الحقيقة ٢ : تكون الاحتمالية لحدث يساوي جميع فراغ العينة Ω ١:

$$P[\,\Omega\,] = 1 \qquad (ج,١)(ب)$$

الحقيقة ٣ : تكون الاحتمالية لحدث يمثل اتحاد حدثين غير متقاطعين مساوية لمجموع الاحتماليين لكلا الحدثين :

$$P[\,A \cup B\,] = P[\,A\,] + P[\,B\,] \qquad (ج,١)(ج)$$

ويمكن أن تستعمل هذه الحقائق لتطوير القواعد والنظريات التي تشمل النظرية الرياضية للاحتمالية.

(ج,٤) احتمالات الأحداث PROBABILITIES OF EVENTS

يفكر دائماً في الاحتمالات بمصطلح الترددات النسبية للظهور . وإذا اعتبر وجود المحتوى المائي أكبر من محتوى الماء الأعلى (optimum water content) في ردم مدموك ليكون حدثاً، فإن الاحتمالية لذلك الحدث يمكن أن تقدر بواسطة التردد النسبي لقياسات المحتوى المائي التي تتجاوزه. وإذا كان العدد الكلي لقياسات المحتوى المائي صغيراً، فإن التردد النسبي ربما يكون فقط تقريباً للاحتمالية الحقيقية، لكن كلما أصبح عدد القياسات كبيراً، فإن التردد النسبي سيقارب الاحتمالية الحقيقية. وهذه النقطة الترددية للمنظر ليست مساعدة، برغم ذلك، للحالات التي لا يمكن أن تعاد فيها التجارب. وفي مثل هذه الحالات، يمكن النظر إلى الاحتمالات كاحتمالات نسبية (أو درجات من التصديق)، كما في احتمالية أن يكون فالق مكتشف جديد قادراً على إنتاج أقدار زلزالية عالية بـ ٧,٠ أو ٧,٥ . ويعير التفسير الأخير نفسه إلى التقييم الموضعي للاحتمالية.

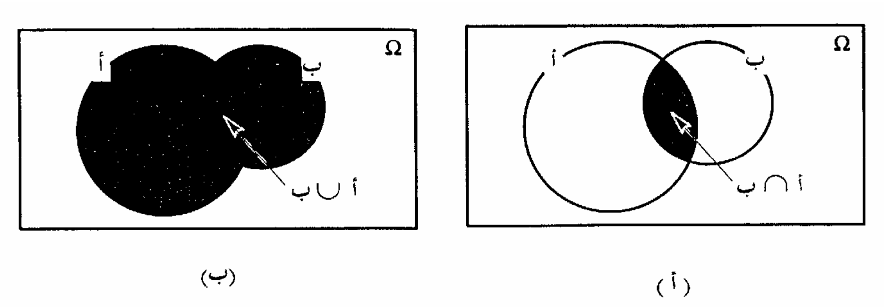
وبصرف النظر عن كيف تفسر الاحتمالات، تسمح حقائق الاحتمالية بعمل تعبيرات حول الاحتمالات للظهور لأحداث فردية أو متعددة. ويمكن تمييز هذه بمساعدة أشكال فين بحيث تكون

مساحة المستطيل التي تمثل فراغ العينة Ω مساوية لـ ١ و تكون المساحات لكل الأحداث داخل فراغ العينة مساوية لاحتمالاتها. اعتبر الحدثين المتقاطعين أ و ب في الشكل (٢,ج) . فإن الحدث أ ∩ ب (الذي يعني ظهور كل من أ و ب) يمثل بواسطة المنطقة المظللة في الشكل (أ ٢, ج)؛ وتعطى ح[أ ∩ ب] بواسطة مساحة المنطقة المظللة . ويمثل الحدث أ∪ ب (والذي يعني ظهور أي من أ أو ب) بواسطة المنطقة المظللة في الشكل (ب ٢, ج) ويعطى ح[أ ∪ ب] بواسطة المساحة لتلك المنطقة المظللة، أو:

$$P[A\cup B] = P[A] + P[B] - P[A\cap B] \quad (٢, ج)$$

وفي عدد من الحالات، تعتمد الاحتمالية لحدث واحد على ظهور حدث آخر . ويرمز إلى الاحتمالية المشروطة (conditional probability) للحدث أ المعطى لظهور الحدث ب بـ ح [أ |ب] ويعرف (لـ ح [أ>ب]) بواسطة:

$$P[A|B] = \frac{P[A\cap B]}{P[B]} \quad (ج,٣)$$



الشكل (٢, ج) أشكال فين للحدث أ و ب في فراغ العينة Ω . (أ) تعطى المجموعة أ∩ب بواسطة المساحة المظللة؛ فإذا كانت المساحة لـ Ω تساوي ١، فإن ح[أ∩ ب] تساوي المساحة التي ظللت، (ب) تعطى المجموعة أ∪ب بواسطة المساحة المظللة؛ ح[أ∩ ب] تساوي المساحة المظللة.

وتميز الاحتمالية المشروطة بسهولة بشكل فين [الشكل (٢,ج)(أ)] كنسبة للمساحة أ∩ب إلى المساحة لـ ب . ويكون الحدث أ مستقلاً إحصائيا (statistically independent) عن الحدث ب إذا كان الظهور لـ ب لا يؤثر في احتمالية ظهور أ؛ بحيث يكون:

$$P[A|B] = P[A] \quad (ج,٤)$$

وبإعادة ترتيب المعادلة (٢، ج) ، فإن احتمالية أن تظهر أ و ب، تعطى بواسطة:

$$P[A\cap B] = P[A|B]\ P[B] \quad (ج,٥)$$

والتي تصبح إذا كانت أ و ب مستقلتين إحصائياً .

$$P[\ A \cap B] = P[\ A]\ \ P[B] \qquad (ج,٦)$$

وهذا يعرف بقاعدة الضرب (multiplication rule) ويمكن أن يمد إلى أحداث غير متقاطعة، ومتعددة أ، ب، ، ن بواسطة:

$$P[A \cap B \cap C \cap ....\cap N] = P[A]\ P[B]\ P[C]........P[N] \qquad (ج,٧)$$

وتحدد قاعدة الضرب أن الاحتمالية للظهور المرتبط للأحداث المستقلة إحصائياً تساوي مضروب احتمالاتها المفردة .

مثال (ج,٢)

اعتبر تدحرج مكعب النرد كتجربة. إذا فراغ العينة الناتجة، Ω= {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦} كل المجموعة لكل النواتج الممكنة للتجربة . دع الثلاث حوادث التالية تعرف كالتالي:

أ = {1} (تدحرج واحد ينتج ١)

ب = { ١، ٣، ٥ } (تدحرج واحد ينتج عدداً فردياً)

ج = { ٤، ٥، ٦ } (تدحرج واحد ينتج عدداً أكبر من ٣)

عرف المجموعات أ∩ب، أ∪ب، و ب∪ج، وأحسب احتمالاتها.

الحـــل :

تشمل المجموعة أ ∩ ب كل المخرجات التي تكون في كل من أ و ب (بمعنى، أ ∩ ب={١}). وتشمل المجموعة أ∪ب كل المخرجات التي تكون في أ أو في ب (بمعنى أ∪ب = {١، ٣، ٥}). تشمل المجموعة ب ∪ ج كل المخرجات التي تكون في ب أو في ج (بمعنى، ب ∪ ج ={ ١، ٣، ٤، ٥، ٦}). ويمكن حساب الاحتمالات لكل مجموعة كالتالي:

$$P[A \cap B] = P[A|B]P[B] = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}$$

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(B \cup C) = P[B] + P[C] - P[B \cap C] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

المثال (ج,٣) :

أجريت مائة تجربة للدمك الحقلي في المراحل الأولى للإنشاء لسد ترابي. وطرحت نتائج التجارب في مصطلحات الأعداد التي تحقق مواصفات الدمك النسبي الأدنى ومحتوى ماء الدمك في الجدول اللاحق.

الدمك النسبي

المحتوى المائي	مقبول	غير مقبول
مقبول	٨٠	١٠
غير مقبول	٦	٤

افترض أن أداء المقاول في المستقبل سيكون نفسه في المائة تجربة وأن مادة الردم لن تتغير. قدر احتمالية أن مواصفات الدمك النسبي ستتحقق في التجربة التالية إذا تحققت مواصفات المحتوى المائي. قدر تلك الاحتمالية للحالة التي لا تتحقق فيها مواصفات المحتوى المائي.

الحـــل :

عرف الحدثين، R، و W بحيث إن

R = تحقق مواصفات الدمك النسبي

W =تحقق مواصفات المحتوى المائي

من جدول الاحتمالية يمكن تقدير أن كل من مواصفات الدمك النسبي والمحتوى المائي تتحقق كـ $P[W \cap R]$ =٨٠/١٠٠. إذا تكون احتمالية أن مواصفات الدمك النسبي ستتحقق في التجربة التالية إذا تحققت مواصفات المحتوى المائي هي الاحتمالية المشروطة $P[R \mid W]$، والتي يمكن أن تحسب كالتالي:

$$P[R|W] = \frac{P[W \cap R]}{P[W]} = \frac{80/100}{80/100 + 10/100} = \frac{80}{90} = 0.889$$

ويمكن تقدير احتمالية أن مواصفات الدمك النسبي تتحقق معطية أن مواصفات المحتوى المائي لن تتحقق كـ $P[R|\overline{W}]$ ، أو:

$$P[R|\overline{W}] = \frac{P[\overline{W} \cap R]}{P[\overline{W}]} = \frac{6/160}{6/160 + 4/100} = 0.600$$

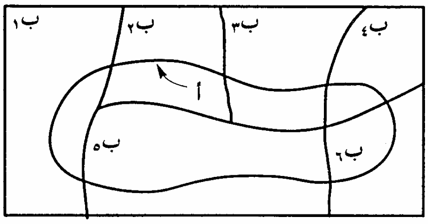
ولمجموعة من الأحداث، ب١، ب٢،......، بن، والتي تكون غير متقاطعة ($B_i \cap B_j = \phi$) لكل $i \neq j$ ، لكن الاستهلاك التجميعي (collectively exhaustive) (ب١ ∪ ب٢ ∪.......... ∪ بن = Ω)، كتلك الموضحة في شكل فين للشكل (٣, ج)، فإنه يمكن التعبير عن الاحتمالية لحدث آخر كالتالي :

$$P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \ldots\ldots + P[A \cap B_N] \qquad (ج,٨)$$

وباستعمال المعادلة (٥,ج) لكل حد على الجانب الأيمن للمعادلة (٨,ج) تنتج:

$$\begin{aligned} P[A] &= P[A|B_1]P[B_1] + P[A|B_2]P[B_2] + \ldots\ldots + P[A|B_N]P[B_N] \\ &= \sum_{i=1}^{N} P[A|B_i]P[B_i] \end{aligned} \qquad (ج,٩)$$

والمعروفة بنظرية الاحتمالية الكلية (total probability theorem). وتكون نظرية الاحتمالية الكلية العمود الفقري لحسابات الاحتمالية المطلوبة لتحليلات المخاطر الزلزالية الاحتمالية (الفصل ٤).



الشكل (٣,ج) تقاطع الحدث أ مع الأحداث غير المتقاطعة، لكن المستهلكة تجميعيا بن.

المثال (٤,ج)

لقد حدد المهندس الإنشائي أن المنشأ سوف ينهار في الزلزال الذي ينتج تسارع قمة بـ ٣, g. وتكون الاحتمالية بأن الزلزال المعطى على الفالق أ، وب أو ج سيكون قوياً بدرجة كافية لجعل المنشأ ينهار ٠,٥، و ٠,٢، و ٠,١، على التوالي . وتكون الاحتمالات بأن مثل هذه الزلازل ستظهر على الفوالق أ، وب، و ج أثناء عمر المبنى ٠,٠١، و ٠,٠٥، و ٠,٠٨، على التوالي . ما هي الاحتمالية بأن المنشأ سينهار في الزلزال ؟

الحـــل :

عرف الأحداث التالية كالآتي :

A = **ينهار** المبنى في **الزلزال**

D_1 = **يظهر الزلزال القادر على تدمير المنشأ على الفالق أ**

D_2 = **يظهر الزلزال القادر على تدمير المنشأ على الفالق ب**

D_3 = **يظهر الزلزال القادر على تدمير المنشأ على الفالق ج**

ولذا تعطى الاحتمالية بأن ينهار المنشأ في الزلزال بواسطة:

$$
\begin{aligned}
P[A] &= P[A|D_1]P[D_1]+P[D_1]+P[A|D_2]P[D_2]+P[A|D_3]P[D_3] \\
&= (0.5)(0.01)+(0.2)(0.05)+(0.1)(0.10) \\
&= 0.025
\end{aligned}
$$

(٥,ج) المتغيرات العشوائية RANDOM VARIABLES

تحاول كل حقول العلوم والهندسة وصف كميات أو ظواهر مختلفة بالقيم العددية . وفي معظم الحالات، لا يمكن التنبؤ بقيمة عددية دقيقة مسبقاً للعملية أو التجربة، ذات الأهمية . وفي مثل هذه الحالات، توصف كمية أو ظاهرة محددة بواسطة المتغير العشوائي . ويستعمل المتغير العشوائي لوصف الحدث في فراغ العينة بمصطلحات كمية .

ويمكن أن يأخذ المتغير العشوائي المتصل (continuous random variable) أي قيمة داخل فترة واحدة أو فترات. ولأن المتغير العشوائي المتصل يمكن أن يأخذ أي عدد غير محدد من القيم، فإن الاحتمالية بأن يأخذ أي قيمة محددة تكون ١ /∞ = صفر.

ويمكن أيضاً وصف توزيع الاحتمالية للمتغير العشوائي المتصل بواسطة دالة الكثافة الاحتمالية (probability density function, PDF) له أو $f_X(x)$، والتي يجب أن تحقق الظروف:

$$f_X(x) \geq 0 \qquad \text{for all } x$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$$

$$P[a \leq X \leq b] = \int_a^b f_X(x)dx$$

وطبقاً لهذه الظروف، تكون المساحة تحت دالة الكثافة الاحتمالية بين قيمتين a و b تمثل الاحتمالية التي يملكها المتغير العشوائي في الفترة المحددة بواسطة a و b. ويمكن أيضا وصف احتمالية التوزيع للمتغير العشوائي أيضاً بواسطة دالة التوزيع التراكمي (cumulative distribution function, CDF) ، والتي تعطي بواسطة:

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx \qquad \text{(ج,١٠)}$$

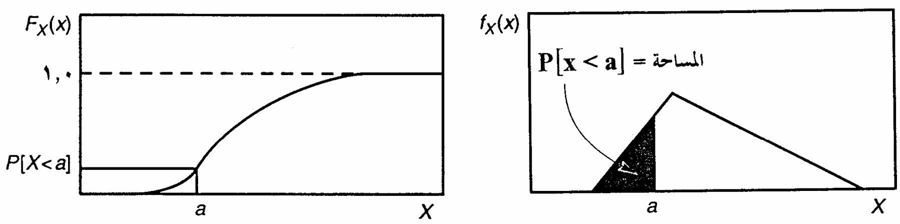
ولذا، تكون الاحتمالية بأن يقع المتغير العشوائي، X، بين القيمتين a و b:

$$P[a \leq X \leq b] = F_X(b) - F_X(a) \qquad \text{(ج,١١)}$$

وبوضوح، تكون دالتا الكثافة الاحتمالية والتوزيع التراكمي مرتبطتين جداً، و يمكن إظهار الواحدة من الأخرى بواسطة التكامل أو التفاضل. وتوضح دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع احتمالي نموذجي في الشكل (٤,ج) .

ومن نظرية الاحتمال الكلية وتعريف دالة الكثافة الاحتمالية، فإنه يمكن التعبير عن الاحتمالية لمتغير عشوائي Y له قيمة y معطية أن المتغير العشوائي X يكون بين القيمتين a و b كالتالي:

$$\begin{aligned} P[Y = y] &= P[Y = y | a \leq X \leq x_2] P[x_1 \leq X \leq x_2] \\ &= \int_a^b P[Y = y | a \leq X \leq x_2] f_X(X)dx \end{aligned} \qquad \text{(ج,١٢)}$$



(ب) (أ)

الشكل (ج,٤) (أ) دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي، X. تعطى الاحتمالية بأن $X<a$ بواسطة المساحة تحت دالة الكثافة الاحتمالية إلى اليسار لـ a . (ب) دالة التوزيع التراكمي لنفس المتغير العشوائي. تعطى الاحتمالية بأن $(X<a)$ بواسطة القيمة لدالة التوزيع التراكمي عند $X = a$.

(ج,٦) القيم المتوقعة والانحرافات المعيارية EXPECTED VALUES AND STANDARD DEVIATIONS

يمكن وصف الشكوكية في المتغير العشوائي غالبا بدقة معقولة بواسطة عدة معاملات إحصائية قليلة. ويعطى المتوسط، أو القيمة المتوقعة، لمتغير عشوائي متصل، X، بواسطة:

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x)dx \qquad (ج,١٣)$$

ويكون المتوسط مقياساً مفيداً جداً للميل المركزي (central tendency) للمتغير العشوائي. وبنفسه، برغم ذلك، لا يصف بشكل كاف شكل دالة الكثافة الاحتمالية. ويكون التشتت للمتغير العشوائي حول المتوسط أيضاً مهماً جداً. ويوصف هذا التشتت عادة بواسطة التباين (variance):

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\bar{x})^2 f_X(x)dx \qquad (ج,١٤)$$

أو الانحراف المعياري (standard deviation):

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \qquad (ج,١٥)$$

ويعكس هذان المعاملان كيفية وسع تشتت المتغير العشوائي حول المتوسط. ولأن وحداتها تكون نفسها كتلك للمتغير العشوائي، فإن الانحراف المعياري يكون أكثر استعمالا من التباين. وتسمع هذه الخاصة أيضاً بالتعبير عن التشتت بصيغة عديمة الأبعاد بواسطة معامل التباين:

$$COV_x = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} \qquad (ج,١٦)$$

ويذهب المتوسط والانحراف المعياري (أو المتوسط ومعامل التباين) بعيدا باتجاه وصف الشكوكية في المتغير العشوائي. وتوصف عدد من توزيعات الاحتمالية البسيطة مشتملة على تلك

التي يشاع استخدامها في هندسة الزلزال الجيوتقنية، كاملة بواسطة هذين المعاملين. وربما تتطلب التوزيعات الأخرى معاملات إضافية لوصف تماثلها، وحدودها، و / أو الخصائص الأخرى .

(ج,٧) توزيعات احتمالية شائعة COMMON PROBABILITY DISTRIBUTIONS

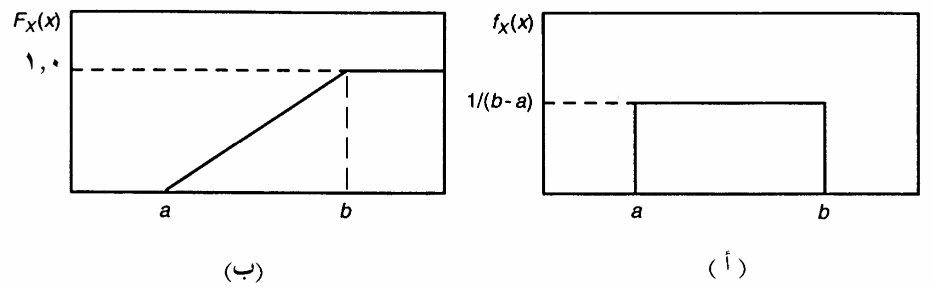
تظهر نتائج التجارب الإحصائية غالباً نفس النوع العام للسلوك، وكنتيجة، يمكن وصف المتغيرات العشوائية المرافقة مع تلك التجارب بواسطة نفس دالة الكثافة الاحتمالية أساساً. ويوجد عدد من دوال الكثافة الاحتمالية، لكن يتطلب فقط عدد قليل لتحليلات هندسة الزلازل الجيوتقنية الموصوفة في هذا الكتاب .

(ج,٧,١) التوزيع المنتظم Uniform Distribution

يكون أبسط توزيع احتمالي هو ذلك الواحد الذي تكون فيه كل القيم الممكنة للمتغير العشوائي متساوية الاحتمالية. ويوصف مثل هذا المتغير العشوائي بواسطة التوزيع المنتظم . وتكون دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متصل، X ، بحيث يكون موزعاً بشكل منتظم بين قيمتي a و b.

$$f_X(x)=\begin{cases} 0 & \text{for } x \le a \\ \dfrac{1}{b-a} & \text{for } a < x \le b \\ 0 & \text{for } x > b \end{cases} \qquad (ج,١٧)$$

وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي لتوزيع منتظم في الشكل (ج,٥).



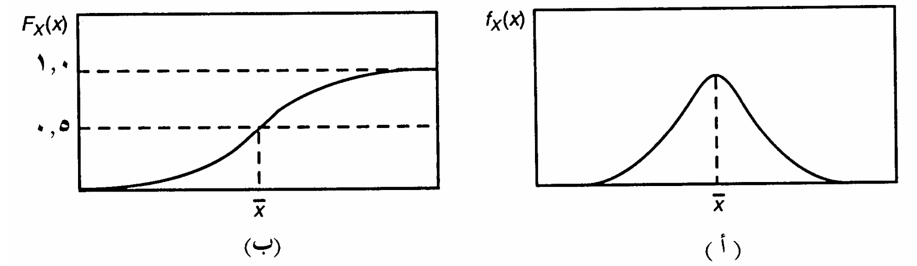
الشكل (ج,٥) توزيع منتظم: (أ) دالة الكثافة الاحتمالية؛ (ب) دالة التوزيع التراكمي.

(ج,٧,٢)،التوزيع الطبيعي Normal Distribution

أكثر توزيع احتمالي يشاع استخدامه هو التوزيع الطبيعي [أو توزيع جايسيان (Gaussian distribution)]. وتصف دالة الكثافة الاحتمالية له، والتي ترسم كالمنحنى ذي الشكل الجرسي المتعارف عليه للشكل (أ ٦,ج)، ومجموعات من البيانات المنتجة بواسطة مجموعة واسعة من العمليات الفيزيائية. ويعرف التوزيع الطبيعي كاملاً بواسطة معاملين: المتوسط والانحراف المعياري . ورياضيا، تعطى دالة الكثافة الاحتمالية لمتغير عشوائي متوزع طبيعياً x بمتوسط $\bar{x}$ و انحراف معياري σ_x بواسطة:

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x}exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{\sigma_x}\right)^2\right] \qquad (ج,١٨)$$

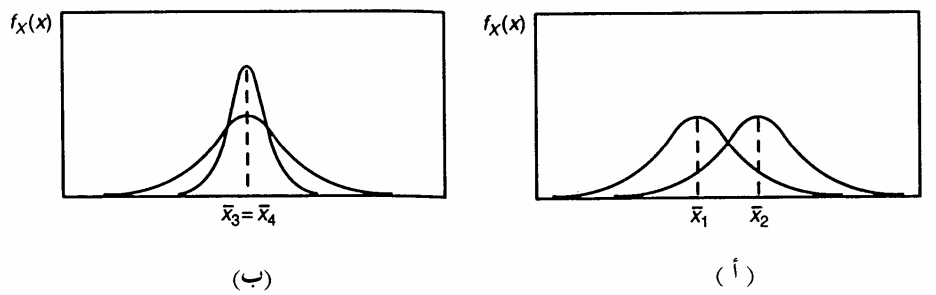
وتمثل دالة الكثافة الاحتمالية ودالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي في الشكل (٦,ج). وتوضح أمثلة لدالة التوزيع الاحتمالي الطبيعي لمتغيرات عشوائية بمتوسطات وانحرافات معيارية مختلفة في الشكل (٧,ج).



الشكل (٦,ج) التوزيع الطبيعي: (أ) دالة الكثافة الاحتمالية؛ (ب) دالة التوزيع التراكمي.

ولا ينتج تكامل دالة الكثافة الاحتمالية للتوزيع الطبيعي عبارة جبرية بسيطة لدالة التوزيع التراكمي، لذا يعبر عادة عن قيم دالة التوزيع التراكمي الطبيعي في صيغة جدوليه. ويعبر عن دالة التوزيع التراكمي الطبيعية بكفاءة أكبر بمصطلح المتغير الطبيعي العياري (standard normal variable) ، z، والذي يمكن أن يحسب لأي متغير عشوائي، x، باستعمال التحويل:

$$Z=\frac{X-\bar{x}}{\sigma_x} \qquad (ج,١٩)$$



الشكل (٧,ج) التوزيعات الطبيعية (أ) متغيران عشوائيان، x_1 و x_2، بمتوسطين مختلفين، لكن نفس الانحـراف المعيـاري، و (ب) مـتغيران عشوائيان، X_3 و X_4 بنفس المتوسط، لكن انحرافات معيارية مختلفة.

وعندما تكون لـ X قيمة، x، تكون القيمة المطابقة لـ Z $z=(x-\bar{x})/\sigma_x$. وهكذا، القيمة المتوسطة لـ Z $\bar{z}$=صفر ويكون الانحراف المعياري σ_z =١. وطرحت القيم المجدولة لدالة التوزيع التراكمي المتوزعة طبيعياً في الجدول (١,ج).

المثال (٥,ج)

معطى متغير عشوائي متوزع طبيعياً، X، بـ $\bar{x}$= ٢٧٠ و σ_x = ٤٠، احسب الاحتمالية بحيث (أ) X < ٣٠٠، و(ب) X >٣٥٠، و (ج) ٢٠٠ < X <٢٤٠ .

الحـــل :

(أ) لـ X = ٣٠٠،

$$Z=\frac{X-\bar{x}}{\sigma_x}=\frac{300-270}{40}=0.75$$

إذاً:

$$P[X<300]=P[Z<0.75]=F_z(0.75)=1-F_z(-0.75)=1-0.2266=0.7734$$

(ب) لـ X = ٣٥٠،

$$Z=\frac{X-\bar{x}}{\sigma_x}=\frac{350-270}{40}=2.0$$

إذاً:

$$P[X>350]=P[Z>2.0]=1-F_z(2.0)=F_z(-2.0)=0.0228$$

(ج) لـ X = ٢٠٠،

$$Z=\frac{X-\bar{x}}{\sigma_x}=\frac{200-270}{40}=-1.75$$

لـ X = ٢٤٠،

$$Z=\frac{X-\bar{x}}{\sigma_x}=\frac{240-270}{40}=-0.75$$

إذاً:

$$P[200 < X < 240] = P[-1.75 < Z < -0.75] = F_z(-0.75) - F_z(-1.75)$$
$$= 0.2266 - 0.0401 = 0.1865$$

(ج,٧,٣) التوزيع الطبيعي اللوغاريثمي Lognormal Distribution

تكون بعض المسائل، خصوصاً تلك التي تتضمن معاملات الحركة الأرضية (الفصل,٣)، مركبة في مصطلح اللوغاريثم للمعامل بدلا من المعامل نفسه. وإذا كانت X متغيراً عشوائياً فإن $Y = ln\ X$ تكون أيضاً متغيراً عشوائياً. وإذا كانت Y متوزعة طبيعياً، فإن X تكون متوزعة توزيعاً طبيعياً لوغاريتمياً . وبمعنى آخر، يتوزع المتغير العشوائي بشكل طبيعي لوغاريثمي إذا كان اللوغاريثميه يتوزع طبيعياً. وتعطى دالة الكثافة الاحتمالية للمتغير العشوائي المتوزع بشكل طبيعي لوغاريثمي بواسطة:

$$f_X(x) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi}\ \sigma_{ln\,x}} exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{ln\,x - \overline{ln\,x}}{\sigma_{ln\,x}}\right)^2\right] \qquad (ج,٢٠)$$

الجدول (١, ج) قيم دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي القياسي، ***FZ(z) = 1-FZ(-z)***

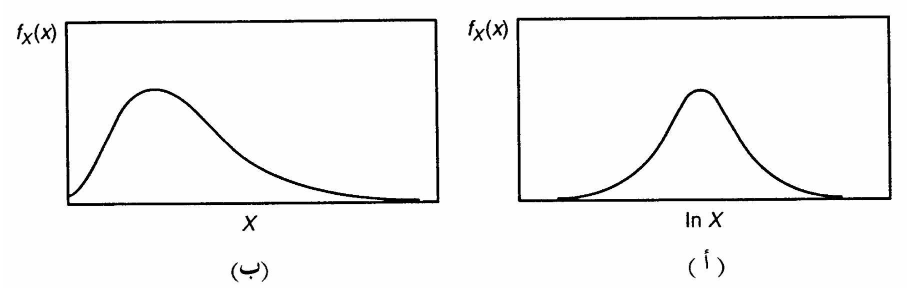
z	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٣,٤-	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٣	٠,٠٠٠٢
٣,٣-	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٤	٠,٠٠٠٣
٣,٢-	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٦	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥	٠,٠٠٠٥
٣,١-	٠,٠٠١٠	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٩	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٨	٠,٠٠٠٧	٠,٠٠٠٧
٣,٠-	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٣	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١٢	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١١	٠,٠٠١٠	٠,٠٠١٠
٢,٩-	٠,٠٠١٩	٠,٠٠١٨	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٧	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٦	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٥	٠,٠٠١٤	٠,٠٠١٤
٢,٨-	٠,٠٠٢٦	٠,٠٠٢٥	٠,٠٠٢٤	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٣	٠,٠٠٢٢	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢١	٠,٠٠٢٠	٠,٠٠١٩
٢,٧-	٠,٠٠٣٥	٠,٠٠٣٤	٠,٠٠٣٣	٠,٠٠٣٢	٠,٠٠٣١	٠,٠٠٣٠	٠,٠٠٢٩	٠,٠٠٢٨	٠,٠٠٢٧	٠,٠٠٢٦
٢,٦-	٠,٠٠٤٧	٠,٠٠٤٥	٠,٠٠٤٤	٠,٠٠٤٣	٠,٠٠٤١	٠,٠٠٤٠	٠,٠٠٣٩	٠,٠٠٣٨	٠,٠٠٣٧	٠,٠٠٣٦
٢,٥-	٠,٠٠٦٢	٠,٠٠٦٠	٠,٠٠٥٩	٠,٠٠٥٧	٠,٠٠٥٥	٠,٠٠٥٤	٠,٠٠٥٢	٠,٠٠٥١	٠,٠٠٤٩	٠,٠٠٤٨
٢,٤-	٠,٠٠٨٢	٠,٠٠٨٠	٠,٠٠٧٨	٠,٠٠٧٥	٠,٠٠٧٣	٠,٠٠٧١	٠,٠٠٦٩	٠,٠٠٦٨	٠,٠٠٦٦	٠,٠٠٦٤
٢,٣-	٠,٠١٠٧	٠,٠١٠٤	٠,٠١٠٢	٠,٠٠٩٩	٠,٠٠٩٦	٠,٠٠٩٤	٠,٠٠٩١	٠,٠٠٨٩	٠,٠٠٨٧	٠,٠٠٨٤
٢,٢-	٠,٠١٣٩	٠,٠١٣٦	٠,٠١٣٢	٠,٠١٢٩	٠,٠١٢٥	٠,٠١٢٢	٠,٠١١٩	٠,٠١١٦	٠,٠١١٣	٠,٠١١٠
٢,١-	٠,٠١٧٩	٠,٠١٧٤	٠,٠١٧٠	٠,٠١٦٦	٠,٠١٦٢	٠,٠١٥٨	٠,٠١٥٤	٠,٠١٥٠	٠,٠١٤٦	٠,٠١٤٣
٢,٠-	٠,٠٢٢٨	٠,٠٢٢٢	٠,٠٢١٧	٠,٠٢١٢	٠,٠٢٠٧	٠,٠٢٠٢	٠,٠١٩٧	٠,٠١٩٢	٠,٠١٨٨	٠,٠١٨٣
١,٩-	٠،٠٢٨٧	٠,٠٢٨١	٠,٠٢٧٤	٠,٠٢٦٨	٠,٠٢٦٢	٠,٠٢٥٦	٠,٠٢٥٠	٠,٠٢٤٤	٠,٠٢٣٩	٠,٠٢٣٣
١,٨-	٠,٠٣٥٩	٠,٠٣٥٢	٠,٠٣٤٤	٠,٠٣٣٦	٠,٠٣٢٩	٠,٠٣٢٢	٠,٠٣١٤	٠,٠٣٠٤	٠,٠٣٠١	٠,٠٢٩٤
١,٧-	٠,٠٤٤٦	٠,٠٤٣٦	٠,٠٤٢٧	٠,٠٤١٨	٠,٠٤٠٩	٠,٠٤٠١	٠,٠٣٩٢	٠,٠٣٨٤	٠,٠٣٧٥	٠,٠٣٦٧
١,٦-	٠,٠٥٤٨	٠,٠٥٣٧	٠,٠٥٢٦	٠,٠٥١٦	٠،٠٥٠٥	٠,٠٤٩٥	٠,٠٤٨٥	٠,٠٤٧٥	٠,٠٤٦٥	٠,٠٤٥٥
١,٥-	٠,٠٦٦٨	٠,٠٦٥٥	٠,٠٦٤٣	٠,٠٦٣٠	٠,٠٦١٨	٠,٠٦٠٦	٠,٠٥٩٤	٠,٠٥٨٢	٠,٠٥٧١	٠,٠٥٥٩
١,٤-	٠,٠٨٠٨	٠,٠٧٩٣	٠,٠٧٧٨	٠,٠٧٦٤	٠,٠٧٤٩	٠,٠٧٣٥	٠,٠٧٢٢	٠,٠٧٠٨	٠,٠٦٩٤	٠,٠٦٨١
١,٣-	٠,٠٩٦٨	٠,٠٩٥١	٠,٠٩٣٤	٠,٠٩١٨	٠,٠٩٠١	٠,٠٨٨٥	٠,٠٨٥٩	٠,٠٨٥٣	٠,٠٨٣٨	٠,٠٨٢٣
١,٢-	٠,١١٥١	٠,١١٣١	٠,١١١٢	٠,١٠٩٣	٠,١٠٧٥	٠,١٠٥٦	٠,١٠٣٨	٠,١٠٢٠	٠,١٠٠٣	٠,٠٩٨٥
١،١-	٠,١٣٥٧	٠,١٣٣٥	٠,١٣١٤	٠,١٢٩٢	٠,١٢٧١	٠,١٢٥١	٠,١٢٣٠	٠,١٢١٠	٠,١١٩٠	٠,١١٧٠
١,٠-	٠,١٥٨٧	٠,١٥٦٢	٠,١٥٣٩	٠,١٥١٥	٠,١٤٩٢	٠,١٤٦٩	٠,١٤٤٦	٠,١٤٢٣	٠,١٤٠١	٠,١٣٧٩
٠,٩-	٠,١٨٤١	٠،١٨١٤	٠,١٧٨٨	٠,١٧٦٢	٠,١٧٣٦	٠,١٧١١	٠,١٦٨٥	٠,١٦٦٠	٠,١٦٣٥	٠,١٦١١
٠,٨-	٠,٢١١٩	٠,٢٠٩٠	٠,٢٠٦١	٠,٢٠٣٣	٠,٢٠٠٥	٠,١٩٧٧	٠,١٩٤٩	٠,١٩٢٢	٠,١٨٩٤	٠,١٨٦٧

-٠,٧	٠,٢٤٢٠	٠,٢٣٨٩	٠,٢٣٥٨	٠,٢٣٢٧	٠,٢٢٩٦	٠,٢٢٦٦	٠,٢٢٣٦	٠,٢٢٠٦	٠,٢١٧٧	٠,٢١٤٨
-٠,٦	٠,٢٧٤٣	٠,٢٧٠٩	٠,٢٦٧٦	٠,٢٦٤٣	٠,٢٦١١	٠,٢٥٧٨	٠,٢٥٤٦	٠,٢٥١٤	٠,٢٤٨٣	٠,٢٤٥١
-٠,٥	٠,٣٠٨٥	٠,٣٠٥٠	٠,٣٠١٥	٠,٢٩٨١	٠,٢٩٤٦	٠,٢٩١٢	٠,٢٨٧٧	٠,٢٨٤٣	٠,٢٨١٠	٠,٢٧٧٦
-٠,٤	٠,٣٤٤٦	٠,٣٤٠٩	٠,٣٣٧٢	٠,٣٣٣٦	٠,٣٣٠٠	٠,٣٢٦٤	٠,٣٢٢٨	٠,٣١٩٢	٠,٣١٥٦	٠,٣١٢١
-٠,٣	٠,٣٨٢١	٠,٣٧٨٣	٠,٣٧٤٥	٠,٣٧٠٧	٠,٣٦٦٩	٠,٣٦٣٢	٠,٣٥٩٤	٠,٣٥٥٧	٠,٣٥٢٠	٠,٣٤٨٣
-٠,٢	٠,٤٢٠٧	٠,٤١٦٨	٠,٤١٢٩	٠,٤٠٩٠	٠,٤٠٥٢	٠,٤٠١٣	٠,٣٩٧٤	٠,٣٩٣٦	٠,٣٨٩٧	٠,٣٨٥٩
-٠,١	٠,٤٦٠٢	٠,٤٥٦٢	٠,٤٥٢٢	٠,٤٤٨٣	٠,٤٤٤٣	٠,٤٤٠٤	٠,٤٣٦٥	٠,٤٣٢٥	٠,٤٢٨٦	٠,٤٢٤٧
-٠,٠	٠,٥٠٠٠	٠,٤٩٦٠	٠,٤٩٢٠	٠,٤٨٨٠	٠,٤٨٤٠	٠,٤٨٠١	٠,٤٧٦١	٠,٤٧٢١	٠,٤٦٨١	٠,٤٦٤١

ويوضح الشكل شكل التوزيع الطبيعي اللوغاريتمي في الشكل (٨, ج). لاحظ أن دالة الكثافة الاحتمالية غير متماثلة، وأنها تعين احتمالية صفرية للقيم السالبة للمتغير العشوائي . ويمكن أن تكون هذه الخصائص مفيدة جداً لبعض المتغيرات العشوائية [التوزيع الطبيعي، على سبيل المثال، بعين احتمالات غير صفرية للقيم المتراوحة بين - ∞ و + ∞؛ عندما تطبق إلى متغير عشوائي كمثل كثافة التربة، ويمكن أن تعين بعض الاحتمالية (والمؤمل أن تكون صغيرة) حيث سيكون للتربة كثافة سالبة].

وتظهر عادة قيم دالة التوزيع التراكمي للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي من الجدول (ج,١) باستخدام التحويل المصحح.

$$Z = \frac{ln\, X - \overline{ln\, x}}{\sigma_{ln\, x}} \qquad (ج,٢١)$$



الشكل (٨, ج) منظران للتوزيع الطبيعي اللوغاريتمي. (أ) لأن اللوغاريتم للمتغير العشوائي المتوزع لوغاريتميا طبيعيا ، X، يكون توزيعاً طبيعياً، فإنه يكون دالة الكثافة الاحتمالية لـ $ln\ X$ منحنى ذو الشكل الجرسي. (ب) وليس لدالة الكثافة الاحتمالية لـ X نفسها قيم سالبة وليست متماثلة.

المثال (ج,٦)

يتوزع المتغير العشوائي، X، توزيعاً طبيعياً لوغاريتميا بـ $\overline{ln\, x}$ =٥ و σ_{lnx} =١,٢. احسب (أ) الاحتمالية بحيث $X<$ ١٠٠، و (ب) القيمة لـ X التي لها احتمالية ١٠% لكي تتجاوز .

الحـــل

(أ) لـ X = ١٠٠ ،

$$Z = \frac{ln\,X - \overline{ln\,x}}{\sigma_{ln\,x}} = \frac{ln100-5}{1.2} = -0.33$$

من الجدول (ج,١):

$$P[X < 100] = P[Z < -0.33] = F_z(-0.33) = 0.3707$$

(ب) من الجدول (ج,١)، تكون القيمة لــ Z التـي سيكون لهـا ١٠% احتماليـة للتجـاوز ١,٢٨٢ [بمعنى، $F_Z(1.282) = 0.90$]. وإذا يؤول إعادة ترتيب المعادلة (٢١,ج)

$$ln\,X = Z\sigma_{ln\,x} + \overline{ln\,x} = (1.282)(1.2) + 5 = 6.54$$

لذا:

$$X = e^{6.54} = 691$$