الملحق (ب)

ديناميكا الأنظمة المنفصلة

Dynamics of Discrete Systems

(١, ب) مقدمة INTRODUCTION

يتكون عدد من الأنظمة الاهتزازية من عناصر منفصلة مثل الكتل والزنبركات، أو يمكن نمذجتها على الأقل بمثل هذه العناصر. ولمعظم المسائل التطبيقية للديناميكا الإنشائية، ينمذج المنشأ كنظام من الكتل الصلبة الموصلة بواسطة زنبركات عديمة الكتلة. وحتى الأنظمة المتصلة مثل الرواسب الترابية تنمذج كتجمعات من العناصر المنفصلة، ولو أن تلك الطريقة نادراً ما يؤخذ بها الآن. وحيث إن مهندس الزلازل الجيوتقني غالباً ما يزود المهندس الإنشائي بالمعطيات، فإن الفهم القوي للاستجابة الديناميكية للأنظمة المنفصلة مطلوب. أيضا، يكون عدد من المفاهيم والمصطلحات المستعملة في تحليلات هندسة الزلازل الجيوتقنية مشابهة لتلك لديناميكا النظام المنفصل وتدخل بسهولة أكثر في ذلك الإطار.

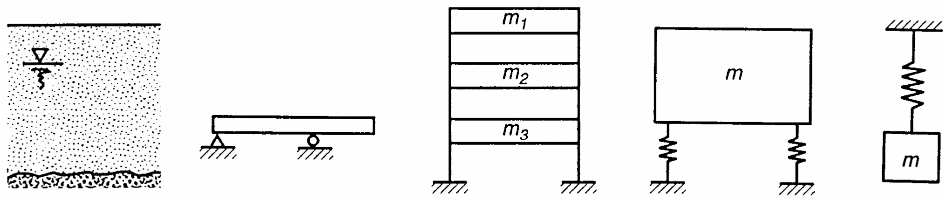
ويقدم هذا الملحق ديناميكا الأنظمة المنفصلة. إنه يبدأ بأنظمة بسيطة جداً، ويضيف عوامل معتمدة مثل التضاؤل، وحركة القاعدة، وغير الخطية. وطرحت حلول تحليلية وعددية في النطاق الزمني والنطاق الترددي. وأخيراً، أدخلت استجابة أنظمة درجات الحرية المتعددة. بينما طرح عدد من المفاهيم الأساسية للديناميكا الإنشائية، وربما توجد معالجات أكثر اكتمالا في عدد من مراجع الديناميكا الإنشائية (مثل، Clough and Penzien, 1975; Paz, 1980; Berg, 1989; Chopra, 1995).

(٢, ب) أنظمة الاهتزاز VIBRATNG SYSTEMS

يمكن تقسيم أنظمة الاهتزاز إلى مجموعتين رئيسيتين: الأنظمة الصلبة و الأنظمة المطاوعة. والنظام الصلب هو ذلك الذي لا يظهر فيه إجهاد. حيث تتحرك كل النقاط داخل النظام الصلب كل في الطور مع الأخرى، ويكون وصف حركة الجسم الصلب نسبيا موضوع بسيطاً للحركية. وفي الأنظمة المطاوعة، برغم ذلك، ربما تتحرك النقاط المختلفة داخل النظام بشكل مختلف (وخارج

الطور) كل عن الأخرى. وربما يسلك نظام فيزيائي معطى بشكل تقريبي جداً كنظام صلب تحت ظروف محددة وكنظام مطاوع تحت ظروف أخرى . وحيث إنه لا الترب ولا المنشآت تكون صلبة، فإن الاستجابة الديناميكية للأنظمة المطاوعة تكون مركزية لدراسة ديناميكا التربة والديناميكا الإنشائية ولهندسة الزلازل .

ويمكن وصف الأنظمة المطاوعة بواسطة توزيع كتلها. والأنظمة المنفصلة هي تلك التي يمكن اعتبار كتلتها مركزة عند عدد محدود من المواضع، مع أن كتلة النظام المتصل تتوزع خلال النظام. ويكون عدد المتغيرات الغير معتمدة المطلوبة لوصف موضع كل الكتل المهمة للنظام هو عدد الدرجات الديناميكية للحرية للنظام. وربما تتكون الأنظمة المهمة في هندسة الزلازل من ١ إلى عدد غير محدد من درجات الحرية. ويمثل الشكل (١,ب) عدة أنظمة معتبرة شائعة بأعداد مختلفة لدرجات الحرية. وللأنظمة المنفصلة عدد محدود من درجات الحرية؛ وعدد درجات الحرية للنظام المتصل غير محدد. وتمثل أنواع محددة من تحليلات الأنظمة المتصلة كأنظمة منفصلة بأعداد كبيرة من درجات الحرية، وتمثل أنواع أخرى الأنظمة المنفصلة بعدد من درجات الحرية كنظام مستمر.



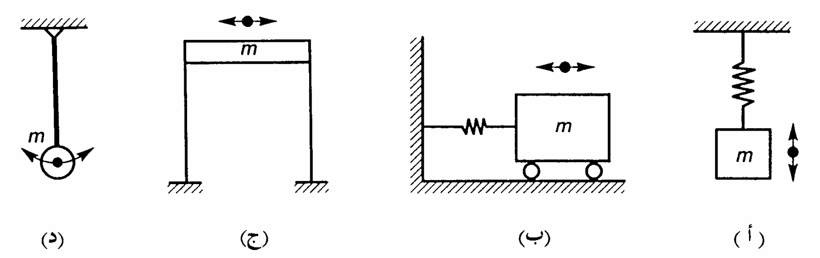
(هـ) (ج) (د) (ب) (أ)

الشكل (١, ب) أنظمة اهتزازية بعدد مختلف من درجات الحرية: (أ) درجة حرية واحدة، انتقال رأسي؛ (ب) درجتين للحرية، انتقال رأسي وانقلاب؛ (ج) ثلاث درجات للحرية، انتقال أفقي؛ (د) عدد غير محدد لدرجة الحرية؛ (هـ) عدد غير محدد لدرجة الحرية.

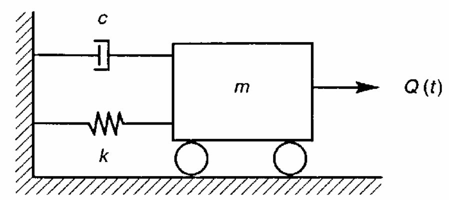
(٣, ب) أنظمة درجة الحرية المفردة SINGLE – DEGREE – OF – FREEDOM SYSTEMS

النظام المنفصل الذي يمكن وصفه كلية بواسطة متغيرة واحدة يعرف بنظام درجة الحرية المفرد. ودرجة الحرية المفردة ربما تمثل إزاحة أفقية، كأنظمة درجة الحرية المفردة للشكل (٢,ب)(أ)-(ب)، أو إزاحة دورانية، كما في حالة البندول للشكل (٢,ب)(د).

ونظـام نمـوذجي لدرجـة الحريـة المفـردة هـو أن تكـون فيـه الكتلـة الـصلبة، m، موصـلة علـى التـوازي إلــى زنبـرك بجـساءة، k، ونبيطـة بمعامـل تـضاؤل لـزج، c، ومعـرض لـبعض الحمـل الخارجي، $Q(t)$، كما هو موضح فـي الـشكل (٣,ب) ويفتـرض أن يكـون كـل مـن الزنبـرك والنبيطـة عديم الكتلة وأن يتطابق الموضع الأصلي للإزاحة مع موضع الاتزان الساكن.



الشكل (٢,ب) أنظمة ذات درجة حرية مفردة مختلفة. تكون درجات الحرية (أ) انتقال رأسي، و(ب) و (ج) انتقال أفقي، و (د) دوران.



الشكل (٣,ب) نظام ذو درجة حرية مفردة متضائل معرض إلى حمل ديناميكي خارجي، $Q(t)$.

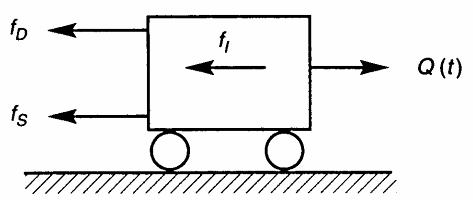
(٤, ب) معادلة الحركة لنظام ذو درجة حرية مفردة EQUATION OF MOTION FOR SDOF SYSTEM

يؤثر في عدد من أنظمة درجة الحرية المفردة بواسطة أحمال مطبقة خارجياً. وفي هندسة الزلازل، غالباً ما تنتج الأحمال الديناميكية من مصادر أخرى ـ تحرك دعامات النظام. وتغطى الاستجابة الديناميكية لنظام درجة الحرية المفردة مثل ذلك الموضح في الشكل (٣,ب) بواسطة معادلة الحركة. ويمكن أن تشتق معادلة الحركة بعدة طرق، وسوف تستخدم طريقة اتزان القوة البسيطة هنا.

(١,١ ,ب) معادلة الحركة: تحميل خارجي Equation of Motion : External loading

عندما يطبق الحمل الديناميكي إلى الكتلة لنظام ذي درجة حرية مفردة [الشكل (٣,ب)]، فإن ميول الحركة تقاوم بواسطة القصور الذاتي للكتلة وبواسطة القوى التي تطورت في النبيطة والزنبرك. وهكذا يكون الحمل الخارجي، $Q(t)$، المؤثر في الاتجاه x– الموجب معاكساً بواسطة ثلاث قوى [الشكل (٤, ب)] والتي تؤثر في الاتجاه- x السالب: قوة القصور الذاتي، f_I، وقوة تضاؤل اللزوجة، f_D ، وقوة الزنبرك المرنة، f_S . ويمكن التعبير عن معادلة الحركة بمصطلح الاتزان الديناميكي لهذه القوى :

(ب,١) $$f_I(t)+f_D(t)+f_S(t)=Q(t)$$



الشكل (٤,ب) القوى الديناميكية المؤثرة على الكتلة من الشكل (٣,ب)

ويمكن التعبير عن هذه أيضاً بمصطلحات حركة الكتلة. وينص قانون نيوتن الثاني على أن قوة القصور الذاتي المؤثرة في الكتلة تساوي معدل تغيرها الحركي، والذي ينتج لنظام من الكتلة الثابتة:

(ب,٢)(أ) $$f_I(t)=\frac{d}{dt}\left(m\frac{du(t)}{dt^2}\right)=m\frac{d^2u(t)}{dt^2}=m\ddot{u}(t)$$

وللنبيطة اللزجة، تكون قوة التضاؤل متناسبة مع سرعة الكتلة:

(ب,٢)(ب) $$f_D(t)=c\frac{du(t)}{dt}=c\dot{u}(t)$$

وتكون القوة المعطاة بواسطة الزنبرك ببساطة هي مضروب جساءتها والكمية التي أزيحت بواسطتها:

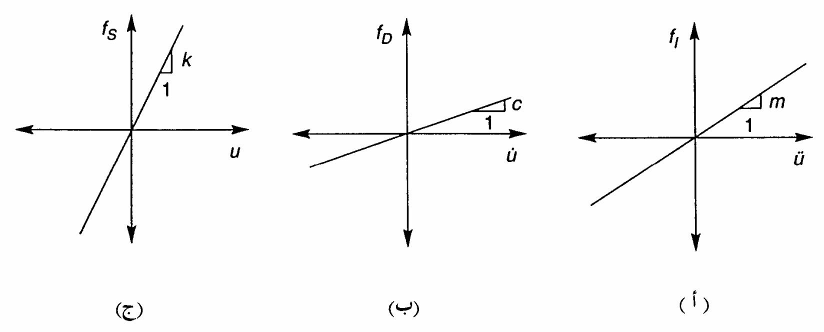
$$f_s(t) = ku(t) \qquad \text{(ج)(ب,٢)}$$

ويمثل سلوك هذه القوى بيانيا في الشكل (٥,ب). وتتناسب قوة القصور الذاتي مع التسارع ويكون ثابت التناسب هو الكتلة. وبالمثل، تتناسب قوة التضاؤل اللزجة وقوة الزنبرك المرنة مع السرعة والإزاحة مع عمل معاملات التضاؤل والزنبرك كثوابت خاصة للتناسب.

وبالتعويض بالمعادلات (٢,ب) في المعادلة (١,ب)، فإنه يمكن كتابة معادلة الحركة لنظام درجة الحرية المفردة كالتالي :

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + ku(t) = Q(t) \qquad \text{(ب,٣)}$$

ويشاع استعمال هذه المعادلة التفاضلية من الدرجة الثانية لوصف سلوك الأنظمة المتذبذبة من الأنظمة الميكانيكية المعتبرة في مسائل هندسة الزلازل إلى الدوائر الكهربائية. وتكون المعادلة التفاضلية للحركة خطية (بمعنى، أن لكل حدودها معاملات ثابتة). وتسمح هذه الخطية بقابلية إظهار حل تحليلي بصيغة مقربة، وبشكل مهم، تسمح باستخدام قاعدة التراكب. وعندما لا يكون أي من المعاملات ثابتاً، فإن السلوك لا يكون خطيا ويصبح الحل بشكل اعتباري أكثر صعوبة. وفي معظم الحالات، يجب تقييم الاستجابة للأنظمة غير الخطية عددياً (الجزء ٧,ب).



الشكل (٥,ب) تغير لقوى (أ) القصور الذاتي، و(ب) اللزوجة، و (ج) المرونة مع التسارع، والسرعة، والإزاحة، على التوالي .

(٤,٢,ب) معادلة الحركة : اهتزاز الدعامات (اهتزاز القاعدة)

Equation of Motion: Vibration of Supports (Base Shaking)

لمسائل هندسة الزلازل، ينتج الحمل الديناميكي في الغالب من اهتزاز دعامات النظام بدلا من الأحمال الخارجية الديناميكية. ولتقييم استجابة مثل هذه الأنظمة، فإنه من الضروري تطوير معادلة الحركة للتحميل المحدث بواسطة اهتزاز القاعدة. خذ بالاعتبار النظام الحر المتضائل من الدرجة الأولى الموضح في الشكل (٦,ب)(أ). فعندما يعرض لهز قاعدة ديناميكي، $u_b(t)$، فإنه سوف يتشوه إلى وضع ربما يكون مشابهاً لذلك الموضح في الشكل (ب٦,ب) عند زمن محدد، t. ويمكن تجزئة

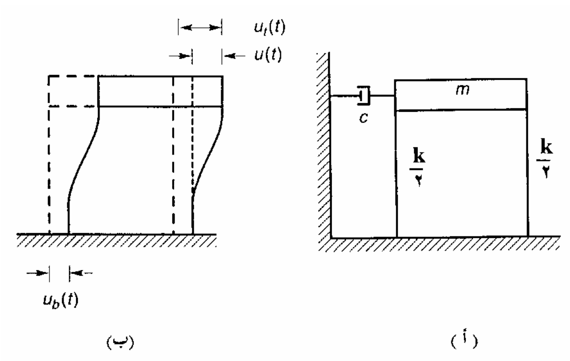
الإزاحة الكلية للكتلة، $u_t(t)$، كمجموع إزاحة القاعدة، $u_b(t)$، والإزاحة للكتلة بالنسبة للقاعدة، $u(t)$. وستعتمد قوة القصور الذاتي على التسارع الكلي للكتلة، بينما ستعتمد قوى التضاؤل اللزجة والزنبرك المرنة على السرعة والإزاحة النسبية، على التوالي. وباستعمال الرمز الموضح في الشكل (٦,ب)(ب)، فإنه يمكن كتابة معادلة الحركة كالتالي:

$$m\ddot{u}_t + c\dot{u} + ku = o$$

أو باستبدال $\ddot{u}_t(t) = \ddot{u}_b(t) + \ddot{u}(t)$ وبإعادة الترتيب:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = -m\ddot{u}_b \qquad (٤,ب)$$

وبمعنى آخر، تكون استجابة النظام لاهتزاز القاعدة مكافئة للاستجابة التي ستكون للنظام إذا ثبتت قاعدته وعرضت الكتلة لحمل خارجي $Q(t) = -m\ddot{u}_b(t)$. وهكذا يمكن استعمال أي حلول للاستجابة لنظام ذي درجة حرية مفردة معرض لحمل خارجي لتقييم استجابة النظام لاهتزاز القاعدة .



الشكل (٦,ب) نظام ذو درجة حرية مفردة معرض لاهتزاز القاعدة.

(٥,ب) الاستجابة لأنظمة خطية ذات درجة حرية مفردة RESPONSE OF LINEAR SDOF SYSTEMS

لكي تقيم الاستجابة الديناميكية لنظام خطي ذي درجة حرية مفردة، فإنه يجب حل المعادلة التفاضلية للحركة. ويوجد عدة أنواع من الظروف التي تحسب تحتها الاستجابة الديناميكية للأنظمة ذات درجة حرية مفردة بشكل عام. ويحدث الاهتزاز المفروض (forced vibration) عندما تعرض الكتلة لبعض التحميل الخارجي، $Q(t)$. وربما يكون التحميل دورياً أو غير دوري، وربما يكون مطابقاً للقوة الفيزيائية الحقيقية المطبقة للكتلة أو لمستوى ما هو معروف لهز القاعدة. ويحدث الاهتزاز الحر (free vibration) في غياب التحميل الخارجي، أو ربما يحدث بعد ما ينتهي اهتزاز الفروض الانتقالي. وسوف تطور الأجزاء التالية حلولاً لمعادلة الحركة لحالات يوجد أو لا يوجد فيها التضاؤل، ولحالات يوجد أو لا يوجد فيها التحميل الخارجي. وتكون التبديلات الأربع الناتجة لهذه الحالات.

١ - اهتزازات حرة غير متضائلة : $c = ٠$، $Q(t) = ٠$

٢ - اهتزازات حرة متضائلة : $c > ٠$، $Q(t) = ٠$

٣ - اهتزازات مفروضة غير متضائلة : $c = ٠$، $Q(t) \neq ٠$

٤ - اهتزازات مفروضة متضائلة : $c > ٠$، $Q(t) \neq ٠$

وسوف يطرح الحل لمعادلة الحركة لكل من هذه الحالات .

(ب,٥,١) الاهتزازات الحرة غير المتضائلة Undamped Free Vibrations

يكون النظام الحر من الدرجة الأولى تحت تأثير الاهتزاز الحر عندما يتذبذب بدون التأثير فيها بأي أحمال خارجية. وعندما لا يوجد التضاؤل (c = ٠) تقل معادلة الحركة (للاهتزاز الحر غير المتضائل) إلى:

$$m\ddot{u} + ku = 0 \qquad \text{(ب,٥)}$$

أو بعد قسمة كلا الجانبين على الكتلة:

$$\ddot{u} + \frac{k}{m}u = 0 \qquad \text{(ب,٦)}$$

ويمكن أن يوجد حل المعادلة التفاضلية البسيطة هذه في عدد من المراجع البدائية للمعادلات التفاضلية كالتالي :

$$u = C_1 \sin\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + C_2 \cos\sqrt{\frac{k}{m}}\,t \qquad \text{(ب,٧)}$$

حيث تعتمد قيمة الثوابت C_1 و C_2 على الظروف الأولية للنظام. وتكون الكمية $\sqrt{k/m}$ مهمة جداً ـ إنها تمثل التردد الدوري الطبيعي غير المتضائل (un-damped natural circular frequency) للنظام:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(ب,٨)}$$

ويمكن إذا كتابة التردد الطبيعي، f_o ، والفترة الطبيعية للاهتزاز، T_o، كالتالي:

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \text{(ب,٩)}$$

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad \text{(ب,١٠)}$$

ويؤول التعويض بالمعادلة (٨,ب) في الحل لمعادلة الحركة [المعادلة (٧, ب)] إلى:

$$u = C_1 \sin\omega_o t + C_2 \cos\omega_o t \qquad \text{(ب,١١)}$$

والتي تشير إلى أن النظام غير المتضائل في الاهتزاز الحر سيتذبذب توافقياً عند تردده الطبيعي غير المتضائل . ويمكن تقييم C_1 و C_2 بافتراض أنه يمكن تمثيل الظروف الأولية (t = ٠) بإزاحة أولية، u_o ، وسرعة أولية، $\dot{u}_o$. ومن ثم:

$$u_o = C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0) = C_2$$

$$\dot{u}_o = \omega_o C_1 \cos(0) - \omega_o C_2 \sin(0) = \omega_o C_1$$

وبذلك، $C_2 = u_o,\ C_1 = \dot{u}_o/\omega_o$ ، لذا يعطى الحل الكامل لاستجابة الاهتزاز الحر غير المتضائل للنظام ذي درجة الحرية المفردة بواسطة:

$$u = \frac{\dot{u}_o}{\omega_o}\sin\omega_o t + u_o \cos\omega_o t \qquad (١٢,ب)$$

وتوضح الاستجابة لمثل هذا النظام في الشكل (٧,ب).
وبالرجوع إلى المعادلة (٥,أ)، فإن يمكن التعبير عن استجابة الاهتزاز كالتالي:

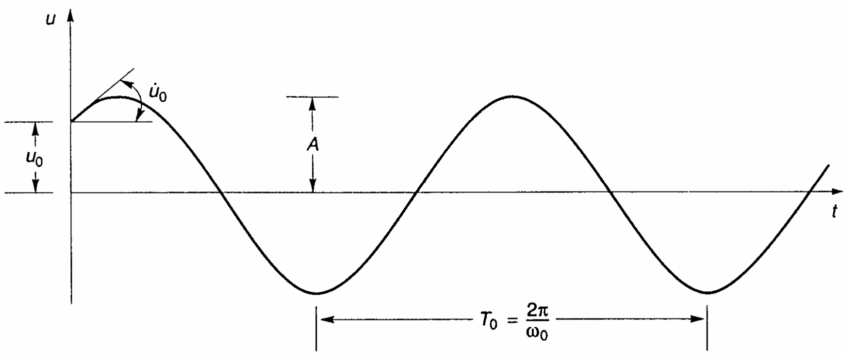
$$u = A sin(\omega_o t + \phi)$$

حيث تعطى السعة، A، وزاوية السطور، ϕ، بواسطة:

$$A = \sqrt{u_o^2 + \left(\frac{\dot{u}_o}{\omega_o}\right)^2}$$

$$\phi = tan^{-1}\frac{u_o\omega_o}{\dot{u}_o}$$

ويشير حل معادلة الحركة للنظام غير المتضائل إلى أن استجابة النظام تعتمد على إزاحته وسرعته الأولية. لاحظ أن السعة تبقى ثابتة مع الزمن. ولأنه لا يفقد طاقة في النظام غير المتضائل، فإنه سوف يتذبذب إلى الأبد. وبوضوح، فإن الأنظمة الغير متضائلة الحقيقية لا توجد في العالم الحقيقي؛ ومع ذلك يمكن أن يكون لبعض الأنظمة مثل هذا التضاؤل المنخفض بحيث إن استجابتها على الفترات القصيرة من الزمن ربما تقارب تلك للنظام غير المتضائل.

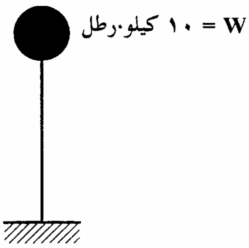


الشكل (٧,ب) التاريخ الزمني للإزاحة لاهتزاز حر غير متضائل بإزاحة أولية u_o و سرعة أولية $\dot{u}_o$.

المثال (١,ب)

يتكون المنشأ ذو درجة الحرية المفردة الموضح في الشكل المثال (١,ب)(أ) من وزن ١٠ كيلو نيوتن مدعم بعمود عديم الكتلة. وينتج تطبيق قوة أفقية ساكنة بمقدار ٥ كيلو نيوتن تشوه

قدره ٠,٠٤ بوصة. احسب (أ) التردد الدوري الطبيعي، و(ب) التردد الطبيعي للاهتزاز، و (ج) التاريخ الزمني للاستجابة إذا أزيحت القوة الأفقية بشكل مفاجئ.



الشكل المثال (١,ب)(أ)

الحــل

(أ) يشير رأس المسألة إلى أن جساءة العمود تكون:

$$k = \frac{5\ kips}{0.04\ in} = 125\ kips/in.$$

ويعطى التردد الدوري الطبيعي بواسطة:

$$\omega_o = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{(125 kips/in.)(12 in./ft)(32.2\ ft/sec^2)}{10 kips}} = 69.5\ rad/sec$$

(ب) وستكون الفترة الطبيعية:

$$T_o = \frac{2\pi}{\omega_o} = \frac{2\pi\ rad}{69.5\ rad/sec} = 0.09$$

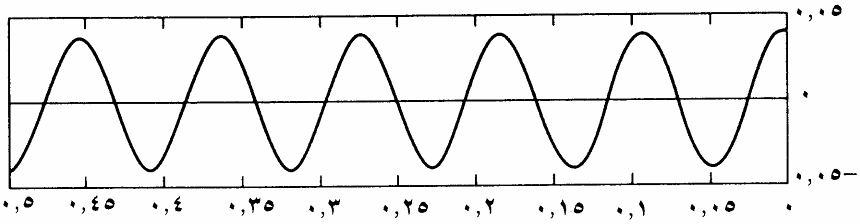
(ج) وأنتجت القوة الأفقية تشوهاً ساكناً بـ ٠,٠٤ بوصة. ونتيجة لذلك، ستكون الظروف الأولية للاهتزاز الحر

u_o = ٠,٠٤ بوصة $\dot{u}$ = ٠

وإذاً

$$u(t) = \frac{\dot{u}_o}{\omega}\sin\omega_o t + u_o\cos\omega_o t = (0.04\ in.)\cos(69.5t)$$

ورسمت الاستجابة في الشكل (المثال ب ١,ب).



الشكل المثال (١, ب)(ب)

(٥,٢,ب) الاهتزازات الحرة المتضائلة **Damped Free Vibrations**

في الأنظمة الحقيقية، ربما تفقد الطاقة كنتيجة للاحتكاك نشوء الحرارة، ومقاومة الهواء، أو أي آليات فيزيائية أخرى. وإذا سوف تتلاشى استجابة الاهتزاز الحر لنظام ذي درجة حرية المفردة متضائل مع الزمن. وللاهتزازات الحرة المتضائلة، فإن معادلة الحركة تكتب كالتالي:

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = 0 \qquad (١٤,ب)$$

أو، بواسطة القسمة على m واستبدال [من المعادلة (١٧،ب)] $k = m\omega_o^2$ ، فإننا سنحصل على:

$$\ddot{u} + 2\frac{c}{2\sqrt{km}}\omega_o u + \omega_0^2 u = o \qquad (١٥,ب)$$

والكمية $2\sqrt{km}$ ، تدعى معامل التضاؤل الحرج c_c، وتسمح بتعريف نسبة التضاؤل، ξ، كنسبة معامل التضاؤل إلى معامل التضاؤل الحرج، بحيث:

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{c}{2m\omega_o} = \frac{c\omega_0}{2k} \qquad (١٦,ب)$$

وبهذا الرمز، يمكن التعبير عن معادلة الحركة كالتالي :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_0\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \qquad (١٧,ب)$$

ويعتمد الحل لهذه المعادلة التفاضلية على قيمة نسبة التضاؤل. وعندما تكون ξ < ١٠٠% ($c_c > c$)، فإنه يقال إن النظام ضعيف التضاؤل (under-damped). وعندما تكون ξ = ١٠٠% ($c_c = c$) فإن النظام يكون متضائلاً بشكل حرج (critically-damped)، وعندما تكون ξ > ١٠٠% ($c_c < c$) فإن النظام يكون فوق متضائل (over-damped). ويجب إظهار حلول منفصلة لكل من الحالات الثلاث ، لكن تكون المنشآت ذات الأهمية في هندسة الزلازل فعلياً دائماً تحت التضاؤل الحرج.

وللحالة التي يكون فيها التضاؤل أقل من التضاؤل الحرج، يكون حل معادلة الحركة في الصيغة:

$$u = e^{-\xi\omega_o t}\left[C_1 \sin(\omega_o\sqrt{1-\xi^2}\ t) + C_2 \cos(\omega_o\sqrt{1-\xi^2}\ t)\right] \qquad (١٨,ب)$$

لاحظ أن الحد اللوغاريتمي مضروب به الحد الذي بين القوسين. يصبح هذا الحد اللوغاريثمي أصغر مع الزمن وفي النهاية يصل إلى الصفر، مشيراً إلى أن الاستجابة للنظام الأقل تضاؤلاً في الاهتزاز الحر تتلاشى لوغاريثمياً مع الزمن. ويعتمد معدل التلاشي على نسبة التضاؤل ـ ولـ ξ الصغيرة تتلاشى الاستجابة ببطء ولـ ξ الأكبر تتلاشى الاستجابة بسرعة أكبر. وبتعريف التردد الدوري الطبيعي المتضائل $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ فإنه يمكن التعبير عن الحل كالتالي:

$$u = e^{-\xi\omega_o t}\left[C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_d t\right] \qquad \text{(ب,١٩)}$$

ويكون التردد الطبيعي للنظام المتضائل دائماً أقل من ذلك للنظام غير المتضائل ، ويتناقص مع زيادة نسبة التضاؤل .

ويمكن تحديد المعاملات C_1 و C_2 من الظروف الأولية بنفس الطريقة كتلك للحالة غير المتضائلة. وتكون الإزاحة والسرعة الأولية:

$$\begin{aligned}
u_0 &= e^{-\xi\omega_o(0)}\left[C_1 \sin(0) + C_2 \cos(0)\right] = C_2 \\
\dot{u}_0 &= e^{-\xi\omega_o(0)}\left[\omega_d C_1 \cos\omega_d(0) - \omega_d C_2 \sin\omega_d(0)\right] \\
&\quad - \xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0(o)}\left[C_1 \cos\omega_d(0) + C_2 \cos\omega_d(0)\right] \\
&= \omega_d C_1 - \xi\omega_0 C_2
\end{aligned}$$

ولذلك، $C_1 = (\dot{u}_0 + \xi\omega_o u_o)/\omega_d$ ، و $C_2 = u_o$ لذا يمكن التعبير عن الحل للاهتزازات الحرة المتضائلة كالتالي:

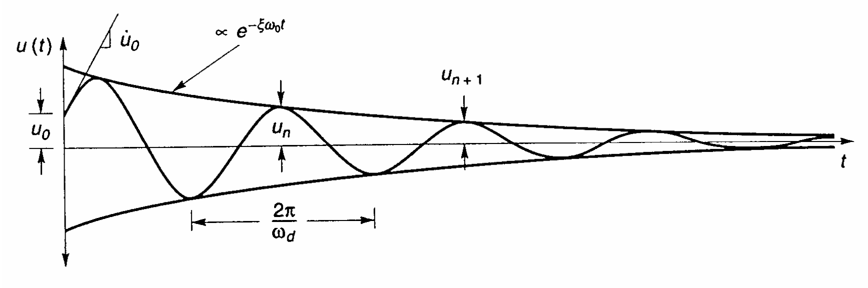
$$u = e^{-\xi\omega_o t}\left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega_o u_o}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_o \cos\omega_d t\right) \qquad \text{(ب,٢٠)}$$

وتوضح استجابة الاهتزاز الحر للنظام غير المتضائل في الشكل (٨،ب). لاحظ التلاشي اللوغاريثمي لسعة الإزاحة مع الزمن. وستكون نسبة السعات لأي قمتين متتاليتين:

$$\frac{u_n}{u_n + 1} = \exp\left(2\pi\xi\frac{\omega_o}{\omega_d}\right) \qquad \text{(ب,٢١)}$$

وبتعريف التناقص اللوغاريثمي كـ $\delta = \ln(u_n / u_{n+1})$ ؛ إذا:

$$\delta = 2\pi\xi\frac{\omega_o}{\omega_d} = \frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} \qquad \text{(ب,٢٢)}$$



الشكل (٨,ب) التاريخ الزمني لاهتزاز حر متضائل بإزاحة أولية u_o وسرعة أولية $\dot{u}_0$.

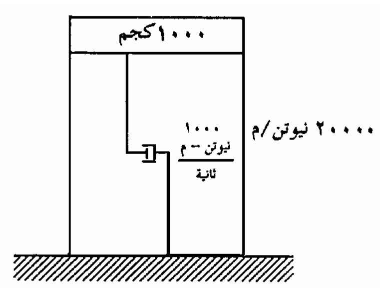
وتسمح إعادة الترتيب بتحديد نسبة التضاؤل من التناقص اللوغاريثمي:

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} \qquad \text{(ب,٢٣)}$$

ولقيم صغيرة لـ δ، $\xi \approx \delta / 2\pi$. لذا تكون الطريقة البسيطة لتقدير نسبة التضاؤل لنظام حر من الدرجة الأولى هي إجراء تجربة اهتزاز حر، والتي يقاس فيها التناقص اللوغاريثمي عندما يزاح النظام ببعض الإزاحة الأولية،u_o، ويطلق بسرعة أولية $\dot{u}_o =$ ٠.

المثال (٢,ب)

أطلق المنشأ الموضح في الشكل المثال (٢,ب)(أ) من إزاحة أولية بـ ١ سم وبسرعة أولية -٥ سم / ثانية . احسب (أ) التردد الطبيعي و (ب) التاريخ الزمني للاستجابة للكتلة .



الشكل المثال (٢,ب)(أ)

الحـــل

(أ) يكون التردد الطبيعي غير المتضائل:

$$f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{20000\ N/m}{1000\ kg}} = 0.71\ Hz$$

وتكون نسبة التضاؤل:

$$\xi = \frac{c}{2\sqrt{km}} = \frac{1000\ N-m/sec}{2\sqrt{(20000\ N/m)(1000\ kg)}} = 0.118$$

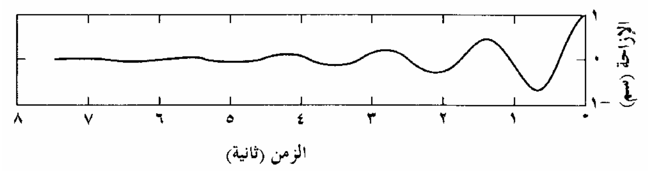
إذاً:

$$f_d = f_o\sqrt{1-\xi^2} = (0.71\ Hz)\sqrt{1-(0.118)^2} = 0.70\ Hz$$

(ب) وستكون الترددات الدورية الطبيعية الغير متضائلة والمتضائلة $\omega_o = 2\pi f_o =$ ٤,٤٧راديان / ثانية و $\omega_d = 2\pi f_d =$ ٤,٤٤ راديان / ثانية، على التوالي. ومن المعادلة (٢٠,ب) تكون استجابة الإزاحة:

$$\begin{aligned} u &= e^{-\xi\omega_o t}\left(\frac{\dot{u}_o + \xi\omega_o u_o}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_o\cos\omega_d t\right) \\ &= exp[-(0.118)(4.47)t]\left[\frac{-0.05+(0.118)(4.47)(0.01)}{4.44}sin(4.44t)+(1)cos(4.44t)\right] \\ &= e^{-0.527t}\left[cos(4.44t) - 0.010\,sin(4.44t)\right] \end{aligned}$$

والتي رسمت كما في الشكل المثال (٢, ب)(ب).



الشكل المثال (٢, ب)(ب)

(٥,٣,ب) استجابة أنظمة الحرية من الدرجة الأولى للتحميل التوافقي

Response of SDOF System to Harmonic Loading

يقال إن الأنظمة الحرة من الدرجة الأولى تقع تحت الاهتزاز المفروض عندما يؤثر فيها بواسطة بعض القوة الديناميكية الخارجية، $Q(t)$. وربما تأتي الأحمال الديناميكية من مصادر مختلفة وربما تكون دورية أو غير دورية. ولمسائل ديناميكيا التربة والمنشآت، تكون الاستجابة للتحميل التوافقي مهمة جداً. إحدى صيغ التحميل الدوري التوافقي البسيطة $Q(t)$ يمكن أن يعبر عنها بـ $Q(t)=Q_O \sin\omega t$، حيث Q_O سعة الحمل التوافقي و $\bar{\omega}$ التردد الدوري الذي يطبق عنده الحمل.

(٥,٣,١ ،ب)الاهتزازات المفروضة غير المتضائلة **Undamped Forced Vibration**

تكون معادلة الحركة للنظام غير المتضائل المعرض لمثل هذا التحميل التوافقي البسيط:

$$m\ddot{u} + ku = Q_o \sin \bar{\omega} t \qquad (٢٤,ب)$$

ويعطى الحل العام لهذه المعادلة للحركة بواسطة مجموع الحل المكمل (complementary solution) (للحالة المتجانسة التي يكون فيها الجانب الأيمن من المعادلة صفراً) والحل الخاص (particular solution) [والذي يجب أن يحقق الجانب الأيمن من المعادلة (٢٤,ب)].

وتكون المعادلة المتجانسة:

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

لذا يكون الحل المتمم هو ببساطة الحل لمسألة الاهتزاز الحر غير المتضائل:

$$u_c(t) = C_1 \sin \omega_o t + C_2 \cos \omega_o t \qquad (٢٥,ب)$$

ويكون الجزء من الاستجابة الموصوف بالحل المتمم هو الذي ينتج من الظروف الأولية للنظام، ويتكون من تذبذب توافقي بسيط عند التردد الطبيعي غير المتضائل للنظام .

ويصف الحل الجزئي الجزء من الاستجابة المحدث بواسطة التحميل الخارجي. ويمكن أن يفترض هذا الجزء من الاستجابة ليكون بنفس الصيغة ويكون في طور مع التحميل الدوري؛ وهكذا:

$$u_p(t) = U_0 \sin\overline{\omega}t \qquad (ب,٢٦)$$

حيث U_o سعة الاستجابة التوافقية. وبالتعويض بالمعادلة (٢٦،ب) في المعادلة (٢٤،ب) ينتج:

$$-m\overline{\omega}^2 U_o \sin\overline{\omega}t + kU_o \sin\overline{\omega}t = Q_o \sin\overline{\omega}t \qquad (ب,٢٧)$$

وبالتعويض بـ $\omega_o^2 = k/m$ تعطى إعادة الترتيب:

$$U_0 = \frac{Q_o/k}{1-\overline{\omega}^2/\omega_o^2} = \frac{Q_o/k}{1-\beta^2} \qquad (ب,٢٨)$$

حيث $\beta = \overline{\omega}/\omega_o$ تعود إلى نسبة التشويش (tuning ratio) . والآن يمكن إظهار الحل العام لمعادلة الحركة بجمع الحل المتمم والحل الخاص:

$$u(t) = u_c(t) + u_p(t) = C_1 \sin\omega_o t + C_2 \cos\omega_o t + \frac{Q_o/k}{1-\beta^2}\sin\overline{\omega}t \qquad (ب,٢٩)$$

ويجب أن يحقق الحل العام الظروف الأولية. ومن المعادلة (٢٩،ب)، يمكن كتابة السرعة كالتالي:

$$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \omega_o C_1 \cos\omega_o t - \omega_o C_2 \sin\omega_o t + \overline{\omega}\frac{Q_o/k}{1-\beta^2}\cos\overline{\omega}t \qquad (ب,٣٠)$$

ولإزاحة أولية معطاة، u_o، وسرعة أولية، $\dot{u}_o$:

$$u_o = C_1 \sin\omega_o(0) + C_2 \cos\omega_o(0) + \frac{Q_o/k}{1-\beta^2}\sin\overline{\omega}(0) = C_2 \qquad (ب,٣١)$$

و :

$$\begin{aligned} \dot{u}_o &= \omega_o C_1 \cos\omega_o(0) - \omega_o C_2 \sin\omega_o(0) + \overline{\omega}\frac{Q_o/k}{1-\beta^2}\cos\overline{\omega}(0) \\ &= \omega_o C_1 + \overline{\omega}\frac{Q_o/k}{1-\beta^2} \end{aligned} \qquad (ب,٣٢)$$

والتي منها :

$$C_1 = \frac{\dot{u}_o - \overline{\omega}\left[(Q_o/k)/(1-\beta^2)\right]}{\omega_o} = \frac{\dot{u}_o}{\omega_o} - \frac{Q_o\beta}{k(1-\beta^2)} \qquad (ب,٣٣)$$

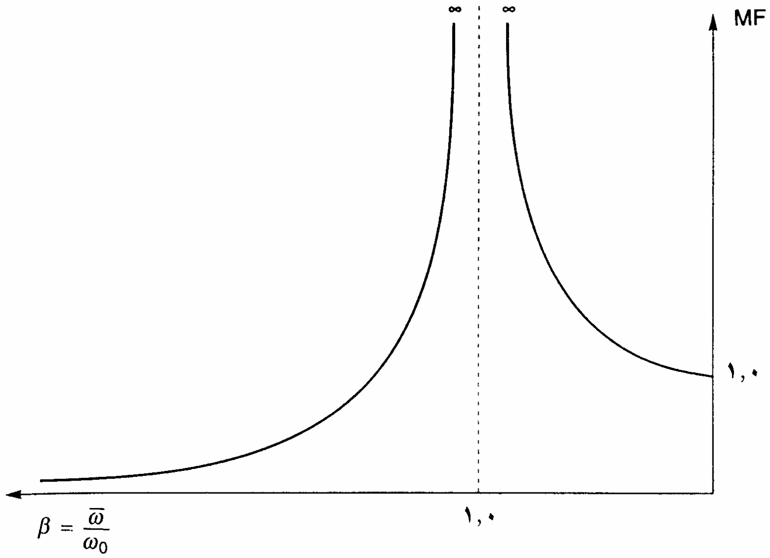
ويمكن الآن كتابة الاستجابة العامة كالتالي:

$$u = \left[\frac{\dot{u}_o}{\omega_o} - \frac{Q_o\beta}{k(1-\beta^2)}\right]\sin\omega_o t + u_o \cos\omega_o t + \frac{Q_o/k}{1-\beta^2}\sin\overline{\omega}t \qquad (ب,٣٤)$$

وإنه من الممتع اعتبار الحالة التي يكون فيها النظام أوليا عند الراحة في موضع اتزانه، (بمعنى، $u_o = \dot{u}_o = 0$) . ولهذه الحالة تعطى الاستجابة بواسطة :

$$u = \frac{Q_o}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin\overline{\omega}t - \beta\sin\omega_o t) \qquad (ب,٣٥)$$

والتي تشير إلى أن للاستجابة مركبتين . مركبة تظهر كاستجابة للتحميل المطبق وتظهر عند تردد التحميل المطبق. والأخرى تكون تأثير اهتزاز حر محدث بواسطة الظروف الأولية؛ إنها تظهر عند التردد الطبيعي للنظام. وإنه من المفيد أن تدرك أن الحد Q_o/k في المعادلة (٣٥,ب) يمثل إزاحة الكتلة التي يمكن أن تحدث إذا طبق الحمل بشكل ساكن. ويمكن إذن أن يفكر في الحد $[1/(1-\beta^2)]$ كعامل تكبير يصف الكمية التي تكبر بها سعة الإزاحة الساكنة بواسطة الحمل التوافقي. ويتغير عامل التكبير مع نسبة التشويش، β، كما هو موضح في الشكل (٩,ب). لاحظ أن



الشكل (٩,ب) تغير معامل التكبير مع نسبة التشويش لنظام ذي حرية من الدرجة الأولى غير متضائل.

سعة الإزاحة تكون أكبر من الإزاحة الساكنة لترددات تحميل أقل من $\sqrt{2}\,\omega_o$. وعند ترددات تحميل أعلى، تكون سعة الإزاحة أقل من الإزاحة الساكنة ويمكن أن تصبح صغيرة جداً عند ترددات أعلى. ومع ذلك، تصبح الاستجابة للنظام الحر من الدرجة الأولى غير المتضائل كبيرة جداً كلما قربت $\overline{\omega}$ من ω_o. وعندما يطبق التحميل التوافقي عند التردد الطبيعي لنظام حر من الدرجة الأولى غير متضائل، فإن الاستجابة تذهب إلى ما لانهاية مشيرة إلى الرنين للنظام. وبرغم ذلك، فإن الأنظمة الغير متضائلة لا توجد بشكل حقيقي، فإنه لا يمكن أبدا إنجاز الرنين بشكل حقيقي. وتكون فكرة نسبة التشويش التي تربط تردد التحميل بالتردد الطبيعي للنظام مهمة، كدليل بواسطة تأثيرها القوى في الاستجابة.

مثال (٣,ب)

من الحالة الساكنة الأولية، عرض النظام الحر من الدرجة الأولى غير المتضائل للمثال ١,ب لتسارع قاعدة توافقي بـ ٠,٢٠ g عند تردد بـ ٢ هيرتز. احسب الاستجابة للنظام

الحـــل

وبالتعبير عن حركة القاعدة كالتالي:

$$\ddot{u}_g(t) = (0.2)(32.2\ ft/sec^2)\sin 4\pi t = 6.44 \sin 4\pi t$$

فإن القوة الخارجية المكافئة ستكون :

$$Q(t) = -\frac{W}{g}\ddot{u}_g(t) = -\frac{10{,}000\ lb}{32.2\ \ ft/sec^2}(6.44\ \ ft/sec^2)\sin 4\pi t = -(2000\ lb)\sin 4\pi t$$

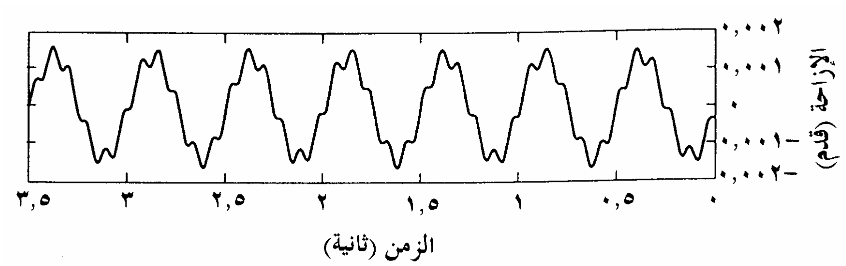
وستكون نسبة التشويش:

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega_o} = \frac{2\pi \overline{f}}{\omega_o} = \frac{2\pi(2)}{69.5} = 0.181$$

وإذا، من المعادلة (٣٥,ب)،

$$\begin{aligned} u(t) &= \frac{Q_o}{k}\frac{1}{1-\beta^2}(\sin \overline{\omega} t - \beta \sin \omega_o t) \\ &= \frac{-2\ kips}{1500\ kips/\ ft}\frac{1}{1-(0.181)^2}\left[\sin 4\pi t - 0.181 \sin(69.5t)\right] \\ &= 0.00138 \sin 4\pi t - 0.00025 \sin 69.5t \end{aligned}$$

والذي رسم في الشكل (المثال ٣,ب).



الشكل (المثال ٣,ب)

(٥,٣,٢,ب) الاهتزازات المفروضة المتضائلة Damped Forced Vibrations

أعم حالة هي النظام المتضائل المعرض لتحميل توافقي مفروض. ويمكن اعتبار كل من الحالات الثلاث السابقة كحالة جزئية لهذه الحالة حيث يمكن إظهار معادلاتها للحركة بواسطة إعداد حدود مختلفة لمعادلة الحركة للاهتزازات المفروضة المتضائلة الموضحة تحت الصفر. وتكون معادلة الحركة للنظام الحر من الدرجة الأولى المتضائل معروضة لتحميل توافقي بسيط بالصيغة $Q(t) = Q_o \sin \varpi t$

$$m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = Q_o \sin \varpi t \qquad (\text{ب},٣٦)$$

وبعد القسمة على m واستعمال العلائق $\xi = c/2m\omega_o$ و $\omega_o^2 = k/m$ يمكن إعادة كتابة المعادلة (٣٦,ب) كالتالي :

$$\ddot{u} + 2\xi\omega_o\dot{u} + \omega_o^2 u = \frac{Q_o}{m}\sin \varpi t \qquad (\text{ب},٣٧)$$

ويمثل الحل المتمم استجابة الاهتزاز الحر المتضائل، والذي عبر للنظام المنخفض التضاؤل بواسطة المعادلة (١٩,ب)

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t}(C_1\omega_d t + C_2 \cos \omega_d t)$$

وحيث إن الاستجابة للنظام الحر من الدرجة الأولى عموماً تكون خارج الطور مع التحميل الخارجي، فإن الحل الجزئي التوافقي بالصيغة:

$$u_p(t) = C_3 \sin \varpi t + C_4 \cos \varpi t \qquad (\text{ب},٣٨)(\text{أ})$$

يمكن أن يفترض. وتكون السرعة والتسارع المطابقة:

$$\dot{u}_p(t) = C_3\varpi \cos \varpi t - C_4\varpi \sin \varpi t \qquad (\text{ب},٣٨)(\text{ب})$$

$$\ddot{u}_p(t) = -\varpi^2 C_3 \sin \varpi t - \varpi^2 C_4 \cos \varpi t \qquad (\text{ب},٣٨)(\text{ج})$$

ويعطى التعويض بالمعادلات (٣٨,ب) في معادلة الحركة [المعادلة (٣٧,ب)] وتجميع الحدود $\sin \varpi t$ و $\cos \varpi t$

$$(C_3\omega_o^2 - C_3\varpi^2 - 2\xi\omega_o C_4\varpi)\sin \varpi t + (C_4\omega_o^2 - C_4\varpi^2 + C_3\varpi\, 2\xi\omega_o)\cos \varpi t = \frac{Q_o}{m}\sin \varpi t \qquad (\text{ب},٣٩)$$

الآن، في اللحظة عندما تكون $\varpi t = 0 + n\pi$ (حيث n أي قيمة صحيحة)، $\sin \varpi t =$ ٠، و $\cos \varpi t =$ ١. وبهذا يجب أن تحقق المعادلة:

$$C_4\omega_o^2 - C_4\varpi^2 + C_3\varpi 2\xi\omega_o = 0 \qquad (\text{ب},٤٠)(\text{أ})$$

وكذلك، عند $\varpi t = \pi/2 + n\pi$، $\cos \varpi t =$ ٠ و $\sin \varpi t =$ ١ والذي يعني أن:

$$C_3\omega_o^2 - C_3\varpi^2 - 2\xi\omega_o C_4\varpi = \frac{Q_o}{m} \qquad (\text{ب},٤٠)(\text{ب})$$

يجب أيضا أن تتحقق. والمعادلات (٤٠,ب) تمثل معادلتين متتاليتين بمجهولين C_3 و C_4. وبالحل للمجهولين ينتج:

$$C_3 = \frac{Q_o}{k} \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \qquad \text{(٤١,ب)(أ)}$$

$$C_4 = \frac{Q_o}{k} \frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \qquad \text{(٤١,ب)(ب)}$$

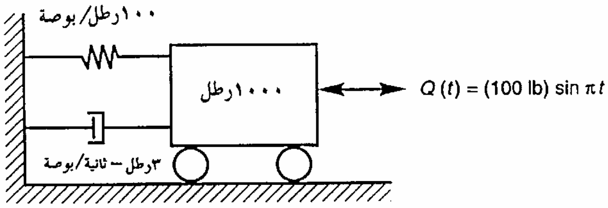
والحل العام لمعادلة الحركة للاهتزاز المجبر المتضائل يمكن الآن أن يظهر بواسطة جمع الحلين المتمم والخاص:

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\xi\omega_o t}(C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_d t) \\ &+ \frac{Q_o}{k} \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\overline{\omega}t - 2\xi\beta\cos\overline{\omega}t\right] \end{aligned} \qquad \text{(٤٢,ب)}$$

حيث تعتمد C_1 و C_2 على الظروف الأولية. وتوجد عدة خصائص مهمة لهذا الحل. لاحظ أن الحل المتمم (والذي يمثل تأثيرات الظروف الأولية) يتناقص مع الزمن. ولذا يصف الحل المتمم الاستجابة الانتقالية (transient response) المحدثة بواسطة متطلبات تحقيق الظروف الأولية. وبعد أن تموت الاستجابة الانتقالية، تبقى فقط استجابة الحالة المستقرة (steady - state response) الموصوفة بواسطة الحل الجزئي. وتظهر استجابة الحالة المستقرة عند التردد للتحميل التوافقي المطبق، لكن تكون خارج الطور مع التحميل.

المثال (٤,ب)

يكون النظام الحر من الدرجة الأولى الموضح في الشكل (المثال أ٤,ب) عند الراحة عندما يطبق الحمل الجيبي. حدد الحركة الانتقالية، وحركة الحالة المستقرة، والحركة الكلية للنظام.



الشكل (المثال ٤,ب)(أ)

الحـــل

من المعادلة (٤٢,ب)، تعطى الاستجابة الكلية بواسطة:

$$u(t) = e^{-\xi\omega_o t}(C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_d t)$$
$$+\frac{Q_o}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\overline{\omega}t - 2\xi\beta\cos\overline{\omega}t\right]$$

ولإزاحة أولية مساوية للصفر:

$$u(t=0)=0$$
$$= e^{-\xi\omega_o(0)}\left[C_1 \sin\omega_d(0) + C_2\cos\omega_d(0)\right]$$
$$+\frac{Q_o}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\overline{\omega}(0) - 2\xi\beta\cos\overline{\omega}(0)\right]$$
$$= C_2 + \frac{Q_o}{k}\frac{-2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

أو:

$$C_2 = \frac{Q_o}{k}\frac{2\xi\beta}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

وللسرعة الأولية المساوية للصفر:

$$\dot{u} = 0$$
$$= \omega_d^{-\xi\omega_o(0)}\left[C_1\cos\omega_d(0) - C_2\sin\omega_d(0)\right] - \xi\omega_o e^{-\xi\omega_o t}\left[C_1\sin\omega_d(0) - C_2\cos\omega_d(0)\right]$$
$$+\frac{Q_o}{k}\frac{\overline{\omega}}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\cos\overline{\omega}(0) + 2\xi\beta\sin\overline{\omega}(0)\right]$$
$$= \omega_d C_1 - \xi\omega_o C_2 + \frac{Q_o}{k}\frac{\overline{\omega}(1-\beta^2)}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

أو:

$$C_1 = \frac{Q_o}{k}\frac{\overline{\omega}}{\omega_d}\frac{\beta^2-1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}$$

وإذا تعطى الحركة الانتقالية بواسطة:

$$u_c(t) = \frac{Q_o}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}e^{-\xi\omega_o t}\left[\frac{\overline{\omega}}{\omega_d}(\beta^2+2\xi^2-1)\sin\omega_d t + 2\xi\beta\cos\omega_d t\right]$$

وتعطى الحركة للحالة المستقرة بواسطة:

$$u_p(t) = \frac{Q_o}{k}\frac{1}{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}\left[(1-\beta^2)\sin\overline{\omega}t - 2\xi\beta\cos\overline{\omega}t\right]$$

وتكون الحركة الكلية هي مجموع كل من الحركة الانتقالية وحركة الحالة المستقرة. وللنظام الموضح في الشكل (المثال ١,ب)(أ):

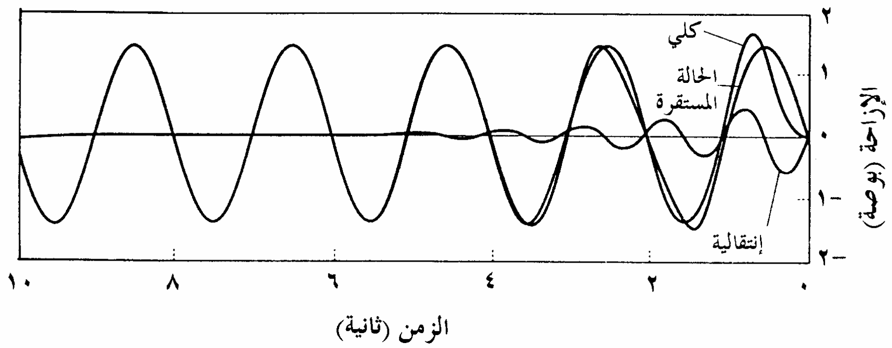
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{kg}{W}} = \sqrt{\frac{(100\ lb/in.)(12\ in./\ ft)(32.2\ ft/sec/sec)}{1000\ lb}} = 6.22\ rad/sec$$

$$\xi = \frac{c}{2m\omega_o} = \frac{cg}{2W\omega_o} = \frac{(3\ lb-sec/in.)(12\ in./\ ft)(32.2\ ft/sec/sec)}{2(1000\ lb)(6.22\ rad/sec)} = 0.093$$

$$\omega_d = \omega_o\sqrt{1-\xi^2} = \sqrt{1-(0.092)^2} = 6.19\ rad/sec$$

$$\beta = \frac{\overline{\omega}}{\omega_o} = \frac{\pi\ rad/sec}{6.22\ rad/sec} = 0.505$$

ويعطي التعويض بهذه القيم في الحلول الاستجابة الموضحة في الشكل (المثال٤,ب)(ب).



الشكل (المثال ب٤,ب)

ويمكن أيضا وصف الاستجابة للحالة المستقرة بواسطة:

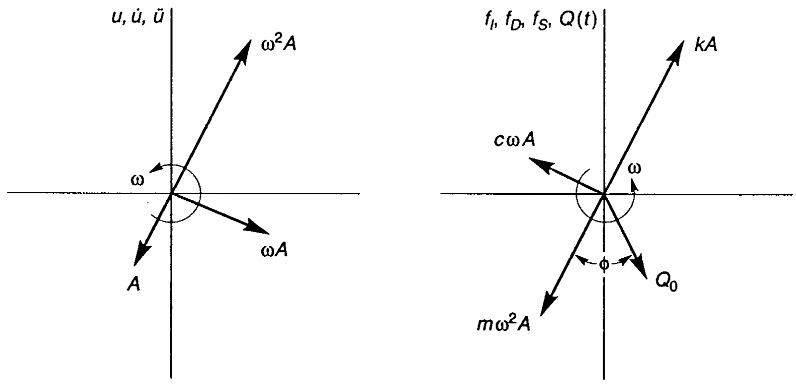
$$u = A\sin(\overline{\omega}t+\phi)$$

وحيث:

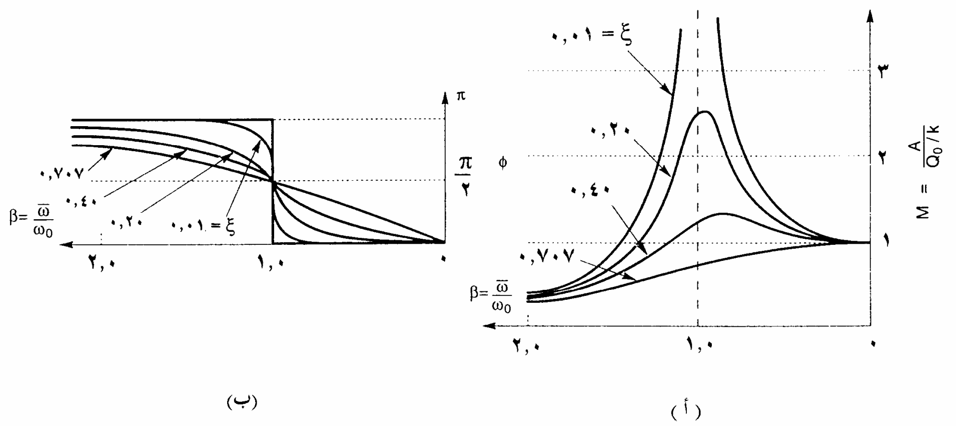
$$A = \frac{Q_o}{k}\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\xi\beta)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(-\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

ويمكن تمييز استجابة الحالة المستقرة بمساعدة المتجهات الدوارة، للاستجابة وللقوى المحدثة في النظام، كما هو موضح في الشكل (١٠,ب). لاحظ أن قوى الزنبرك، والنبيطة، والقصور الذاتي المؤثرة عكس متجهات الإزاحة، والسرعة، والتسارع، وأن الإزاحة تتأخر عن متجه التحميل المطبق بواسطة زاوية الطور السالبة، ϕ . وللتحميل التوافقي تتغير زاوية الطور مع كل من نسبة التضاؤل ونسبة التشويش، كما هو موضح في الشكل (١١,ب)(أ).



الشكل (١٠,ب) تمثيل منجه الدوران للاستجابة والقوى في نظام مهتز ذي حرية من الدرجة الأولى.



الشكل (١١,ب) تغير (أ) معامل التضخم، و (ب) زاوية الطور مع نسبة التضاؤل ونسبة التشويش.

ويمكن تمثيل تأثير نسبة التشويش بواسطة استعمال معامل التضخم، عُرف مرة أخرى كنسبة السعة إلى الإزاحة الساكنة .

$$M = \frac{A}{Q_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad (ب,٤٤)$$

ويوضح تغير معامل التضخم مع نسبة التشويش ونسبة التضاؤل في الشكل (ب١١,ب). وتؤثر نسبة التضاؤل في معامل التضخم الذروة وأيضا تغير معامل التضخم مع التردد. وتتسع منحنيات

معامل التضخيم مع زيادة نسبة التضاؤل. لاحظ أن التضخيم غير محصور (رنين) فقط ξ = ٠ و β = ١. وللتضاؤل الغير صفري، يوجد تضخيم أعلى، M_{max}:

$$M_{max} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} \qquad (٤٥,ب)$$

وحيث تظهر عندما تكون نسبة التشويش $\beta = \sqrt{1-2\xi^2}$. وبتحكم في شكل منحنى التضخيم بشكل واضح بواسطة نسبة التضاؤل. وبالرغم من أن النظام ذا التضاؤل المنخفض ربما ينتج تضخيم كبيراً عند نسبة تضاؤل قريبة من ١، فإنه سوف يظهر تضخيم مهماً على نطاق أصغر من الترددات من تلك للنظام ذي التضاؤل الأعلى.

(ب,٥,٤) استجابة الأنظمة ذات الحرية من الدرجة الأولى للتحميل الدوري

Response of SDOF systems to Periodic Loading

يمكن أن تستعمل الحلول للاستجابة لنظام ذي حرية من الدرجة الأولى للتحميل التوافقي المطور في الجزء السابق لتطوير الحلول للحالة الأكثر عمومية للتحميل الدوري. وكما هو موضح في الملحق أ، يمكن أن يقرب التحميل الدوري بواسطة سلسلة فوريية (بمعنى، كمجموع لسلسلة من الأحمال التوافقية) . وتكون استجابة النظام ذي الحرية من الدرجة الأولى للتحميل الدوري، باستعمال قاعدة التراكب، ببساطة مجموع الاستجابات لكل حد في سلسلة التحميل. ويمكن أن تجرى الحسابات المطلوبة باستعمال الرمز المثلثي أو الأسي.

(ب,٥,٤,١) الرمز المثلثي **Trigonometric Notation**

من المعادلة (١١,أ) يمكن التعبير عن التحميل الدوري، $Q(t)$، بواسطة سلسلة فوريية:

$$Q(t) = a_o + \sum_{n-1}^{\infty} a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t$$

حيث تكون معاملات فوريية:

$$a_o = \frac{1}{T_f}\int_0^{T_f} Q(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_f}\int_0^{T_f} Q(t)\cos\omega_n t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_f}\int_0^{T_f} Q(t)\sin\omega_n t dt$$

و $\omega_n = 2\pi n/T_f$. وباستعمال جزء الحالة المستقرة للمعادلة (٤٢,ب)، تكون الاستجابة لكل حد جيبي في سلسلة فوريية:

$$u_{n,\sin}(t) = \frac{b_n}{k}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}\left[(1-\beta_n^2)\sin\overline{\omega}t - 2\xi\beta_n\cos\overline{\omega}t\right]$$

حيث $\beta_n=\omega_n T_f /2\pi$. وبنفس الطريقة، يمكن توضيح الاستجابة للحالة المستقرة لكل حد جيب تمام لتكون:

$$u_{n,\cos}(t)=\frac{a_n}{k}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\left[(1-\beta_n^2)\cos\overline{\omega}t+2\xi\beta_n\sin\overline{\omega}t\right]$$

وحيث إن الاستجابة للحالة المستقرة لحد الحمل الثابت تكون الإزاحة الساكنة، $u_o=a_o/k$، فإن استجابة الحالة المستقرة الكلية تعطى بواسطة:

$$\begin{aligned} u(t)&=u_o+\sum_{n=1}^{\infty}u_{n,\sin}(t)+u_{n,\cos}(t)\\ &=\frac{1}{k}\left(\begin{aligned}&a_o+\sum_{n=1}\frac{1}{(1-\beta_n^2)^2+(2\xi\beta_n)^2}\left\{\left[a_n2\xi\beta_n+b_n(1-\beta_n^2)\right]\sin\omega_n t\right.\\ &\left.+\left[a_n(1-\beta_n^2)-b_n2\xi\beta_n\right]\cos\omega_n t\right\}\end{aligned}\right)\end{aligned} \quad (ب,٤٦)$$

(ب,٥,٤,٢) الرمز الأسي Exponential Notation

يمكن أيضاً وصف التحميل الدوري بواسطة سلسلة فورييه في الصيغة الأسية. وباستعمال المعادلة (١٥,أ)، يمكن التعبير عن التحميل الدوري كالتالي:

$$Q(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}q_n^*e^{i\omega_n t}$$

ويمكن تحديد معاملات فورييه المركبة: مباشرة من $Q(t)$ كالتالي

$$q_n^*=\frac{1}{T_f}\int_0^{T_f}Q(t)e^{-i\omega_n t}dt$$

وتغطي استجابة النظام ذي الحرية من الدرجة الأولى المحمل بواسطة الحد n التوافقي بواسطة معادلة الحركة:

$$m\ddot{u}_n(t)+(c\dot{u}_n(t)+ku_n(t))=q_n^*e^{i\omega_n t} \quad (ب,٤٧)$$

ويمكن أن ترتبط استجابة النظام بالتحميل بواسطة:

$$u_n(t)=H(\omega_n)q_n^*e^{i\omega_n t} \quad (ب,٤٨)$$

حيث $H(\omega_n)$ دالة التحويل [بمعنى، الدالة التي تربط معاملاً واحداً (في هذه الحالة إزاحة المتذبذب) بآخر (الحمل الخارجي)]. ويعطى التعويض بالمعادلة (٤٨,ب) في معادلة الحركة:

$$-m\omega_n^2H(\omega_n)q_n^*e^{i\omega_n t}+ic\omega_nH(\omega_n)q_n^*e^{i\omega_n t}+kH(\omega_n)q_n^*e^{i\omega_n t}=q_n^*e^{i\omega_n t}$$

أو:

$$H(\omega_n)=\frac{1}{-m\omega_n^2+ic\omega_n+k}=\frac{1}{k(-\beta_n^2+2i\beta_n\xi+1)} \quad (ب,٤٩)$$

حيث $A^*=a+ib=Ae^{i\theta}$ ، حيث المعامل، $A=\sqrt{a^2+b^2}$ ، و المتغير، $\theta=tan^{-1(b/a)}$ ، فإنه يمكن كتابة دالة التحويل كالتالي:

$$H(\omega_n) = \frac{1/k}{\sqrt{(1-\beta_n^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}} \exp\left(i \tan^{-1} \frac{2\xi\beta_n}{\beta_n^2 - 1} \right)$$

لاحظ العلاقة القريبة بين معامل دالة التحويل ومعامل التضخم للمعادلة (ب,٤٤). ولأنه يمكن استعمال دالة التحويل لأي تردد في السلسلة، فإن قاعدة التراكب تعطي الاستجابة الكلية كالتالي :

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} H(\omega_n)\, q_n^* e^{i\omega_n t} \qquad \text{(ب,٥٠)}$$

ويمكن تطوير عدد من دوال التحويل. وعلى سبيل المثال، يمكن تطوير دالة التحويل التي تربط تسارع النظام ذي الحرية من الدرجة الأولى بالحمل الخارجي فقط بسهولة. وتكمن مميزات طريقة دالة التحويل في بساطتها وسهولتها التي تسمح بحساب الاستجابة لأنماط التحميل المعقد.

وربما بنظر إلى دالة التحويل كالمرشح الذي يؤثر في بعض الإشارة المعطاة لإنتاج إشارة خارجة. وفي الحالة التي اعتبرت مؤخراً، فإن الإشارة المدخلة كانت التاريخ الزمني للتحميل، $Q(t)$، والمخرجة كانت الإزاحة، $u(t)$. وإذا كان للإشارة المدخلة سعة فورييه وأطياف طوريه، $F_i(\omega_n)$ و $\phi_i(\omega_n)$، فإن طيف سعة فورييه للإشارة المخرجة سيعطى بواسطة:

$$F_o(\omega_n) = H(\omega_n) F_i(\omega_n) \qquad \text{(ب,٥١)(أ)}$$

$$\phi_o(\omega_n) = H(\omega_n) \phi_i(\omega_n) \qquad \text{(ب,٥١)(ب)}$$

وهكذا يمكن تلخيص خطوات تحليل فورييه لاستجابة نظام ذي حرية من الدرجة الأولى في الخطوات التالية :

١- أظهر سلسلة فورييه للتحميل المطبق (أو حركة القاعدة). ويعمل ذلك، يعبر عن الحمل (أو حركة القاعدة) كدالة في التردد بدلاً من الدالة في الزمن.
٢- اضرب معاملات سلسلة فورييه بالقيمة الملائمة لدالة التحويل عند كل تردد، ω_n. وهذا سينتج سلسلة فورييه للحركة الناتجة .
٣- عبر عن الحركة الناتجة بالمدى الزمني بإظهار معكوس محول فورييه للحركة الناتجة.

إنها بدقة هي هذه الطريقة التي تكون منحنى العمود الفقري لعدد من أكثر الطرق الشائعة الاستعمال لتحليل الاستجابة الأرضية والتداخل بين المنشأ والتربة. وطرحت هذه الطرق في الفصل.

(ب,٥,٥) استجابة الأنظمة ذات الحرية من الدرجة الأولى للتحميل العام

Response of SDOF System to General Loading

ليس كل التحميل توافقيا أو حتى دورياً. ولتحديد استجابة الأنظمة ذات الحرية من الدرجة الأولى لظروف التحميل العامة، يتطلب حل أكثر عمومية لمعادلة الحركة.

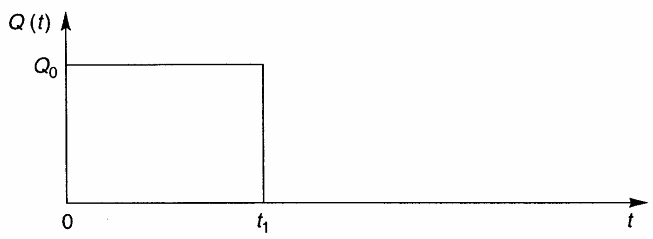
(١,٥,٥,ب) الاستجابة لتحميل الخطوة Response to Step Loading

اعتبر النظـام ذا حرية من الدرجة الأولى المتضائل المعرض لحمل خطوة بكثافة، Q_O، والذي يطبق لحظياً عند $t = 0$ ويرى لحظياً عند $t = t_1$ كما هو موضح في الشكل (١٢,ب). و لـ $t \geq t_1$، يصف الحل المتمم لمعادلة الحركة لهذا النظام [المعادلة (١٩,ب)]:

$$u_c(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left[C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_d t\right]$$

الاستجابة الانتقالية للنظام. وتعطي معادلة الحركة لظرف الحالة المستقرة بواسطة:

$$m\ddot{u}_p + c\dot{u}_p + ku_p = Q_o$$



الشكل (١٢,ب) التاريخ الزمني لتحميل الخطوة.

وحيث إن الحمل المطبق لا يتغير مع الزمن، فإن استجابة الحالة المستقرة ستكون إزاحة ثابتة:

$$u_p(t) = \frac{Q_o}{k}$$

ويمكن إذا كتابة الحل العام لمسألة تحميل الخطوة لـ $t \geq t_1$ كالتالي:

$$u(t) = \frac{Q_o}{k} + e^{-\xi\omega_o t}\left(C_1 \sin\omega_d t + C_2 \cos\omega_d t\right) \qquad (٥٢,ب)$$

باهتزاز حر يظهر عند $t < t_1$ (عندما لا يطبق حمل خارجي). وتحدد الثوابت بواسطة الظروف الأولية، u_o و $\dot{u}_o$. و عند $t = 0$:

$$u_o = \frac{Q_o}{k} + e^{-\xi\omega_o(0)}\left[C_1 \sin\omega_d(0) + C_2 \cos\omega_d(0)\right] = \frac{Q_0}{k} + C_2$$

$$\dot{u}_o = e^{-\xi\omega_o(0)}\left[\omega_d C_1 \cos\omega_d(O) - \omega_d C_2 \sin\omega_d(o)\right]$$
$$-\xi\omega_o e^{-\xi\omega(0)}\left[C_1 \sin\omega_d(0) + C_2 \cos\omega_d(0)\right] = \omega_d C_1 - \xi\omega_o C_2$$

ومنه:

$$C_1 = \frac{\dot{u}_o + \xi\omega_o(u_o - Q_o/k)}{\omega_d}$$

$$C_2 = u_o - \frac{Q_o}{k}$$

لذلك:

$$u(t)=\frac{Q_o}{k}+e^{-\xi\omega_0 t}\left[\frac{\dot{u}_o+\xi\omega_o(u_o-Q_o/k)}{\omega_d}\sin\omega_d t+\left(u_o-\frac{Q_o}{k}\right)\cos\omega_d t\right] \quad \text{(ب,٥٣)}$$

تصف الاستجابة للنظام حتى بداية الاهتزاز الحر عند $t = t_1$.

(ب,٢,٥,٥) نبضة ديراك Dirac Pulse

يمكن وصف نوع محدد من تحميل الخطوة باستخدام دالة دلتا ديراك. وتكون دالة دلتا ديراك هي الواحدة التي تكون قيمتها صفراً عند كل قيم u ماعدا واحدة فقط قيمة واحدة تصل عندها إلى مالا نهاية بطريقة ما بحيث تكون فيها المساحة تحت الدالة تساوي واحداً. ورياضياً، تحقق دالة دلتا ديراك الظروف:

$$\delta(x)=\begin{cases}0 & \text{for } x\neq a\\ \infty & \text{for } x=a\end{cases} \quad \text{(ب,٥٤)(أ)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \quad \text{(ب,٥٤)(ب)}$$

وتعرف نبضة ديراك كقوة ثابتة Q_o مطبقة على الفترة t_1 التي تقترب من الصفر كما هو موضح في الشكل (ب,١٣). ومن مفاهيم القوة الدافعة النبضية (impulse momentum principles)، $Q_o t_1 = m\dot{u}_0(t_1)$. وكلما قربت t_1 من الصفر ، فإن تأثير نبضة ديراك يكون لإحداث سرعة أولية $\dot{u}_0 = Q_o t_1 / m$، بدون إزاحة أولية. وهكذا تظهر استجابة الحالة المستقرة فقط على فترة زمنية غير متناهية الصغر، ويوضع النظام مباشرة إفي اهتزاز حر. ومن المعادلة (ب,٢٠)، تعطى الاستجابة لقلقلة نبضة ديراك بواسطة:

$$u(t)=e^{-\xi\omega_o t}\left(\frac{Q_o t_1}{m\omega_d}\sin\omega_d t\right) \quad \text{(ب,٥٥)}$$

الشكل (١٣,ب) تحميل نبضة ديراك.

(٣,٥,٥,ب) تكامل ديمهمل Duhamel Integral

يمكن التفكير بدالة تحميل عامة كتلك الموضحة في الشكل (١٤,ب) كتسلسل من نبضات الحمل، كل منها ذات فترات غير متناهية الصغـــر. وبالنظر إلى إحدى هذه النبضات، تظهر النبضة ذات الفترة $d\tau$ عند $t = \tau$ [الشكل (١٤,ب)]، وتتبع الاستجابة التي تسببها عند زمن لاحق، $\tilde{t} = t$، من المعادلة (٥٥,ب):

$$du(\tilde{t}) = e^{-\xi\omega_0(\tilde{t}-\tau)} \frac{Q_o(\tau)\, d\tau}{m\omega_d} \sin\omega_d(\tilde{t}-\tau) \qquad \text{(ب,56)}$$

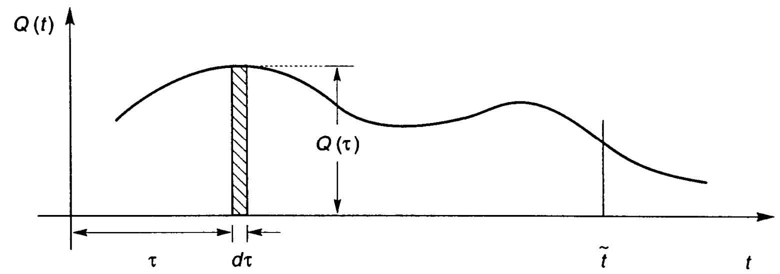
ويمكن إظهار الاستجابة المحدثة بواسطة جميع قطار نبضات التحميل بواسطة جمع الاستجابات لكل النبضات الفردية إلى الزمن $\tilde{t} = t$، بحيث يكون :

$$u(\tilde{t}) = \frac{1}{m\omega_d}\sum_{i=1}^{n} Q(\tau_i)\sin\omega_d(\tilde{t}-\tau_i)d\tau \qquad \text{(ب,57)}$$

حيث n العدد الكلي للنبضات إلى $\tilde{t} = t$. ومع اقتراب dt من الصفر، يصبح المجموع تكاملاً يمكن معه حساب الاستجابة الكلية كالتالي:

$$u(\tilde{t}) = \frac{1}{m\omega_d}\int_0^{\tilde{t}} Q(\tau)e^{-\xi\omega_o(\tilde{t}-\tau)}\sin\omega_d(\tilde{t}-\tau)d\tau \qquad \text{(ب,58)}$$

وتصف هذه العلاقة الاستجابة لنظام خطي معروف بتكامل ديمهمل. ويكون حله تحليلياً عادة صعباً جداً ، لكن يمكن تكامله عددياً بطرق متنوعة. واستعماله، برغم ذلك، مقيد للأنظمة الخطية.



الشكل (١٤,ب) نبضة بفترة dt تظهر عند $\tilde{\tau} = t$.

(٦,ب) التضاؤل DAMPING

تنتشر الطاقة في الترب والمنشآت بواسطة عدة آليات، مشتملة على الاحتكاك، ونشوء الحرارة، والخضوع اللدن. ولترب ومنشآت محددة، برغم ذلك، فإن آليات التشغيل غير مفهومة بشكل كاف للسماح بنمذجتها بشكل واضح. ونتيجة لذلك، فإن التأثيرات لآليات فقد الطاقة المختلفة عادة ما تجمع مع بعض وتمثل بواسطة آلية تضاؤل لا تكون ملائمة.

(٦,١,ب) تضاؤل اللزوجة Viscous Damping

أكثر آلية يشاع استعمالها لتمثيل تشتت الطاقة هي تضاؤل اللزوجة. فعندما يعرض نظام ذو حرية من الدرجة الأولى متضائل لزج مثل ذلك الموضح في الشكل (٣,ب) إلى إزاحة توافقية:

$$u(t) = u_o \sin \bar{\omega} t$$

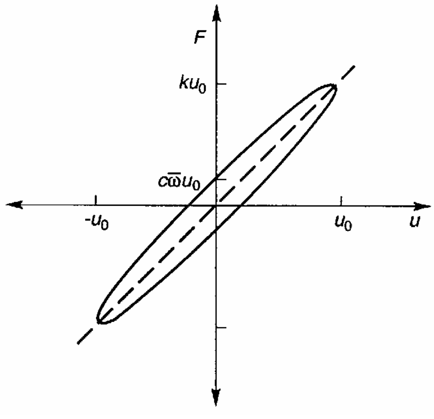
فإن القوة الصافية المؤثرة في الكتلة بواسطة الزنبرك والنبيطة تكون:

$$F(t) = ku(t) + c\dot{u}(t) = ku_o \sin \bar{\omega} t + c\bar{\omega} u_o \cos \bar{\omega} t$$

وينتج تقييم هذه الدوال من الزمن t_o إلى $t_o + 2\pi / \bar{\omega}$ قيم الإزاحة ـ القوة لدورة واحدة للملف التخلفي (hysteresis loop). وعندما يكون معامل التضاؤل اللزج، c، صفراً، تكون القوة والإزاحة في الطور وتتناسب كل مع الأخرى، متضمنة علاقة جهد ـ إجهاد مرنة خطية. وللتضاؤل الغير صفري، برغم ذلك، يكون الملف التخلفي عبارة عن قطاع زائد، كما هو موضح في الشكل (١٥,ب). لاحظ أنه عندما تكون الإزاحة صفراً، تكون قوة الزنبرك صفراً وتأتي القوة الصافية بشكل كامل من النبيطة. وبالتشابه، عندما تكون السرعة صفراً (عند $\bar{\omega} t = \pi / 2 + n\pi$)، تتلاشى قوة النبيطة وتتكون القوة الصافية بشكل كامل من قوة الزنبرك. وتتناقص النسبة الباعية (aspect ratio) للملف التخلفي مع زيادة التضاؤل؛ ويصبح الملف دائرياً عندما تكون $c = k / \bar{\omega}$.

وبوضوح، يعتمد شكل الملف التخلفي على معامل تضاؤل اللزوجة وكذلك على نسبة التضاؤل. وإذا يجب أن نكون قادرين على تحديد نسبة التضاؤل من الملف التخلفي المعروف . وتعطى الطاقة المشتتة في دورة واحدة للتذبذب بواسطة المساحة داخل الملف التخلفي ويمكن تحديدها من:

$$W_D = \int_{t_0}^{t_0+2\pi/\bar{\omega}} F \frac{du}{dt} dt = \pi c \bar{\omega} u_0^2 \qquad \text{(٥٩,ب)}$$



الشكل (١٥,ب) سلوك الجهد ـ الإجهاد المتضمن بواسطة تضاؤل اللزوجة. الملف التخلفي قطاع زائد.

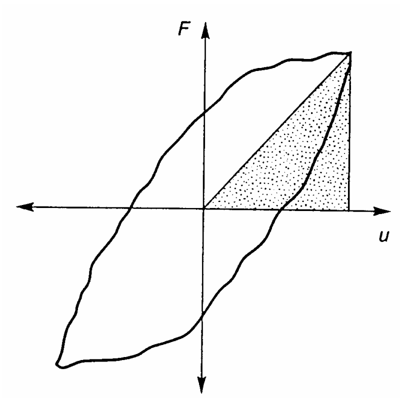
وعند الإزاحة العظمى، تكون السرعة صفراً وتعطى طاقة الإجهاد المخزنة في النظام بواسطة:

$$W_S = \frac{1}{2} k u_o^2 \qquad (٦٠,ب)$$

وتوضح المعادلتان (٥٩,ب) و (٦٠,ب) أن $C = W_D /(\pi \omega u_o^2)$ و $k = 2W_S / u_o^2$. ويعطى التعويض في هذه إلى المعادلة (١٦,ب) بـ $\overline{\omega} = \omega_o$ العبارة:

$$\xi = \frac{W_D}{4\pi W_S}$$

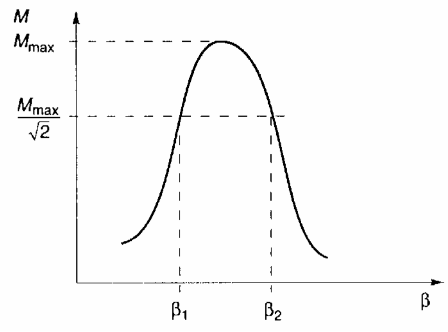
والتي يشاع استعمالها للتحديد البياني لنسبة التضاؤل من الملف التخلفي المقيس. وبالرجوع إلى الشكل (١٦,ب)، تؤخذ نسبة التضاؤل كنسبة المساحة للملف التخلفي إلى المساحة للمثلث المضلل، ويقسم مجموعها على (4π). ويشاع استعمال هذا التقييم البياني لنسبة التضاؤل في تفسير عدد من التجارب المعملية التي نوقشت في الفصل ٦.



الشكل (١٦,ب) التقييم البياني لنسبة التضاؤل من الملف التخلفي المقيس. و تتناسب نسبة التضاؤل مع نسبة المنطقة المظللة إلى المساحة للملف التخلفي.

ويمكن أيضاً تقييم خصائص التضاؤل للنظام الخطي من خصائص استجابته الترددية. وبوضع عبارة معامل التضخم [المعادلة (٤٤,ب)] تساوي $M_{max} / \sqrt{2}$ ، فإنه يمكن تقريب نسب التشويش للقدرة النصفية (half power tuning ratios)، الموضحة في الشكل (١٧,ب)، كالتالي :

$$\beta_1 \approx 1-\xi-\xi^2$$
$$\beta_2 \approx 1+\xi-\xi^2$$



الشكل (١٧,ب) نسب التشويش للقدرة النصفية من تقييم نسبة التضاؤل من منحنى التضخيم.

ولذا، تعطى نسبة التضاؤل بواسطة نصف الفرق بين نسب التشويش للقدرة النصفية:

$$\xi \approx \frac{\beta_2-\beta_1}{2} \qquad (٦١,ب)$$

أو، عندما يعبر عن الاستجابة بمصطلح التردد، حيث $\omega_1 = \beta_1\omega_o$ و $\omega_2 = \beta_2\omega_o$:

$$\xi \approx \frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2+\omega_1} \qquad (٦٢,ب)$$

وهكذا يمكن قياس نسبة التضاؤل للنظام بواسطة إثارة النظام عند ترددات مختلفة وتحديد سعة معامل التضخم عند كل تردد.

(٦,٢,ب)مقاييس أخرى للطاقة المشتتة Other Measures of Energy Dissipation

بالإضافة إلى نسبة التضاؤل، ξ، تستعمل معاملات أخرى لوصف خصائص تشتت الطاقة. ويعمل علماء الزلازل، على سبيل المثال، غالباً بمعامل النوعية (quality factor) :

$$Q = \frac{1}{2\xi} \qquad (٦٣,ب)$$

وفي تحليل الاهتزاز، غالباً، يستعمل معامل الفقدان (loss factor) (Good,1980):

$$\eta = 2\xi \qquad (٦٤,ب)$$

وسعة التضاؤل النوعية (Specific damping factor) :

$$\psi = 2\pi\xi \qquad (٦٥,ب)$$

إنه من المهم تذكر أن نسبة التضاؤل، وأي من هذه المعاملات، تكون ببساطة معاملات تستعمل لوصف تأثيرات الظواهر التي غالباً ما تكون ضعيفة الفهم. إنها تسمح لتأثيرات تشتت الطاقة لكي تمثل بطريقة ملائمة رياضياً. ولأغلب الترب والمنشآت، برغم ذلك، تشتت الطاقة تخلفيا (بمعنى، بواسطة الخضوع أو الإجهاد اللدن للمادة). وفي مثل هذه الحالات يكون السلوك موصوفاً بشكل أدق بواسطة تقييم الاستجابة غير الخطية للنظام.

(ب,٦,٣) الجساءة المركبة Complex Stiffness

يمكن تمثيل النظام المتضائل بشكل لزج أكثر ملاءمة بطريقة مختلفة، لكن مكافئة لصنف التقنيات المعروفة كتحليل الاستجابة المركب. اعتبر نظاماً ذا حرية من الدرجة الأولى متضائلاً معرضاً لتحمل توافقي بسيط بالسعة Q_o وتردد تحميل ϖ. ويمكن تمثيل التحميل بواسطة:

$$Q(t)=Q_o e^{i\varpi t}$$ (ب,٦٦)

وبافتراض أن $u(t)=U_o e^{i\varpi t}$، فإن حل الحالة المستقرة لمعادلة الحركة:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=Q_o e^{i\varpi t}$$ (ب,٦٧)

يكون:

$$u(t)=\frac{Q_o}{k-m\varpi^2+ic\varpi}e^{i\varpi t}$$ (ب,٦٨)

ولأن اعتبر النظام ذو حرية من الدرجة الأولى للشكل (ب,١٨)، والذي ليس له نبيطة، لكن له زنبرك ذو جساءة مركبة $k^*=k_1+ik_2$. وتكون معادلة الحركة لهذا النظام:

$$m\ddot{u}+k^*u=Q_o e^{i\varpi t}$$ (ب,٦٩)

ومرة أخرى بافتراض أن $u(t)=U_o e^{i\omega t}$، فإنه يمكن التعبير عن حل الحالة المستقرة كالتالي:

$$u(t)=\frac{Q_o}{k^*-\varpi^2 m}e^{i\varpi t}$$ (ب,٧٠)

وبمقارنة المعادلتين (٦٨,ب) و (ب,٧٠)، فمن الظاهر أن:

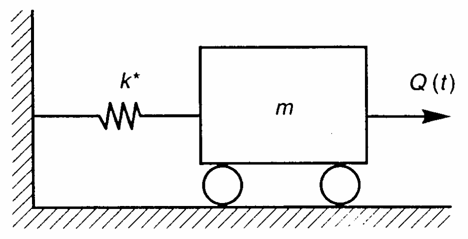
$$k^*=k+ic\varpi$$ (ب,٧١)

وبواسطة الاختيار الملائم لـ k^*، فإنه يمكن جعل سعة الإزاحة للمعادلة (ب,٧٠) مساوية لتلك للمعادلة (ب,٦٨)، (بالرغم من بقاء اختلاف الطور الصغير بين الحدين). ولإنجاز هذا، فإن الجساءة المركبة تمثل كالتالي:

$$k^*=k(1-2\xi^2+2i\xi\sqrt{1-\xi^2}\,)$$ (ب,٧٢)

حيث $\xi \le$ ١. ولنسب التضاؤل الصغيرة المعتادة في مسائل هندسة الزلازل، فإنه يمكن إهمال الحد ξ^2 بحيث إن $k^*=k(1+2i\xi)$. وباستعمال هذا التعبير لـ k^*، فإن الخطأ في زاوية الطور بين الاستجابات المعطاة بواسطة المعادلتين (ب,٦٨) و (ب,٧٠) يكون $\Delta\theta \approx 2\xi/(1+\beta)$. وكنتيجة، يمكن تمثيل النظام المتضائل بشكل لزج كنظام غير متضائل بالجساءة المركبة. واستعمال هذه الطريقة، برغم ذلك، يكون مقيداً لحالات الحركة التوافقية. وللمسائل التي يوصف فيها التحميل دوريا (ومن

ثم كمجموع سلسلة من الأحمال التوافقية)، يبسط استعمال الجساءة المركبة بشكل كبير حسابات الاستجابة للأنظمة المتضائلة.



الشكل (١٨,ب) نظام ذو حرية من الدرجة الأولى بزنبرك ذي جساءة مركبة.

ولنسب تضاؤل صغيرة، تتكون إذا الجساءة المركبة من جزأين؛ حقيقي وتخيلي:

$$Re(k^*) = k \qquad \text{(أ)(ب,٧٣)}$$

$$Im(k^*) = 2k\xi \qquad \text{(ب)(ب,٧٣)}$$

وبالتالي، يمكن التعبير عن نسبة التضاؤل كالتالي:

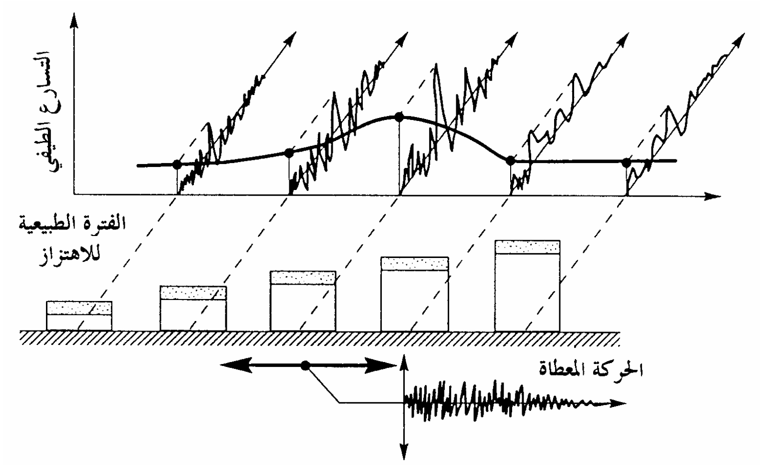
$$\xi = \frac{Im(k^*)}{2\,Re(k^*)}$$

والذي يكون مفيداً لتذكره في تفسير الكميات مثل دوال المعاوقة المركبة، والتي عادة ما يعبر عنها بمصطلحات أجزائها الحقيقية والتخيلية.

(٧,ب) أطياف الاستجابة RESPONSE SPECTRA

للتصميم المقاوم للزلازل، ربما لا يكون كل التاريخ الزمني للاستجابة مطلوباً. وبدلاً من ذلك، ربما يعتمد التصميم المقاوم للزلازل على القيمة العظمى (المطلقة) للاستجابة للمنشأ لحركة قاعدة محددة. وبوضوح، ستعتمد الاستجابة على خصائص الكتلة، والجساءة، و التضاؤل للمنشأ وعلى خصائص حركة القاعدة.

ويصف طيف الاستجابة العظمى لنظام ذي حرية من الدرجة الأولى لحركة معطاة محددة كدالة في التردد الطبيعي (أو الفترة الطبيعية) ونسبة التضاؤل لنظام ذي حرية من الدرجة الأولى [الشكل (١٩,ب)]. وربما يعبر عن الاستجابة بمصطلح التسارع، والسرعة، أو الإزاحة. وتعتمد القيم العظمى لكل من هذه المعاملات فقط على التردد الطبيعي ونسبة التضاؤل للنظام ذي الحرية من الدرجة الأولى (لحركة معطاة محددة). ويرجع إلى القيم العظمى للتسارع، والسرعة، و الإزاحة بالتسارع الطيفي (S_a) والسرعة الطيفية (S_v)، والإزاحة الطبقية (S_d)، على التوالي. لاحظ أن النظام ذا الحرية من الدرجة الأولى بفترة طبيعية مساوية للصفر (تردد طبيعي غير متناهٍ) سيكون صلبا، وسيكون تسارعه الطيفي مساوياً للتسارع الأرضي القمة.



الشكل (١٩,ب) طيف الاستجابة. تكون التسارعات الطيفية هي سعات التسارع العظمى لأنظمة ذات حرية من الدرجة الأولى كاستجابة لنفس الحـركة المعطـاة. وتظهر استجابة النظام بواسطـة رسم التسارعات الطيفية مقابل فترات الاهتزازات لأنظمـة ذات حرية من الدرجة الأولى.

وينتج تطبيق تكامل ديرمهمل لنظام ذي حرية من الدرجة الأولى مرن خطي عبارات للتواريخ الزمنية للتسارع، والسرعة، والإزاحة التي تتناسب (بواسطة المعامل ω)، باستثناء تغير الطور. ولأن تغير الطور لا يؤثر بشكل بالغ في قيم الاستجابة العظمى، فإن يمكن ربط التسارع الطبقي، والسرعة الطيفية، والإزاحة الطيفية بشكل تقريبي بعضها مع بعض بواسطة العبارات البسيطة التالية :

$$S_d = |u|_{max} \quad \text{(أ)(ب,٧٥)}$$

$$S_v = |\dot{u}|_{max} \approx \omega_o S_d = PSV \quad \text{(ب)(ب,٧٥)}$$

$$S_a = |\ddot{u}|_{max} \approx \omega_o^2 S_d = \omega_o PSV = PSA \quad \text{(ج)(ب,٧٥)}$$

حيث u و ω_o الإزاحة والتردد الطبيعي للنظام ذي الحرية من الدرجة الأولى،و PSV السرعة شبه الطيفية المرافقة، و PSA التسارع شبه الطيفي، وبالرغم من أن السرعة شبه الطيفية والتسارع شبه الطيفي ليسا القيم العظمى للسرعة والتسارع، فإنها عادة ما تكون قريبة من العظمى للحركات الأرضية القوية المسجلة. وفي الممارسة، تكون القيم الشبه طيفية عموما مفروضة بأنها تساوي القيم الطيفية.

(٨,ب) استجابة الأنظمة ذات الحرية من الدرجة الأولى غير الخطية للتحميل العام

RESPONSE OF NONLINEAR SDOF SYSTEMS TO GENERAL LOADING

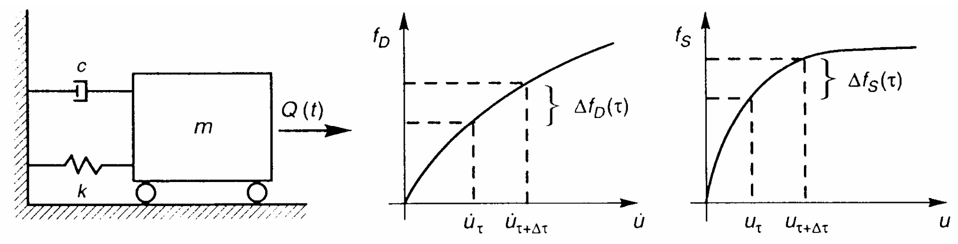
يكون التكامل العددي لتكامل دومهمل مفيداً جداً لحساب الاستجابة للأنظمة الخطية للتحميل العام. ويظهر عدد من الأنظمة التي تحسب لها الاستجابة الزلزالية، برغم ذلك، سلوكاً غير خطي. وعادة ما تكون الكتلة ثابتة في مثل هذه الأنظمة، لكن ربما يتغير معامل التضاؤل و / أو الجساءة مع الزمن، والتشوه، أو السرعة. إنه سيكون من المفيد تطوير طرق لتحليل الاستجابة للأنظمة الغير خطية، مدركاً أنها ستكون ملائمة للأنظمة الخطية كذلك عندما تبقى قيم التضاؤل والجساءة ثابتة.

وأكثر طريقة شائعة للتحليل الغير خطي هي التكامل المباشر للمعادلات الازديادية للحركة التي تغطي الاستجابة للنظام على زيادات زمنية صغيرة. وتحسب الاستجابة لكل زيادة زمنية بعد تعديل الجساءة والتضاؤل عند بداية الزيادة. وباستعمال الظروف عند نهاية إحدى الزيادات الزمنية كظروف أولية للزيادة الزمنية التالية، فإن النظام غير الخطي يقرب كنظام خطي متغير بشكل ازديادي.

(ب,٨,١) المعادلة الازديادية للحركة Incremental Equation of Motion

اعتبر النظام ذا الحرية من الدرجة الأولى الموضح في الشكل (٢٠,ب)، والـذي يملك زنبركاً غير خطي ونبيطة (بمعنى، قوة الزنبرك لا تتناسب مع الإزاحة وقوة النبيطة لا تتناسب مع السرعة). ويتطلب الاتزان الديناميكي عند الزمن τ أن:

$$f_I(\tau)+f_D(\tau)+f_S(\tau)=Q(\tau) \qquad (ب,٧٦)$$



الشكل (٢٠،ب) نظام ذو حرية من الدرجة الأولى بقوى زنبرك ونبيطة غير خطية.

وأن :

$$f_I(\tau+\Delta\tau)+f_D(\tau+\Delta\tau)+f_s(\tau+\Delta\tau)=Q(\tau+\Delta\tau) \qquad (ب,٧٧)$$

عند الزمن $\tau+\Delta\tau$، وبتعريف:

$$\Delta f_I(\tau)=f_I(\tau+\Delta\tau)-f_I(\tau)$$
$$\Delta f_D(\tau)=f_D(\tau+\Delta\tau)-f_D(\tau)$$
$$\Delta f_S(\tau)=f_S(\tau+\Delta\tau)-f_S(\tau)$$
$$\Delta Q(\tau)=Q(\tau+\Delta\tau)-Q(\tau)$$

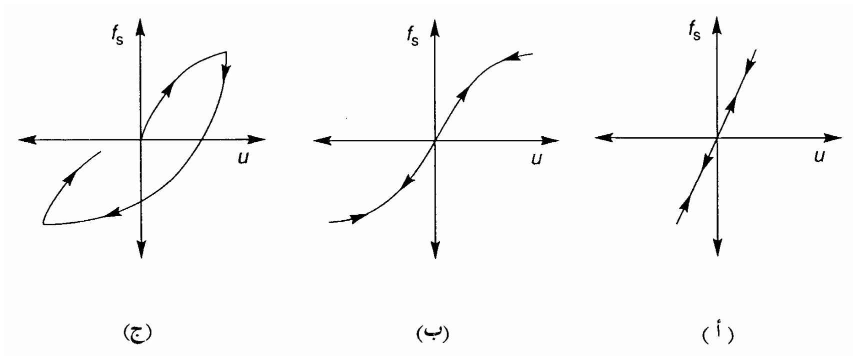
وبطرح المعادلة (٧٦,ب) من المعادلة (٧٧,ب)، فإن معادلة الزيادة للحركة للفترة الزمنية من t إلى $\tau+\Delta\tau$ تكون:

$$\Delta f_I(\tau)+\Delta f_D(\tau)+\Delta f_S(\tau)=\Delta Q(\tau) \qquad (٧٨,ب)$$

أو بالتعبير عن القوى الازديادية بمصطلح الإزاحات، والسرعات، والتسارعات الازديادية، كالتالي :

$$m\Delta\ddot{u}(\tau)+c(\tau)\Delta\dot{u}(\tau)+k(\tau)\Delta u(\tau)=\Delta Q(\tau) \qquad (٧٩,ب)$$

وبتكامل هذه المعادلة الازديادية للحركة في سلسلة من الخطوات الزمنية الصغيرة، فإنه يمكن إظهار الاستجابة للنظام غير الخطي. ويجب ملاحظة أن هذه الطريقة يمكن أن تستعمل لحساب الاستجابة للمواد المرنة الخطية، والمرنة غير الخطية، وغير المرنة وغير الخطية بسلوكيات الجهد- الإجهاد الموضحة في الشكل (٢١,ب). ويكون الثالث من هذه مهماً بشكل خاص؛ لأنه يسمح بتمثيل التضاؤل التخلفي المظهر بواسطة الترب المحملة دوريا.



الشكل (٢١,ب)سلوك الجهد ـ الإجهاد للمواد (أ) المرنة الخطية، و(ب) المرنة غير الخطية، و (ج) غير المرنة وغير الخطية تحت ظروف تحميل دوري.

(٨,٢,ب) التكامل العددي Numerical Integration

يوجد عدة طرق لتكامل المعادلة الازديادية للحركة عددياً. أبسطها برمجة و أكثرها سهولة هي طريقة التسارع الخطي. إنها تعتمد على افتراض أن التسارع يتغير خطيا داخل كل زيادة زمنية. وإذا كان التسارع يتغير خطياً في كل زيادة زمنية، فإن السرعة والإزاحة ستتغيران تربيعياً وتكعيبياً، على التوالي، كما هو موضح في الشكل (٢٢,ب). لذا، يمكن كتابة العبارات الجبرية للسرعة والإزاحة الازديادية بمصطلح التسارع الازديادي، بحيث يكون:

$$\Delta\dot{u}(\tau)=\ddot{u}(\tau)\Delta t+\Delta\ddot{u}(\tau)\frac{\Delta t}{2} \qquad (ب,٨٠)$$

$$\Delta u(\tau)=\dot{u}(\tau)\Delta t+\Delta\ddot{u}(\tau)\frac{\Delta t^2}{2}+\Delta\ddot{u}(\tau)\frac{\Delta t^2}{6} \qquad (ب,٨١)$$

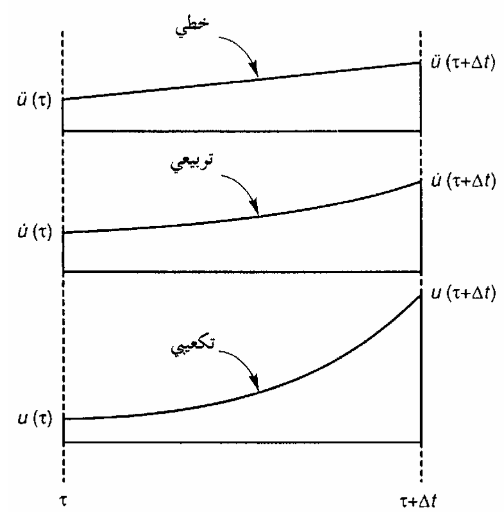
وبإعادة الترتيب، يمكن التعبير عن التسارع والسرعة الازديادية بمصطلح الإزاحة الازديادية:

$$\Delta\ddot{u}(\tau)=\frac{6}{\Delta t^2}\Delta u(\tau)-\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(\tau)-3\ddot{u}(\tau) \qquad (ب,٨٢)(أ)$$

$$\Delta\dot{u}(\tau)=\frac{3}{\Delta t}\Delta u(\tau)-3\dot{u}(\tau)-\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(\tau) \qquad (ب,٨٢)(ب)$$

ويعطي التعويض بالمعادلة (٨٢,ب) إلى المعادلة الازديادية للحركة:

$$m\left[\frac{6}{\Delta t^2}\Delta u(\tau)-\frac{6}{\Delta t}\dot{u}(\tau)-3\ddot{u}(\tau)\right]+c(\tau)\left[\frac{3}{\Delta t}\Delta u(\tau)-3\dot{u}(\tau)-\frac{\Delta t}{2}\ddot{u}(\tau)\right]+k(\tau)\Delta u(\tau)=\Delta Q(\tau) \qquad (ب,٨٣)$$



الشكل (٢٢,ب) تغير التسارع، والسرعة، والإزاحة على الزيادة الزمنية.

والتي يمكن حلها للإزاحة الازديادية غير المعروفة:

$$\Delta u(\tau)=\frac{\Delta Q(\tau)+m[(6/\Delta t)\dot{u}(\tau)+3\ddot{u}(\tau)]+c(\tau)[3\dot{u}(\tau)+(\Delta t/2)\ddot{u}(\tau)]}{k(\tau)+(6/\Delta t^2)m+(3/\Delta t)c(\tau)} \qquad (ب,٨٤)$$

وتوضح المعادلة (٨٤,ب) أنه إذا كانت الإزاحة، والسرعة، والتسارع عند الزمن τ معروفة، فإنه يمكن حساب الإزاحة الازديادية أثناء الزيادة الزمنية الناجمة $\Delta\tau$ اعتمادا على التحميل والجساءة والتضاؤل أثناء تلك الزيادة الزمنية. ومن هذه الإزاحة الازديادية، وازدياد السرعة والتسارع، يمكن تحديد الإزاحة، والسرعة، والتسارع عند نهاية الزيادة الزمنية . وتؤخذ عندئذ الظروف عند نهاية الزيادة الزمنية كظروف أولية للزيادة الزمنية التالية وتستعمل لحساب قيم الجساءة و التضاؤل

الملائمة للزيادة الزمنية التالية. ولمنع تراكم الأخطاء الناتجة من الافتراضات لطريقة التسارع الخطي، فإن التسارع عند بداية كل خطوة زمنية يجب أن يحسب بواسطة طرح قوى التضاؤل والزنبرك من الحمل الخارجي الكلي وقسمه الناتج بواسطة الكتلة. وهذا سوف يضمن تحقيق الاتزان الكلي عن كل خطوة للتحليل .

ومن الاستقرارية العددية، فإنه من الضروري أن تكون الخطوات الزمنية صغيرة نسبياً، نموذجياً أقل من حوالي ٥٥% للفترة غير الطبيعية وغير المتضائلة للنظام. وهذه الخطوات الزمنية الصغيرة يمكن أن تؤدي إلى جهد حسابي معتبر، وخصوصاً عند تطبيق مثل طرق التكامل المباشر إلى أنظمة ذات درجة حرية متعددة. ويتوافر عدد آخر من تقنيات التكامل العددي؛ ووصف بيرج (Berg , 1989) التطبيق لعدد منها إلى مسائل ديناميكا المنشآت.

(٩,ب) أنظمة ذات درجة حرية متعددة MULTIPLE - DEGREE - OF - FREEDOM SYSTEMS

في معظم الأنظمة الفيزيائية، لا يمكن وصف الحركة للكتل المهمة بواسطة متغير واحد؛ ومثل هذه الأنظمة يجب أن تعالج كأنظمة ذات درجة حرية متعددة (MDOF). وباستثناء فقط الحالات الأبسط، تمتلك أنواع من المباني، والكباري، والمنشآت الأخرى ذات الأهمية في هندسة الزلازل درجات حرية متعددة. ويمكن نمذجة بعض المنشآت ببضع درجات للحرية فقط؛ والبعض الآخر ربما يتطلب مئات أو حتى آلافاً.

وفي عدد من المظاهر، تكون الاستجابة للأنظمة ذات الحرية المتعددة مشابهة للاستجابة للأنظمة ذات الحرية من الدرجة الأولى، وتكون خطوات التحليل مشابهة لتلك الموصوفة سابقاً للأنظمة ذات الحرية من الدرجة الأولى. وبالرغم من أن درجات الحرية الإضافية تعقد الجبر، فإن الخطوات من ناحية المبدأ متشابهة إلى حد ما. وفي الحقيقة، تسمح طريقة مفيدة جداً للاستجابة للأنظمة الخطية ذات درجة الحرية المتعددة بحساب استجابتها كمجموع الاستجابات لسلسلة من الأنظمة ذات الحرية من الدرجة الأولى.

(٩,١,ب) معادلات الحركة Equation of Motion

في تقييم الاستجابة للنظام ذي درجة الحرية المتعددة، يجب ضمان الاتزان الديناميكي لجميع الكتل في نفس الوقت. اعتبر مبنى الدورين المثالي الموضح في الشكل (٢٣,ب). وللمنشأ درجتا حرية: الانتقال الأفقي للكتلة العليا والانتقال الأفقي للكتلة السفلى. ويجب موازنة الحمل لكل كتلة المطبق خارجيا بواسطة قوى القصور الذاتي، والمتضائلة، والمرنة التي تقاوم الحركة:

$$f_{I1} + f_{D1} + f_{S1} = q_1(t) \qquad \text{(٨٥,ب)(أ)}$$

$$f_{I2} + f_{D2} + f_{S2} = q_2(t) \qquad \text{(٨٥,ب)(ب)}$$

أو في صيغة المصفوفة:

$$f_I + f_D + f_S = q(t) \qquad \text{(٨٦,ب)}$$

وإذا أظهر المنشأ سلوكاً خطياً، فإن مفهوم التراكب يكون مقبولا. وإذا يمكن التعبير عن القوى التي تقاوم الحركة عند كل مستوى في مصطلح المعاملات التي يضرب بها معامل الحركة عند كل

المستويات. وعلى سبيل المثال، يمكن التعبير عن قوة المرونة المقاومة للحركة عند المستوى ١ كالتالي :

$$f_{S1}=k_{11}u_1+k_{12}u_2$$

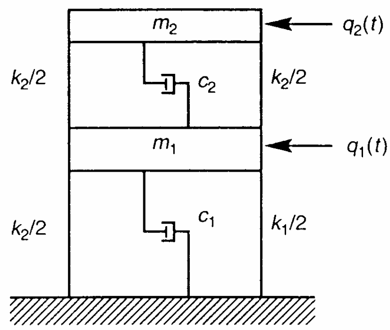
حيث تمثل معاملات الجساءة k_{ij} القوة المحدثة عند المستوى i اعتمادا على وحدة الإزاحة عند المستوى j (بجعل الإزاحات عند كل المستويات ماعدا المستوى j مساوية للصفر). وفي صيغة المصفوفة :

$$\begin{Bmatrix} f_{S1} \\ f_{S2} \end{Bmatrix}=\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

أو:

$$f_S=ku$$

والتي تكون فيها k مصفوفة الجساءة للمنشأ.



الشكل (٢٣,ب) نظام ذو حرية من الدرجة الثانية. وتكون الإزاحات للكتلتين ١ و ٢ من مواضع الاتزان u_1، و u_2 ، على التوالي.

وبالمثل، يمكن تطوير مصفوفة التضاؤل، ومصفوفة الكتلة والتي تمثل فيها العناصر c_{ij} (أو m_{ij}) قوى التضاؤل (أو القصور الذاتي) المقاومة للحركة عند المستوى i اعتمادا على وحدة السرعة (أو التسارع) للمستوى j. ويمكن عندئذ وصف الاتزان الديناميكي للنظام ذي درجة الحرية المتعددة إذاً بواسطة مجموعة من المعادلات المتزامنة للحركة، والتي يمكن التعبير عنها في صيغة المصفوفة كالتالي :

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=q(t) \qquad (\text{ب},٨٧)$$

وتستجيب الأنظمة ذات درجة الحرية المتعددة أيضا للحركات القاعدية. وتطور معادلة الحركة لحالة الهز القاعدي بسهولة باتباع نفس الخطوات المطبقة للحالة ذات الحرية من الدرجة الأولى في الجزء (٢,٤,ب). وتكون معادلة الحركة الناتجة:

$$m\ddot{u}+c\dot{u}+ku=-m1\ddot{u}_g(t) \qquad (\text{ب},٨٨)$$

وتشير المعادلة (٩٥,ب) إلى أن الاستجابة للمنشأ ذي الأدوار N لحركة القاعدة تساوي الاستجابة للأحمال الخارجية المكافئة، حيث $q_i=-m_i\ddot{u}_g(t)$ و $(i=1,N)$ هي الحمل المطبق إلى الدور i^{th}.

(٩,٢ب) الاهتزازات الحرة غير المتضائلة Undamped Free Vibrations

للاهتزازات الحرة غير المتضائلة، تكون كل الحدود لمصفوفة التضاؤل مساوية للصفر، لذا تختصر معادلات الحركة إلى:

(٨٩,ب) $$m\ddot{u}+ku=0$$

وبافتراض أن الاستجابة لكل كتلة (درجة للحرية) تكون توافقية، فإننا نملك:

(٩٠,ب) $$u(t)=U\,sin(\omega t+\theta)$$

حيث U متجه يحتوى على سعات الإزاحة و θ متجه يحتوي على زوايا الطور عند كل مستوى للمنشأ (أو لكل درجة للحرية). ويعطى تفاضل المعادلة (٩٠,ب) مرتين:

(٩١,ب) $$\ddot{u}(t)=-\omega^2U\,sin(\omega t+\theta)=-\omega^2u(t)$$

وتنتج التعويضات بعبارات الإزاحة [المعادلة (٩٠,ب)] والتسارع [المعادلة (٩١,ب)] إلى معادلة الحركة [(٨٩,ب)] .

$$-m\omega^2U\,sin(\omega t+\theta)+kU\,sin(\omega t+\theta)=0$$

أو:

(٩٢,ب) $$[k-\omega^2m]U=0$$

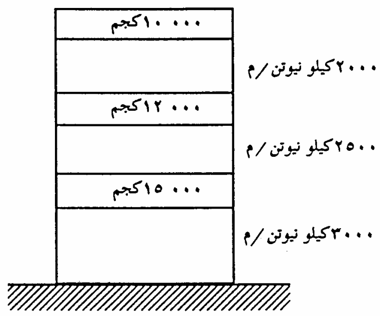
والتي تكون مجموعة من المعادلات الجبرية الخطية في المجهول U. ويمكن إظهار حل غير بسيط (الحل الذي يعطي قيم غير U = ٠) فقط إذا كانت:

(٩٣,ب) $$det(k-\omega^2m)=\left|k-\omega^2m\right|=0$$

والمعادلة (٩٣,ب) هي معادلة تردد (أو معادلة مميزة) للنظام، والتي ستعطي، لنظام ذي N درجات للحرية N، ومتعددة الحدود (Polynomial) من الدرجة N في ω^2. وتمثل الجذور N لمعادلات التردد $\{\omega_1^2,\omega_2^2,\omega_3^2,..........,\omega_N^2\}$ الترددات التي يمكن أن يتذبذب عندها النظام غير المتضائل في غياب القوى الخارجية. وتدعى هذه الترددات بالترددات الدورية الطبيعية للنظام.

المثال (٥,ب)

احسب الترددات الطبيعية للمبنى ذي الثلاثة أدوار الموضح في الشكل (المثال ٥,ب).



الشكل (المثال ٥,ب)

الحـــل

تكون مصفوفة الكتلة لهذا المبنى البسيط:

$$m = 1000\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} kg$$

ويمكن تحديد مصفوفة الجساءة بواسطة تطبيق وحدة إزاحة لكل دور (بإزاحة صفرية عند الأدوار الأخرى)، وتقييم القوى الناتجة. وبهذه الخطوات تكون مصفوفة الجساءة:

$$k = 1{,}000{,}000\begin{bmatrix} 5.5 & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 4.5 & -2.0 \\ 0 & -2.0 & 2.0 \end{bmatrix} N/m$$

إذاً:

$$k - \omega^2 m = 1{,}000{,}000\begin{bmatrix} 5.5-10\alpha & -2.5 & 0 \\ -2.5 & 4.5-12\alpha & -2.0 \\ 0 & -2.0 & 2.0-15\alpha \end{bmatrix}$$

حيث:

$$\alpha = \frac{\omega^2}{1000}$$

ويعطي وضع المحددة $\left| k - \omega^2 m \right| = 0$ معادلة التردد:

$$1800\alpha^3 - 1905\alpha^2 + 459.5\alpha - 15 = 0$$

وتكون جذور معادلة التردد α_1= ٠,٠٣٨٦، وα_2= ٠,٣٠٠٠ و α_3= ٠,٧١٩٧ . وبالتالي:

$$\begin{Bmatrix} \omega_1^2 \\ \omega_2^2 \\ \omega_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 38.6 \\ 300.0 \\ 719.7 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 6.21 \\ 17.62 \\ 26.83 \end{Bmatrix} \frac{rad}{sec} \Rightarrow \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.99 \\ 2.76 \\ 4.27 \end{Bmatrix} Hz$$

ويرافق كل تردد طبيعي بصيغة لاهتزاز النظام. وعند الترددات الطبيعية، تكون السعة لمتجه الإزاحة، U، غير محددة [ومقايسة الإزاحات إلى أعلى أو أسفل بواسطة معامل ثابت سيبقى تحقق المعادلة (٩٢,ب)]. ويصف المتجه U شكل النظام المهتز، والذي يكون مختلفاً عند كل تردد طبيعي. ويجعل هذا الشكل غالباً عديم البعد بواسطة قسمة العناصر لـ U بواسطة أحد العناصر (غالباً الأول، وأحيانا الأكبر). ويصف المتجه الناتج شكل الصيغة (mode shape)؛ وسيكون شكل الصيغة للصيغة n للاهتزاز:

$$\phi_n^T = [\phi_{1n} \quad \phi_{2n} \quad \dots \quad \phi_{Nn}] = \frac{1}{U_{Nn}}[U_{1n} \quad U_{2n} \quad \dots \quad 1] \qquad (٩٤,ب)$$

وتحقق جميع أشكال الصيغة العلاقة $\left|k-\omega_n^2 m\right|\phi_n=0$ لكل $n=[1,N]$. وتصف قيم المتجه ϕ_n عند كل تردد طبيعي شكل الصيغة للصيغة المطابقة للاهتزاز. وهكذا سيكون لنظام ذي N درجة للحرية ترددات طبيعية مطابقة لـ N من صيغ الاهتزاز. وتظهر كل صيغة للاهتزاز عند تردد طبيعي محدد وتسبب تشوه المبنى بشكل صيغة محددة. وتدعى الصيغة المطابقة لأقل تردد طبيعي الصيغة الأولى أو الصيغة الرئيسية (fundamental mode)، ويدعى ثاني أصغر تردد طبيعي بالصيغة الثانية، وهكذا. ويمكن توضيح أشكال الصيغة لكي تكون متعامدة، بحيث، لـ n≠m

$$\phi_m^T m\phi_n = o$$
$$\phi_m^T k\phi_n = 0$$

المثال (٦,ب)

احسب أشكال الصيغة للمبنى لموضع في المثال ٥,ب.

الحـــل

ينتج التعويض بالتردد الرئيسي في المعادلة (٩٩,ب) :

$$1{,}000{,}000\begin{bmatrix}5.114 & -2.5 & 0\\ -2.5 & 4.037 & -2.0\\ 0 & -2.0 & 1.421\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}U_{11}\\ U_{21}\\ U_{31}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{Bmatrix}$$

وبمقايسة إزاحة الدور العلوي، U_{31}، فإن شكل الصيغة:

$$\phi_1=\frac{1}{U_{31}}\begin{Bmatrix}U_{11}\\ U_{21}\\ U_{31}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\phi_{11}\\ \phi_{21}\\ 1\end{Bmatrix}$$

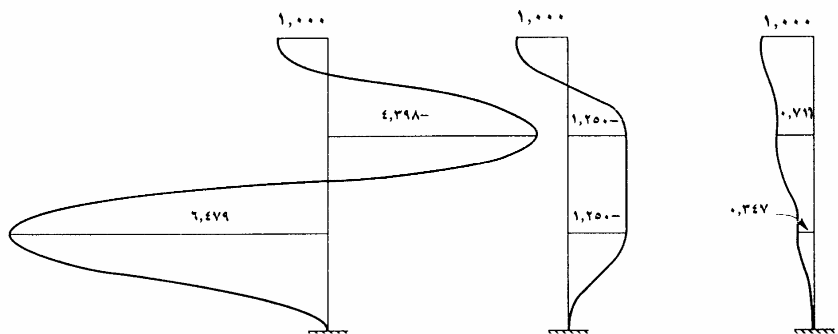
يجب أن يحقق $[k-\omega_1^2 m]\phi_1=0$. إذا، باستعمال القيمة المعروفة لـ ϕ_{31} = ١ فإنه يمكن تحديد ϕ_{11} و ϕ_{21}. ويمكن إعادة العملية لإنتاج أشكال الصيغة لكل الصيغ الثلاث للاهتزاز:

$$\phi_1=\begin{Bmatrix}0.347\\ 0.711\\ 1.000\end{Bmatrix}\qquad \phi_2=\begin{Bmatrix}-1.250\\ -1.250\\ 1.000\end{Bmatrix}\qquad \phi_3=\begin{Bmatrix}6.479\\ -4.398\\ 1.000\end{Bmatrix}$$

وتوضح أشكال الصيغة بيانياً في الشكل (المثال (٦,ب)).

(٩,٣,ب) طريقة تراكب الصيغة Mode Superposition Method

وللمنشآت الخطية بأنواع محددة التضاؤل، يمكن تحديد الاستجابة في كل صيغة للاهتزاز بشكل مستقل عن الاستجابة في الصيغ الأخرى. ومن ثم يمكن جمع الاستجابات الصيغية المستقلة لتحديد الاستجابة الكلية. وهذا هو الأساس لطريقة تراكب الصيغة.



الشكل (المثال (٦,ب))

وبتذكر أن متجه شكل الصيغة، ϕ_n، يصف فقط شكل الصيغة n، فإنه يمكن التعبير عن الإزاحات كمضروب لشكل الصيغة والسعة الصيغية، y_n:

$$U_n(t) = \phi_n y_n(t) \qquad (\text{٩٥,ب})$$

إذا بالتعويض بالمعادلة (٩٥,ب) إلى المعادلة (٨٧,ب) وإعادة ضرب كل حد بواسطة ϕ_n^T، فإنه يمكن كتابة معادلة الحركة للصيغة n للاهتزاز كالتالي

$$M_n \ddot{y}_n + C_n \dot{y}_n = Q_n(t) \qquad (\text{٩٦,ب})$$

حيث $M_n = \phi_n^T m \phi_n$ ، $C_n = \phi_n^T c \phi_n$ ، $K_n = \phi_n^T k \phi_n$ ، و $Q_n(t) = \phi_n^T q(t)$. وتعتمد معادلة الحركة هذه على الافتراض بأن مصفوفة التضاؤل تكون عمودية (بمعنى، أن $\phi_n^T c \phi_n = 0$ لـ $n \neq m$). وتضاؤل رالي (Rayleigh-damping)، والذي يمكن فيه تقسيم مصفوفة التضاؤل إلى مركبة تتناسب مع مصفوفة الكتلة ومركبة تتناسب مع مصفوفة الجساءة، يحقق متطلبات التعامد. وتوصف خطوات أخرى في مراجع ديناميكية المنشآت القياسية. وبديلاً يمكن كتابة معادلة الحركة كالتالي :

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{Q_n(t)}{M_n} \qquad (\text{٩٧,ب})$$

ولحالة اهتزاز القاعدة، يمكن التعبير عن معادلة الحركة كالتالي:

$$\ddot{y}_n + 2\xi_n \omega_n \dot{y}_n + \omega_n^2 y_n = \frac{L_N}{M_n} \ddot{u}_b(t) \qquad (\text{٩٨,ب})$$

حيث $L_n = \sum_{j=1}^{N} m_j \phi_{jn.}$.

وبهذه العملية، ينقل النظام ذو المعادلات المتتالية N (المعادلات الأصلية للحركة) إلى N نظام من المعادلات المستقلة. ويمكن حل كل من هذه المعادلات المستقلة لـ $Y_n(t)$ باستعمال خطوات الحرية من الدرجة الأولى الموصوفة سابقاً في هذا الملحق. ومن ثمّ تظهر الإزاحة الكلية $u(t)$ إذا طبقت كأحمال ساكنة:

$$u(t) = \phi_1 y_1(t) + \phi_2 y_2(t) + \dots\dots + \phi_N y_N(t) \qquad (٩٩,ب)$$

و حالما تكون الإزاحات معروفة، فإنه يمكن استعمالها لحساب القوى، والجهود، و المعاملات الأخرى ذات الأهمية. وبعد ذلك يمكن لإظهار الإزاحات أيضا لحساب مجموعة مكافئة من القوى الجانبية إذا طبقت كأحمال ساكنة $u(t)$ والتي سوف تنتج إزاحات $f(t)$ القوى الجانبية المكافئة:

$$f(t) = k\phi_1 y_1(t) + k\phi_2 y_2(t) + \dots + k\phi_N y_N(t) \qquad (١٠٠,ب)$$

ويمكن حساب القوى الداخلية بواسطة تحليل ساكن للمنشأ المعرض لقوى جانبية مكافئة. ويمكن استعمال هذه القوى الداخلية للتصميم للعناصر المختلفة للمنشأ.

مثال (٧,ب)

احسب الاستجابة للمنشأ الموضح في المثال (٤,ب) للحركة الزلزالية لجلروى رقم ٢ الشرفية ـ الشمالية باستعمال طريقة تراكب الصيغة. افترض تضاؤل ٥% لكل الصيغ.

الحـــل

سجلت الحركة الزلزالية لجلروي رقم ٢، الممثلة في الشكل (٣,١)، على سطح راسب سميك من تربة جاسئة في زلزال لوما بريتا ١٩٨٩م. يتطلب استعمال طريقة تراكب الصيغة تقييم المعادلات الصيغية للحركة. وللصيغة الأولى:

$$\begin{aligned} M_1 &= \phi_1^T m \phi_1 \\ &= (1000\,kg)\{0.347 \quad 0.711 \quad 1.000\} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 15 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.347 \\ 0.711 \\ 1.000 \end{Bmatrix} \\ &= 22{,}270\,kg \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1 &= m_1\phi_{11} + m_2\phi_{21} + m_3\phi_{31} \\ &= (10.000)(0.347) + (12.000)(0.711) + (15.000)(1.000) \\ &= 27{,}002\,kg \end{aligned}$$

وبذلك تكون معادلة الحركة [المعادلة (٩٨,ب)] :

$$\ddot{y}_1 + 0.621\dot{y}_1 + 38.56\,y_1 = -1.212\ddot{u}_g(t)$$

ويعطى إعادة هذه العملية للصيغتين الثانية والثالثة:

$$\ddot{y}_2 + 1.732\dot{y}_2 + 300.0y_2 = 0.253\ddot{u}_g(t)$$
$$\ddot{y}_3 + 2.683\dot{y}_3 + 719.8y_3 = -0.041\ddot{u}_g(t)$$

(ب,٩,٤) التحليل الطيفي للاستجابة Response Spectrum Analysis

تنتج طريقة تراكب الصيغة كل التاريخ الزمني للاستجابة للمنشأ. ولأغراض التصميم، برغم ذلك، ربما لا يحتاج إلى كل التاريخ الزمني؛ وربما تكون قيم الاستجابة العظمى كافية. ولأنه يمكن معالجة كل صيغة للاهتزاز كنظام مستقل ذي حرية من الدرجة الأولى، فإنه يمكن إظهار القيم العظمى للاستجابة الصيغية من طيف الاستجابة. ويمكن إذا جمع الصيغ العظمى لتقدير الاستجابة الكلية العظمى.

(ب,٩,٤,١) حساب القيم العظمى للاستجابة الصيغية Calculation of Modal Response Maxima

دع S_{dn}،و S_{vn}، و S_{an} تمثل الإزاحة، والسرعة، و التسارع المرافقة مع الصيغة n للاهتزاز على التوالي (هذه القيم ستظهر من طيف الاستجابة عند الفترة، $T_n = 2\pi / \omega_n$). إذاً تعطى الإزاحة العظمى بواسطة:

$$(y_n)_{max} = \frac{L_n}{M_n} S_{dn} = \frac{L_n T_n^2}{4\pi^2 M_n} S_{an} \qquad (\text{ب},١٠١)$$

وباستعمال المعادلة (ب,٩٥)، ستكون الإزاحة العظمى للدور j :

$$(U_{jn})_{\max} = \frac{L_n}{M_n} S_{dn}\phi_{jn} = \frac{L_n T_n^2}{4\pi^2 M_n} S_{an}\phi_{jn} \qquad (\text{ب},١٠٢)$$

وتكون القيمة العظمى للقوة الجانبية المكافئة عند الدور j :

$$(f_{in})_{max} = \frac{L_n}{M_n} m_j \phi_{jn} S_{an} \qquad (\text{ب},١٠٣)$$

ويمكن حساب القوة العظمى للقوة الداخلية بواسطة التحليل الساكن للمنشأ المعرض لقوى جانبية مكافئة عظمى.

(ب,٩,٤,٢) جمع القيم العظمى للاستجابة الصيغية Combination of Modal Response Maxima

يوضح الجزء (ب,٩,٤,٢) كيف يمكن استعمال طيف الاستجابة للتنبؤ بالقيم العظمى لمعاملات الاستجابة الصيغية المختلفة. وتوضح طريقة التراكب الصيغية أنه يمكن جمع التواريخ الزمنية للاستجابة الصيغية بواسطة تراكب بسيط لإظهار التاريخ الزمني الكلي للاستجابة. وبرغم ذلك، فإن جمع عظميات الاستجابة الصيغية لإظهار الاستجابة الكلية العظمى ليست مباشرة.

ولا يمكن إظهار القيمة الدقيقة للاستجابة الكلية العظمى مباشرة من العظميات الصيغية؛ لأن العظميات الصيغية تظهر عند أوقات مختلفة. وينتج التراكب المباشر للعظميات الصيغية، والتي تتضمن أن تظهر في آن واحد، حداً أعلى للاستجابة الكلية العظمى؛ ولأي معامل استجابة $r(t)$:

$$r_{max} \le \sum_{n=1}^{N} (r_n)_{max} \qquad (ب,١٠٤)$$

وعادة ما تكون قيم الحد الأعلى هذه محافظة ونادراً ما تستعمل في التصميم. وبدلاً من ذلك، تستعمل طرق الجمع الصيغية اعتمادا على نظرية الاهتزاز العشوائي. والأبسط من هذه هو قيمة جذر مربع المجموع:

$$r_{max} = \sqrt{\sum_{n=1}^{N} (r_n)_{max}^2} \qquad (ب,١٠٥)$$

وتعطي طرق جذر مربع المجموع تقديراً جيداً للاستجابة الكلية العظمى عندما تكون الفترات الطبيعية مفصولة جيداً (بواسطة معامل بحوالي ١,٥ أو أكثر لتضاؤل أكبر من ٥%). وتتوافر الطرق التي تأخذ بالاعتبار الارتباط (correlation) بين الصيغ (Newmark and Rosenblueth,1971; Chopra , 1955) للحالات ذات الصيغ المتقاربة المسافة .

(ب,٩,٥) مناقشة Discussion

تعتمد خطوات طريقتي تراكب الصيغة والتحليل الطيفي للاستجابة على التمثيل للنظام ذي درجة الحرية المتعددة على مجموعة من الأنظمة ذات الحرية من الدرجة لأولى . وخصائص المجموعة للأنظمة ذات الحرية من الدرجة الأولى تكون مثل تلك المطابقة للترددات الطبيعية الدنيا المشاركة بشكل أكبر للاستجابة الكلية من تلك المطابقة للترددات الطبيعية الأعلى. ولأغراض الممارسة، يمكن حساب استجابة النظام ذي درجة الحرية المتعددة بدقة معقولة بواسطة اعتبار فقط الصيغ الدنيا التي تساهم بشكل مؤثر في الاستجابة الكلية للمنشأ. ولبعض المنشآت، ربما يحتاج فقط لاعتبار عدد صغير من الصيغ. وتطبيق كل التحليلات الموصوفة في هذا الجزء على المنشآت الخطية. ويتوافر طرق لتحليل المنشآت ذات درجة الحرية المتعددة الغير خطية، لكنها وراء الهدف لهذا الملحق.