الملحق(أ)

الحركة الاهتزازية
Vibratory Motion

(١,أ) مقدمة INTRODUCTION

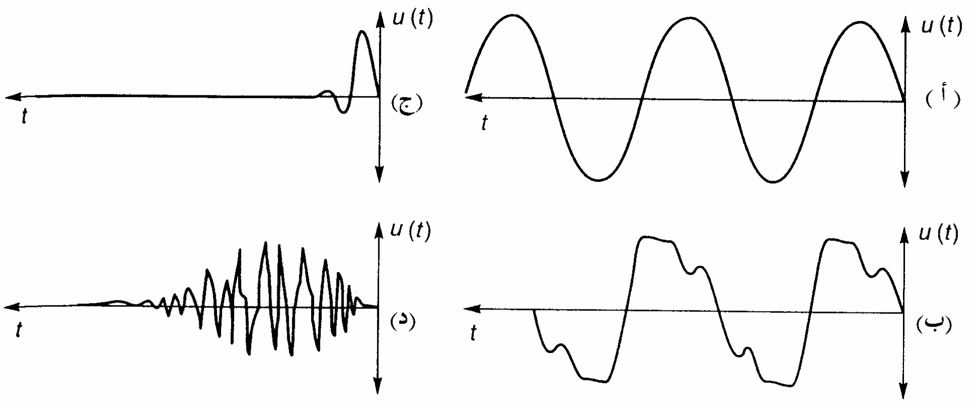
يمكن أن تحدث عدة أنواع مختلفة للتحميل الديناميكي حركة اهتزازية في الترب و المنشآت. ولحل المسائل المتضمنة الاستجابة الديناميكية للترب والمنشآت، فإنه من الضروري أن تكون قادراً على وصف الأحداث الديناميكية. ويمكن أن توصف بطرق مختلفة، ويجب أن يكون المهندس الزلزالي الجيوتكنيكي ملمّا بكل منها. ويعطي هذا الملحق وصفاً مختصراً للحركة الاهتزازية ويدخل مجموعة مصطلحات وصيغ رياضية توصف عادة بواسطتها.

(٢,أ) أنواع الحركة الاهتزازية TYPES OF VIBRATORY MOTION

يمكن تقسيم الحركة الاهتزازية إلى مجموعتين كبيرتين : الحركة الدورية والحركة غير الدورية. والحركات الدورية هي تلك التي تعيد نفسها عند فترات منتظمة من الزمن. رياضياً، تكون الحركة، $u(t)$، دورية إذا وجدت تلك الفترة، T_f، التي لها $u(t)=u(t+T_f)$ لكل t. وأبسط صيغة للحركة الدورية هي الحركة التوافقية البسيطة التي تتغير فيها الإزاحة جيبياً (sinusoidally) مع الزمن. ويمكن أن تنُتج الحركات غير الدورية ، التي لا تعيد نفسها عند فترات ثابتة، من الأحمال التصادمية (مثال، الانفجارات أو الأوزان الساقطة)، أو من الأحمال الانتقالية ذات الفترات الأطول (مثال، الزلازل أو الحركة المرورية). وتوُضح أمثلة للحركات الدورية وغير الدورية في الشكل (١,أ).

وربما تظهر بعض الصيغ للحركة الدورية [مثال، الشكل (١,أ)(ب)] لتكون أكثر تعقيداً من الحركة التوافقية البسيطة، لكن باستعمال التقنيات الرياضية الموصوفة مؤخراً في هذا الملحق، يمكن التعبير عنها كمجموع لسلسلة من الحركات التوافقية البسيطة. وحتى الحركات الانتقالية غير الدورية مثل تلك للشكل (١,أ)(ج) و (د) يمكن تمثيلها كحركات دورية بواسطة افتراض أنها تعيد

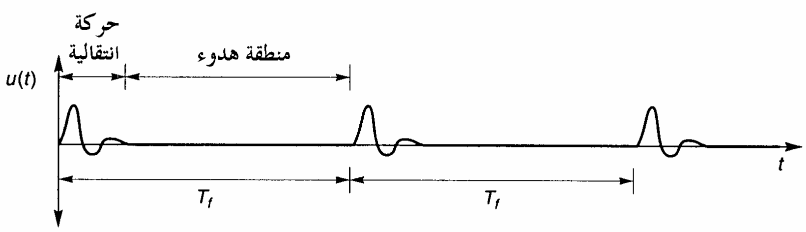
نفسها بعد جزء من منطقة " الهدوء " التي لا تظهر خلالها حركة [الشكل (٢,أ)]. وباستعمال هذه التقنية، يمكن أيضاً التعبير حتى عن الحركة الانتقالية كحركة دورية. وأصبح هذا أداة قوية جداً للتحليل الديناميكي للأنظمة الخطية، حيث تسمح قاعدة التراكب (superposition) بالتعبير عن الاستجابة للتحميل الانتقالي كمجموع لاستجابات سلسلة من الأحمال التوافقية البسيطة.



الشكل (١,أ) الحركة الدورية وغير الدورية : (أ) الحركة التوافقية البسيطة، (ب) حركة دورية عامة؛ (ج) حركة عابرة (استجابة للتحميل التصادمي)؛ (د) حركة عابرة (حركة أرضية زلزالية).

(١,٢,أ) الحركة التوافقية البسيطة Simple Harmonic Motion

يمكن وصف الحركة التوافقية البسيطة بواسطة حركة جيبية عند تردد ثابت. ويمكن تعريف ميزاتها الأكثر أهمية بواسطة ثلاث كميات: السعة، والتردد، والطور. ويمكن وصف الحركة التوافقية البسيطة في طرق مختلفة، اثنتان منها هي التي ستطرح في الأجزاء التالية : باستعمال الرمز المثلثي (trigonometric notation) أو باستعمال الرمز المركب (complex notation). وكلا الرمزين متكافئ ويشاع استعماله في هندسة الزلازل الجيوتقنية.



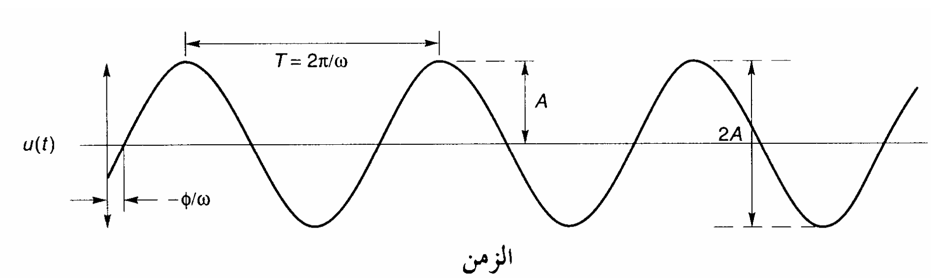
الشكل (٢,أ) تمثيل **الحركة الانتقالية كحركة دورية باستعمال منطقة هدوء اصطناعية تعيد الحركة نفسها بشكل** غير محدد **عن فترة** T_f **.**

(٢,٢,أ) الرمز المثلثي للحركة التوافقية البسيطة **Trigonometric Notation for Simple Harmonic Motion**

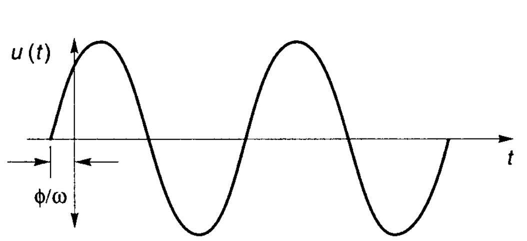
وفي أبسط صيغها، يمكن التعبير عن الحركة التوافقية البسيطة بمصطلح الإزاحة، $u(t)$، باستعمال الرمز المثلثي: وعلى سبيل المثال:

$$u(t) = A \ \sin(\omega t + \phi) \qquad (١,أ)$$

حيث تمثل A سعة الإزاحة،و ω التردد الدوري،، و φ زاوية الطور. ويوُضح التاريخ الزمني لهذه الإزاحة التوافقية البسيطة في الشكل (٣,أ). ويرجع للسعة، A، أحيانا بالسعة المفردة لتمييزها عن السعة المزدوجة (والتي تمثل الإزاحة من القمة إلى القمة) والتي يرجع لها في بعض المراجع الأقدم لهندسة الزلازل الجيوتقنية. ويصف التردد الدوري معدل التذبذب بمصطلح الراديان على وحدة الزمن، حيث يطابق ٢π راديان دورة واحدة للحركة. وتصف زاوية الطور كمية الزمن التي تُغير بواسطتها القمم (ونقاط الصفر) من تلك لدالة الجيب النقية، كما هو ممثل في الشكل (٤,أ). وستكون الإزاحة صفراً عندما تكون $\phi + \omega t = ٠$ أو، نتيجة لذلك، عندما $t = -\phi/\omega$. وتشير زاوية الطور الموجبة إلى أن الحركة تسبق الدالة الجيبية؛ وتتأخر عن الدالة الجيبية إذا كانت زاوية الطور سالبة. وتفُهم فكرة التردد الدوري بسهولة



الشكل (٣,أ) التاريخ الزمني للإزاحة التوافقية البسيطة.

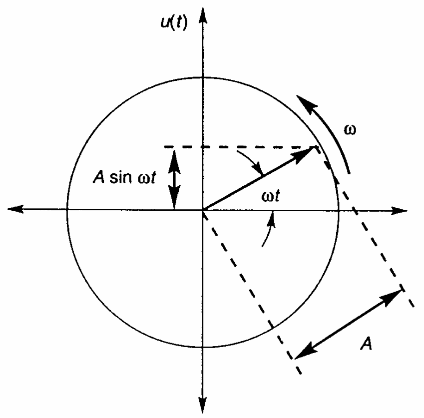


الشكل (٤,أ) تأثير زاوية الطور في موضع المنحنى الجيبي.

أكثر بواسطة اعتبار الحركة للمتجه الدوار بطول A الموضح في الشكل (٥,أ). فإذا دار المتجه عكس عقارب الساعة حول نقطة أصله عند سرعة زاوية، ω، من موضعه الأفقي الأولي، فإن الإزاحة، $u(t)$، تعطى بواسطة المركبة الرأسية للمتجه.

$$u(t) = A \sin \omega t$$

وتزداد المركبة الرأسية إلى القيمة العظمى عند $\omega t = \pi/2$، ثم تتناقص خلال الصفر (عند $\omega t = \pi$) وتصل إلى قيمتها العظمى السالبة عند $\omega t = 3\pi/2$. وتستمر عائدة إلى موضعها الأصلي ومن ثمّ تعيد العملية كلها.



الشكل (٥,أ) تمثيل المتجه الدوار للحركة التوافقية البسيطة بزاوية طور مساوية للصفر.

والزمن المطلوب للمتجه الدوار لعمل دورة كاملة هو الزمن المطلوب لدورة واحدة للحركة. ويرجع إلى هذا الزمن بفترة الاهتزاز، T، ويرتبط بالتردد الدوري بواسطة :

$$T = \frac{\text{المسافة الزاوية لدورة واحدة}}{\text{السرعة الزاوية}} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (٢,أ)$$

ويعبر عن مقياس آخر شائع لتردد التذبذب بمصطلح عدد الدورات التي تظهر في فترة محددة من الزمن. وحيث إن فترة الاهتزاز تمثل الزمن على الدورة، فإنه يجب أن يكون عدد الدورات في وحدة الزمن مقلوبها، بحيث يكون :

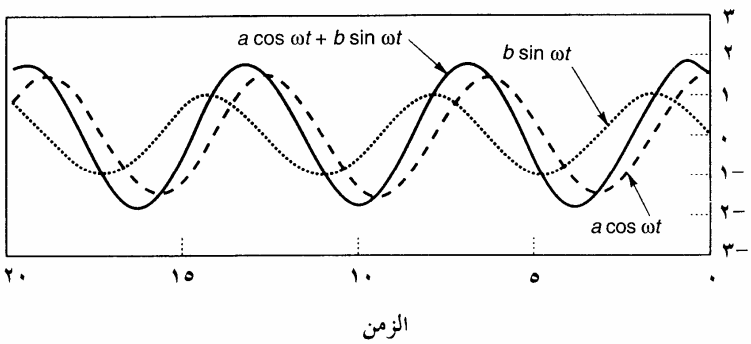
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad (أ,٣)$$

ويعبر عنه عادة بالدورات على الثانية أو هيرتز (Hz).

ويمكن أيضاً وصف الحركة التوافقية البسيطة كمجموع دالة الجيب ودالة جيب التمام، بحيث يكون،

$$u(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \qquad (أ,٤)$$

وكما هو موضح في الشكل (٦,أ)، فإن مجموع دالتي الجيب وجيب التمام أيضاً يكون منحنى جيبياً بحيث يتردد عند تردد دوري ω. وبرغم ذلك، لا تكون سعته هي المجموع البسيط لسعات دالتي الجيب وجيب التمام، ولا تظهر قممها عند نفس الأزمنة لتلك لدوال الجيب وجيب التمام. وتمثيل المتجه الدوار لهذه الدالة ممثل في الشكل (٧,أ). وحيث إن $\cos\theta = \sin(\theta + 90)$ فإن المتجه الدوار بطول a يجب أن يكون متقدماً بـ ٩٠° على المتجه بطول b. و المركبات الرأسية للمتجهين a و b هي $a \cos \omega t$ و $b \sin \omega t$، على التوالي. وكما هو ممثل في الشكل (٧,أ)(أ)،

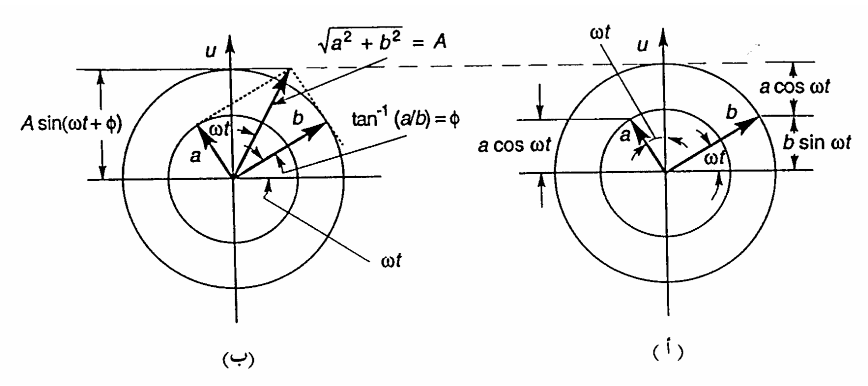


الشكل (٦, أ) ينتج مجموع دالتي الجيب وجيب التمام لنفس التردد منحنى جيبياً بنفس التردد. وتعتمد سعة وطور المنحنى الجيبي على سعات دالتي الجيب وجيب التمام.

فإن القيمة الكلية لـ $u(t)$ تعطى بواسطة $u(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$. ويمكن التعبير عن الحركة بصيغ مختلفة بواسطة اعتبار محصلة المتجهين a و b، كما في الشكل (٧,أ)(ب). وسيكون طول المحصلة $\sqrt{a^2+b^2}$ وستسبق b بزاوية $\phi = tan^{-1}(a/b)$. وطبقاً لذلك، تكون المركبة الرأسية للمحصلة:

$$u(t) = A\sin(\omega + \phi) \qquad (٥,أ)$$

حيث $A = \sqrt{a^2+b^2}$ هي المحصلة و $\phi = tan^{-1}(a/b)$ زاوية الطور للحركة.



الشكل (٧,أ) تمثيل المتجه الدوار للحركة التوافقية البسيطة. **مجموع المركبات الرأسية لمركبات الجيب وجيب التمام** في **(أ) يكون مساوياً للمركبة الرأسية** لمحصلة **مركبات الجيب وجيب التمام** في **(ب).**

(١,٢,٢,أ) الرمز المركب للحركة التوافقية البسيطة Complex Notation for Simple Harmonic Motion

تستعمل التوصيفات المثلثية للحركة التوافقية البسيطة دوال شائعة يسهل تصورها. ولعدد من التحليلات الديناميكية، برغم ذلك، يقود استعمال الرمز المثلثي إلى أسئلة طويلة جداً وحرجة. وتصبح هذه التحليلات أبسط بكثير عندما توصف الحركات باستعمال الرمز المركب (وتشير الكلمة مركب إلى المتغيرات المركبة المستعملة، وليس إلى أن الرمز معقد بشكل محدد). ويمكن اشتقاق الرمز المركب من الرمز المثلثي باستعمال قانون إيلير (Euler's law) :

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha \qquad (٦,أ)$$

حيث i العدد التخيلي $i = \sqrt{-1}$. وتكون الكمية $e^{i\alpha}$ العدد المركب؛ ولها جزآن، الجزء الحقيقي والجزء التخيلي، والذي يمكن كتابتهما كالتالي:

$$Re(e^{i\alpha}) = \cos\alpha$$
$$Im(e^{i\alpha}) = \sin\alpha$$

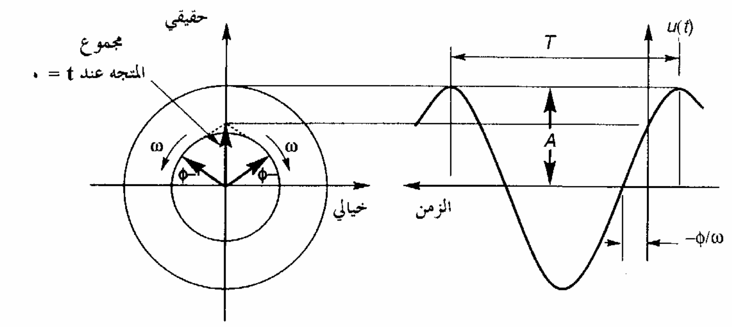
ويمكن استعمال قانون إيلير لتوضيح أن:

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2} \qquad \sin\alpha = -i\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2} \tag{أ,٧}$$

ويعطي استبدال هذه التعبيرات في العبارة الجبرية العامة لمعادلة الحركة التوافقية البسيطة (٤,أ)،

$$u(t) = a\frac{e^{i\omega t}+e^{-i\omega t}}{2} - bi\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2}$$
$$= \frac{a-ib}{2}e^{i\omega t} + \frac{a+ib}{2}e^{-i\omega t} \tag{أ,٨}$$

وربما ينظر إلى هذه الصيغة للإزاحة كزوج من المتجهات الدوارة في شكل أرجاند (Argand diagram) ويمثل شكل أرجاند عدداً مركباً بيانيا كمتجه بمركبتين حقيقية وخيالية متعامدتين. ومع أنها عادة ما ترسم مع المحور الحقيقي المتجه أفقياً، فإن شكل أرجـاند الدوار للشكل (٨,أ)(أ) سيساعد على تمثيل كيف يصف هذا الرمز المركب الحركة التوافقية البسيطة. وفي شكل أرجاند، يمُثل المصطلح $e^{I\omega t}$ *بواسطة* متجه بوحدة طول يدور باتجاه عقارب الساعة عند سرعة زاوية، ω. ويمكن إذا تمثيل $e^{-i\omega t} = e^{i(-\omega)t}$ بواسطة وحدة المتجه الدوارة باتجاه عقارب الساعة عند سرعة زاوية، ω-، والتي تكون مكافئة للدوران المعاكس لعقارب الساعة عند سرعة زاوية ω. وطبقاً لذلك، يمكن تمثيل الحد الأول في المعادلة (٨,أ) بواسطة متجه ذي جزء حقيقي α/٢، وجزء خيالي، b-/٢، يدور عند ω، والحد الثاني بواسطة متجه آخر بنفس الجزء الحقيقي، لكن الجزء الخيالي، b/٢، يدور عكس عقارب الساعة عند ω. ويكون طول كل متجه $\sqrt{(a/2)^2+(b/2)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}$. وكما هو موضح في الشكل (٨,أ)(أ)، يكون مجموع المتجهات حقيقياً (تلغي بعض المتجهات الخيالية بعضها الآخر بشكل دائم). ويوضح الشكل (٨,أ)(ب) كيف أن مجموع المتجه يصف حركة توافقية بسيطة بسعة $A = \sqrt{a^2+b^2}$ و تردد دوري ω.



(ب) (أ)

الشكل (٨,أ) كيف أن المتجهات الدوارة مع عقارب الساعة بطول $A/2$ تنتج حركة توافقية بسيطة. لاحظ أن زوايا الطور تقاس من المحور الأفقي في اتجاه دوران المتجه.

(٢,٣,أ) مقاييس أخرى للحركة Other Measures of Motion

ليست الإزاحة المعامل الوحيد الذي يمكن استعماله لوصف الحركة الاهتزازية. وفي الحقيقة، هناك معاملات أخرى ذات أهمية كبيرة. وإذا كان تغيير الإزاحة مع الزمن معروفاً، برغم ذلك، فإنه يمكن تحديد معاملات أخرى ذات أهمية. وينتج تفاضل العبارة الجبرية للإزاحة التوافقية البسيطة عبارات أخرى للسرعة والتسارع :

الإزاحة $$u(t) = A\sin(\omega t + \phi) \quad \text{(٩,أ)(أ)}$$

السرعة $$\dot{u}(t) = \frac{du}{dt} = \omega A\cos(\omega t + \phi) \quad \text{(٩,أ)(ب)}$$

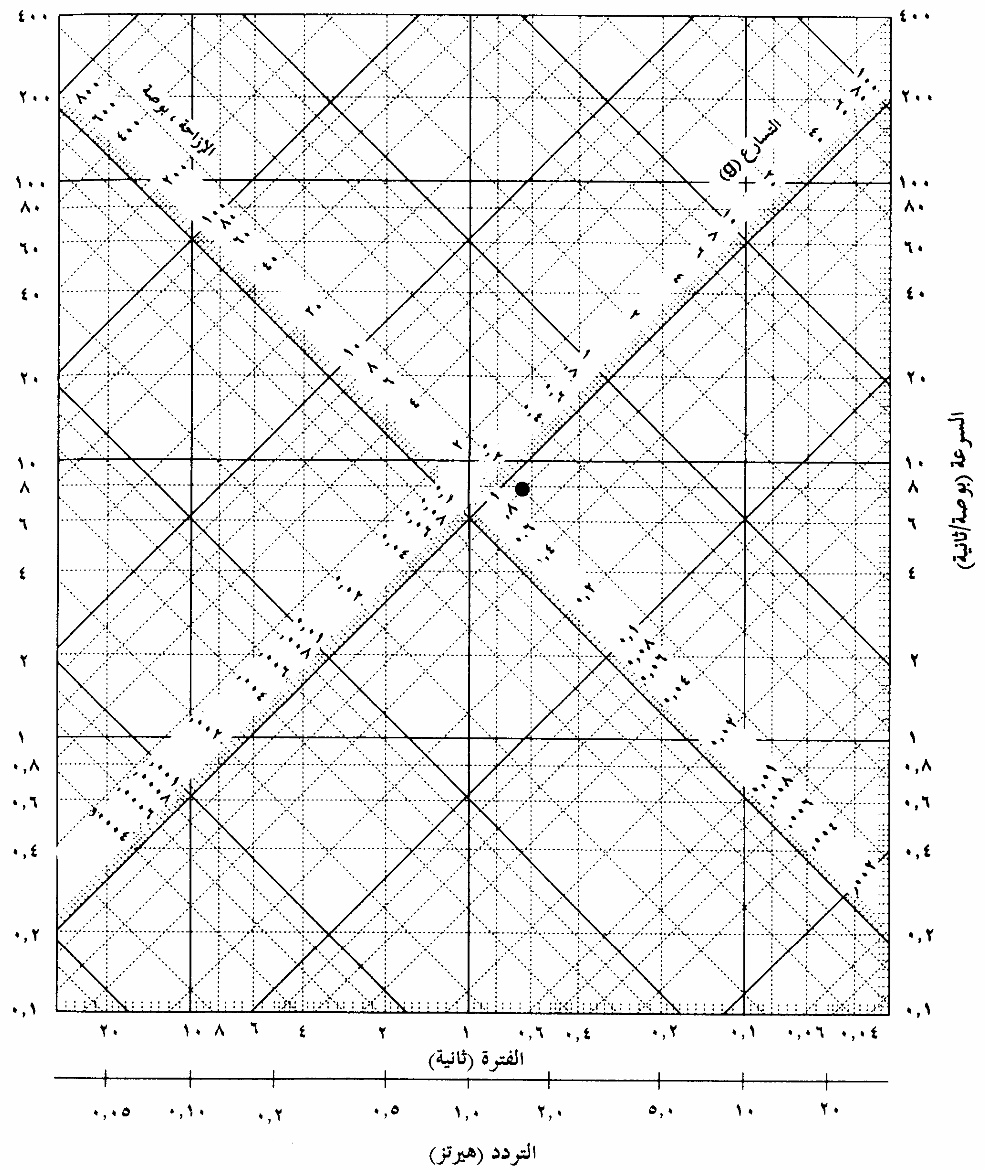
التسارع $$\ddot{u}(t) = \frac{d^2u}{dt^2} = -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) = -\omega^2 u \quad \text{(٩,أ)(ج)}$$

لاحظ أنه عندما تكون سعة الإزاحة A، فإن سعة السرعة تكون ωA، وسعة التسارع $\omega^2 A$. وهكذا يرتبط التردد بسعات الإزاحة، والسرعة، والتسارع للحركة التوافقية في طريقة بحيث إن معرفة التردد أو أي من السعات، أو معرفة أي اثنتين من السعات، يسمح بحساب كل الكميات الأخرى. وتسمح هذه الخاصية المهمة والمفيدة للحركات التوافقية باستعمال الرسومات الثلاثية (tripartite plots)، والتي يمكن فيها وصف الحركة التوافقية بشكل كامل في مصطلحات التردد وسعات الإزاحة، والسرعة، والتسارع بواسطة نقطة واحدة. ويشاع استعمال الرسومات الثلاثية، موضح مثال لها في الشكل (٩,أ)، لوصف الحركات الأرضية الزلزالية. ومن المهم ملاحظة أن هذه العلائق تطبق فقط للحركات التوافقية فقط، وأنه يجب إظهار العلائق بين الإزاحة، والسرعة، والتسارع لأنواع أخرى من الحركة بواسطة التفاضل و / أو التكامل.

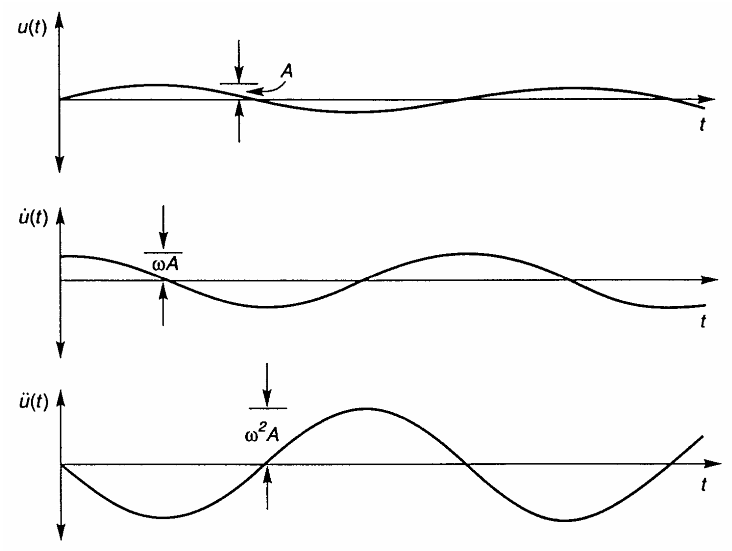
ويكشف اختبار المعادلات (٨,أ) أنه بالإضافة إلى الحصول على سعات مختلفة، فإن من الإزاحة، والسرعة، والتسارع تكون خارج الطور (out of phase) كل مع الأخرى [الشكل (١٠,أ)]. ويمكن ملاحظة أن السرعة تسبق الإزاحة بواسطة أن $\pi/2$ راديان، أو ٩٠°، ويسبق التسارع السرعة بواسطة نفس الكمية. وتكون العلائق بين الإزاحة، والسرعة،والتسارع للحركات التوافقية،في الرمز المثلثي والمركب،

$$u(t) = A\sin\omega t \qquad u(t) = Ae^{i\omega t} \quad \text{(١٠,أ)(أ)}$$

$\dot{u}(t) = i\omega A e^{i\omega t}$ $\qquad$ $\dot{u}(t) = \omega A\cos\omega t = \omega A\sin(\omega t + \pi/2)$ $\qquad$ (١٠,أ)(ب)



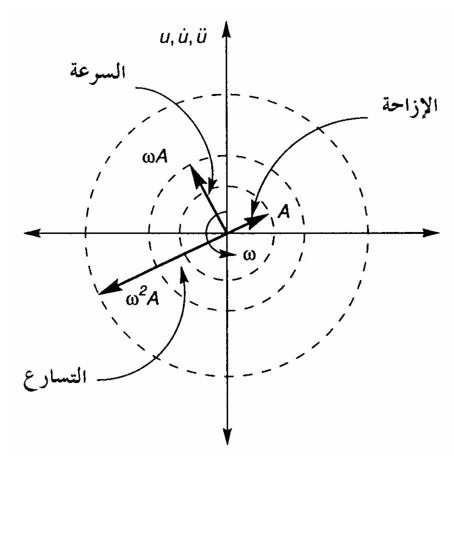
الشكل (٩, أ) رسم ثلاثي للحركة التوافقية. تصف النقطة عند المركز الحركة التوافقية عند فترة بـ ٠,٦٥ ثانية بسعة إزاحة بـ ٠,٨ بوصة، وسعة سرعة بـ ٨,٠ بوصة/ثانية، وسعة تسارع بـ ٠,٢ g. (After Richart , et al., 1970).



الشكل (١٠,أ) السجلات الزمنية للإزاحة، والسرعة، والتسارع. لاحظ أن التسارع يسبق السرعة بواسطة ربع دورة والإزاحة بواسطة نصف دورة.

$$\ddot{u}(t)= i^2\omega^2 A e^{i\omega t} = -\omega^2 A e^{i\omega t} \qquad \ddot{u}(t)=-\omega^2 A\sin\omega t = \omega^2 A\sin(\omega t+\pi) \quad ((١٠,أ)(ج)$$

ويمكن تصوير العلاقة بين الإزاحات، والسرعات، والتسارعات التوافقية في شكل ثلاثة متجهات تدور بعكس عقارب الساعة عند سرعة زاوية ω [الشكل (١١,أ)]. ويكون متجه التسارع ٩٠° (أو $\pi/2$ راديان) قبل متجه الإزاحة.

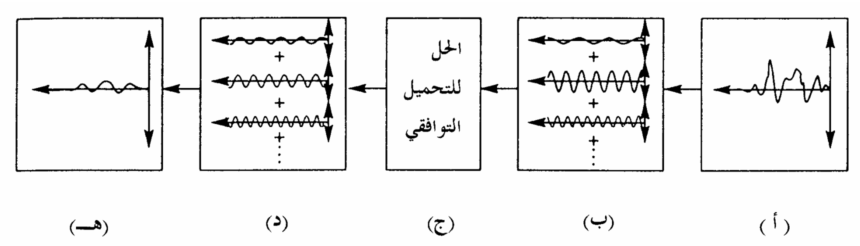


الشكل (أ,١١) تمثيل المتجه الدوار للإزاحة، والسرعة، والتسارع. لاحظ كيف أن التسارع يسبق السرعة بواسطة ٩٠° والإزاحة بواسطة ١٨٠°.

(أ,٣) سلسلة فوريه FOURIER SERIES

بينما كان يدرس مسائل سريان الحرارة في بداية القرن التاسع عشر، أوضح الرياضي الفرنسي جي. بي. جي فوريه أن أي دالة دورية تحقق شروطاً محددة يمكن أن يعبر عنها كمجموع سلسلة من المنحنيات الجيبية بسعة، وتردد، وطور مختلفة. وحيث إن الظروف لوجود سلسلة فوريه تكون تقريباً دائماً محققة للظروف التي تصف بشكل دقيق العمليات الفيزيائية (Ramirez , 1985)، فإنها تكون أداة مفيدة بشكل رائع في عدد من فروع العلوم والهندسة.

ولا تكون هندسة الزلازل الجيوتقنية مستثناة. وبواسطة تجزئة دالة التحميل المعقدة كتلك المطبقة بواسطة الحركة الأرضية الزلزالية إلى مجموع لسلسلة من دوال التحميل التوافقية البسيطة، فإن مبدأ التركيب يسمح باستعمال الحلول المتوافرة للتحميل التوافقي لحساب الاستجابة الكلية (معطى أن النظام يكون خطياً)، كما هو ممثل بيانياً في الشكل (أ,١٢).



شكل (أ,١٢) العملية التي يمكن أن يسمح بواسطتها بتمثيل سلسلة فوريه للتحميل المعقد باستعمال الحلول البسيطة نسبياً للتحمل التوافقي لإنتاج الاستجابة الكلية: (أ) السجل الزمني للتحميل؛ (ب) تمثيل السجل الزمني للتحميل كمجموع لسلسلة من الأحمال التوافقية؛ (ج) حساب الاستجابة لكل حمل توافقي؛ (د) تمثيل الاستجابة كمجموع لسلسلة من الاستجابات التوافقية؛ (هـ) مجموع الاستجابات التوافقية لإنتاج السجل الزمني للاستجابة.

(أ,٣,١) الصيغة المثلثية Trigonometric Form

وحيث إن سلسلة فوريه تكون ببساطة مجموع الدوال التوافقية البسيطة، فإنه يمكن التعبير عنها باستعمال الرمز المثلثي أو الرمز المركب. وتكون الصيغة المثلثية العامة لسلسلة فوريه للدالة ذات الفترة، T_f،

$$x(t) = a_o + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos\omega_n t + b_n \sin\omega_n t) \qquad (أ,١١)$$

حيث تكون معاملات فوريه:

$$a_o = \frac{1}{T_f}\int_0^{T_f} x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T_f}\int_0^{T_f} x(t)\cos\omega_n t dt$$

$$b_n = \frac{2}{T_f}\int_0^{T_f} x(t)\sin\omega_n t dt$$

و $\omega_n = 2\pi n/T_f$. ويمثل الحد a_o القيمة المتوسطة لـ $x(t)$ على المدى t = ٠ إلى $t = T_f$؛ وتكون قيمته صفراً في عدد من تطبيقات هندســة الزلازل الجيوتقنية. لاحظ أن الترددات، ω_n، ليست اعتباطية؛ وبرغم ذلك، فإنها تتباعد بالتساوي عند زيادة ترددية ثابتة $\Delta\omega = 2\pi/T_f$.

المثال (١,أ)

ليس من الصعب حساب معاملات فوريه للدوال البسيطة. اعتبر الدالة الموجبة المربعة الموضحة في الشكل (المثال ١, أ). وتوصف الدالة المربعة على فترتها، T_f، بواسطة:

$$x(t) = \begin{cases} +A & 0 < t \le \frac{T_f}{4} \\ -A & \frac{T_f}{4} < t \le \frac{3T_f}{4} \\ +A & \frac{3T_f}{4} < t \le T_f \end{cases}$$

وحيث يرى بسهولة أن القيمة المتوسطة لـ $x(t)$ تكون صفرا، فإن المعامل a_o =٠ . و يمكن حساب قيمة a_1 كالتالي:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{T_f}\int_0^{T_f} x(t)\cos\omega_1 t dt \\ &= \frac{2}{T_f}\left[A\int_0^{T_f/4}\cos\omega_1 t dt - A\int_{T_f/4}^{3T_f/4}\cos\omega_1 t dt + A\int_{3T_f/4}^{T_f}\cos\omega_1 t dt\right] \\ &= \frac{2A}{\omega_1 T_f}\left[\sin\frac{\omega_1 T_f}{4} - \left(\sin\frac{3\omega_1 T_f}{4} - \sin\frac{\omega_1 T_f}{4}\right) + \left(\sin\omega_1 T_f - \sin\frac{3\omega_1 T_f}{4}\right)\right] \end{aligned}$$

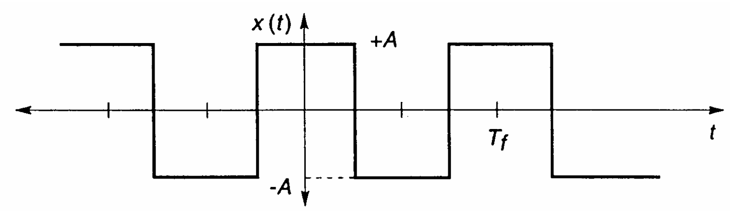
ويؤول التعويض بـ $\omega_1 T_f$ =٢ π إلى:

$$a_1 = \frac{A}{\pi}(1+2+1) = \frac{4A}{\pi}$$

و يعطي التكرار لجميع n :

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{+4A}{n\pi} & n = 1,5,9,... \\ \dfrac{-4A}{n\pi} & n = 3,7,11,... \\ O & n = even\ \ integers \end{cases}$$

$$b_n = 0 \quad for\ \ all\ n$$



الشكل (المثال ١, أ) داله موجبه مربعة.

لذا تكون دالة فوريه:

$$x(t) = \frac{4A}{\pi}(\cos\omega_1 t - \frac{1}{3}\cos 3\omega_1 t + \frac{1}{5}\cos 5\omega_1 t - \frac{1}{7}\cos 7\omega_1 t + ...)$$

حيث ω_1 = ٢ π / T_f. وحدود الجيب كلها صفر لأن الدالة مربعة، مثل دالة جيب التمام، ودالة زوجية (even function)[بمعنى، يكون لها $f(-t) = f(t)$]. وللدالة الفردية (odd function) [$-f(-t) = f(t)$]، تكون حدود جيب التمام صفراً. وللدالة التي لا تكون زوجية ولا فردية، فإن سلسلة فوريه ستحتوي على كل من حدود الجيب وجيب التمام.

وتمثل سلسلة فوريه الدالة بشكل دقيق فقط لـ $n = \infty$. وإذا بترت السلسلة عند قيمة محددة لـ n، فإن سلسلة فوريه فقط تقرب الدالة. ولعدد من الدوال، برغم ذلك، يكون التقريب إلى حد ما جيداً وحتى عندما تكون n نسبياً صغيرة. وتستعمل هذه الخاصية غالباً كميزة كبيرة في التحليلات الديناميكية للترب والمنشآت.

ومن المعادلات (٥,أ) و (١١,أ)، يكون ظاهراً إمكانية التعبير عن سلسلة فوريه كالتالي :

$$x(t) = c_o + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(\omega_n t + \phi_n) \qquad (١٢,أ)$$

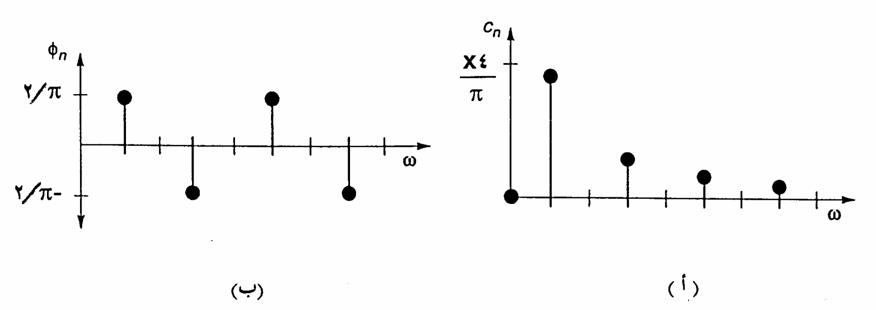
حيث $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$، $c_o = a_o$، و $\phi_n = \tan^{-1}(a_n / b_n)$. وفي هذه الصيغة، تكون c_n و ϕ_n السعة والطور، على التوالي، للحد n التوافقي. ويعرف الرسم لـ c_n مقابل ω_n بطيف سعة فوريه؛ ورسم ϕ_n مقابل ω_n بطيف طور فوريه. وأطياف سعة فوريه مفيدة جداً في هندسة الزلازل الجيوتقنية ـ كما نوقش في الفصل ٣، حيث تصف بشكل فعال محتوى التردد للحركة الزلزالية.

المثال (٢,أ)

تم بسهولة تحديد أطياف السعة والطور الفوريه للموجة المربعة للمثال (١,أ). وتكون القيم لـ c_n و ϕ_n للحدود الثمانية الأولى للسلسلة كالتالي:

$$C_0 = 0$$
$$C_1 = \frac{4A}{\pi} \qquad \phi_1 = \frac{\pi}{2}$$
$$C_2 = 0$$
$$C_3 = \frac{4A}{3\pi} \qquad \phi_3 = \frac{-\pi}{2}$$
$$C_4 = 0$$
$$C_5 = \frac{4A}{5\pi} \qquad \phi_5 = \frac{\pi}{2}$$
$$C_6 = 0$$
$$C_7 = \frac{4A}{7\pi} \qquad \phi_7 = \frac{-\pi}{2}$$

ورسمت الأطياف في الشكل (المثال ٢,أ).



الشكل (المثال ٢,أ) أطياف فوريه للدالة المربعة للمثال (١,أ) : (أ) طيف سعة فوريه؛ (ب) طيف طور فوريه.

(٢,٣,أ) الصيغة الأسية Exponential Form

يمكن أيضاً التعبير عن سلسلة فورييه في الصيغة الأسية. يعطى التعويض بالمعادلات (٧,أ) إلى (١٠,أ) لجميع n

$$x(t) = a_o + \sum_{n=1} \left(\frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\omega_n t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\omega_n t} \right) \qquad (١٣,أ)$$

وبتعريف معاملات فورييه جديدة:

$$c_o^* = a_0$$
$$c_n^* = \frac{a_n - ib_n}{2}$$
$$c_{-n}^* = \frac{a_n + ib_n}{2}$$

حيث يشير الرمز * إلى الطبيعة المركبة للمعامل، ويمكن إعادة كتابة سلسلة فورييه كالتالي:

$$x(t) = c_o^* + \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_n^* e^{i\omega_n t} + c_{-n}^* e^{-i\omega_n t} \right) \qquad (١٤,أ)$$

حيث $\omega_n = -\omega_n$، ويمكن تغيير نهايات الجمع لكتابة سلسلة فورييه في الصيغة الأكثر اختصاراً،

$$x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^* e^{i\omega_n t} \qquad (١٥,أ)$$

ويمكن تحديد معاملات فورييه المركبة، c_n^*، مباشرة من $x(t)$ كالتالي:

$$c_n^* = \frac{1}{T_f} \int_0^{T_f} x(t) e^{-i\omega_n t} dt \qquad (١٦,أ)$$

المثال (٣,أ)

أحسب معاملات فورييه المركبة للموجة المربعة للمثال (١,أ).

الحـل

حيث إن القيمة المتوسطة للموجة المربعة تساوي صفراً، فإن $c_o^* = 0$. و لـ n = +١،

تعطى المعادلة (١٦,أ)

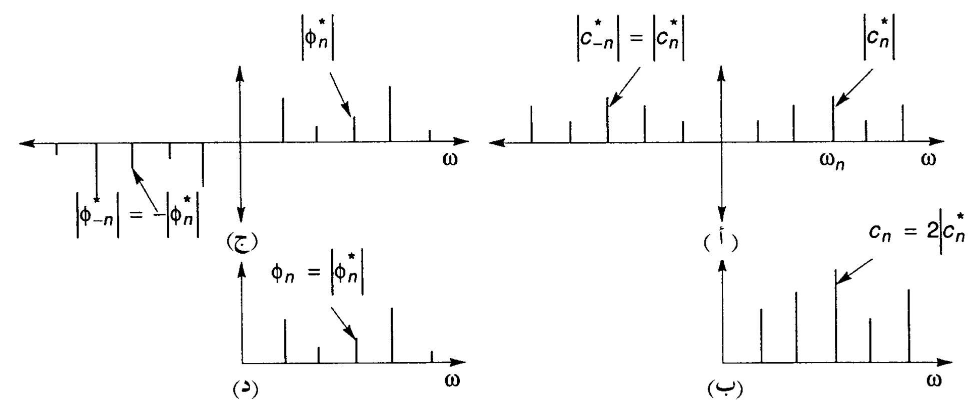
$$C_1^* = \frac{1}{T_f} \left[X \int_0^{T_f/4} e^{i\omega_1 t} dt - X \int_{T_f/4}^{3T_f/4} e^{i\omega_1 t} dt + X \int_{3T_f/4}^{T_f} e^{i\omega_1 t} dt \right]$$
$$= \frac{x}{i\omega_1 T_f} \left[e^{i\omega_1 t T_f/4} - \left(e^{i3\omega_1 T_f/4} - e^{i\omega_1 T_f/4} \right) + \left(e^{i\omega_1 T_f} - e^{i3\omega_1 T_f/4} \right) \right]$$

$$= \frac{X}{i2\pi}(2e^{i\pi/2} - 2e^{i3\pi/2} + e^{i2\pi})$$
$$= \frac{X}{i2\pi}\left(2i + 2i + 0\right) = \frac{2x}{\pi}$$

لاحظ أنه بالرغم من أن $c_o^* = c_o = a_o$ ، إلا أن التعريفات لـ c_n^* و c_{-n}^* تشير إلى أن

$$|c_n^*| = \sqrt{\left[Re\left(c_n^*\right)\right]^2 + \left[Im\left(c_n^*\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{c_n}{2}$$
$$|c_{-n}^*| = \sqrt{\left[Re\left(c_{-n}^*\right)\right]^2 + \left[Im\left(c_{-n}^*\right)\right]^2} = \sqrt{\left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + \left(\frac{b_n}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{a_n^2 + b_n^2}}{2} = \frac{c_n}{2} \quad (١٧,أ)$$

(بمعنى، في الصيغة الأسية، ترافق نصف السرعة بترددات موجبة والنصف الآخر بترددات سالبة). وتكون زوايا الطور عند الترددات الموجبة والسالبة متساوية، لكن بإشارة متعاكسة؛ وبالتالي، تلغي الأجزاء التخيلية بعضها [كما يجب عليها إذا كانت $x(t)$ دالة حقيقية]. وتستعمل معاملات فورييه المركبة في بعض الأحيان (بالرغم من ندرتها في تطبيقات هندسة الزلازل الجيوتقنية) لرسم أطياف ثنائية الأوجه (two- sided spectra) والتي ترتبط بأطياف الوجه الواحد (one- sided spectra) الأكثر تقليدية، كما هو موضح في الشكل (المسألة ٣,أ).



الشكل المسألة (٣,أ) مقارنة أطياف فورييه أحادية وثنائية الجانب. طيف سعة فورييه ثنائي الجانب (أ) يكون متماثلاً بسعات على كل جانب للمحور ω= ٠ تساوي نصف السعة للطيف أحادي الجانب (ب). (تكون السعة عند ω = ٠ مساوية لكليهما). ويكون طيف الطور ثنائي الجانب (ج) متماثلاً، لكن الطور عند الترددات الموجبة يكون مساوياً لطور الطيف أحادي الجانب (د).

(٣,٣,أ) تحول فورييه المنفصل Discrete Fourier Transform

في عدد من تطبيقات هندسة الزلازل الجيوتقنية، وتوصف معاملات التحميل أو الحركة بواسطة عدد محدود من نقاط البيانات بدلاً من الدالة التحليلية (analytical function). وفي مثل هذه

الحالات تظهر معاملات فورييه بواسطة المجموع بدلا من التكامل. وللمتغير $x(t_k)$، k=1,N ، حيث $t_k = k\Delta t$، يعطى تحول فورييه المنفصل (DFT) بواسطة:

$$X(\omega_n) = \Delta t \sum_{k=1}^{N} x(t_k) e^{-i\omega_n t_k} \quad (أ,١٨ أ)$$

حيث $\omega_n = n\Delta\omega = 2\pi n / N\Delta t$. وبإستعمال قانون إيلير، يمكن أيضاً كتابة تحول فورييه المنفصل كالتالي:

$$X(\omega_n) = \Delta t \sum_{k=1}^{N} \left[x(t_k) \cos \omega_n t_k - i x(t_k) \sin \omega_n t_k \right] \quad (أ,١٨ ب)$$

لاحظ أن معاملات فورييه لتحول فورييه المنفصل تملك وحدات المتغير الأصلي مضروبة في الزمن.

ويمكن أيضاً عكس تحول فورييه المنفصل ، بحيث إنه، يمكن التعبير عن مجموعة من البيانات متباعدة عند فترات تردد متساوية، $\Delta\omega$، كدالة في الزمن، باستعمال معكوس تحول فورييه المنفصل (inverse discrete Fourier transform , IDFT).

$$x(t_k) = \Delta\omega \sum_{n=1}^{N} X(\omega_n) e^{i\omega_n t_k} \quad (أ,١٩أ)$$

أو:

$$x(t_k) = \Delta\omega \sum_{n=1}^{N} \left[X(\omega_n) \cos \omega_n t_k + i X(\omega_n) \sin \omega_n t_k \right] \quad (أ,١٩ب)$$

ويمكن برمجة أي من هذه التعبيرات بسهولة على الحاسب الشخصي؛ حيث تأخذ n على N قيماً مختلفة، وستجري عملية الجمع عدد N من المرات. ويتناسب الزمن المطلوب للحسابات لـ تحول فورييه المنفصل (أو معكوس تحول فورييه المنفصل)، مع ذلك، لـ N^2 .

(أ,٣,٤) تحول فورييه السريع Fast Fourier Transform

تم تطوير تحول فورييه المنفصل منذ فترة طويلة قبل توافر الحاسبات الآلية، وكان استعماله، وحتى للقيم الوسطية لـ N، يتطلب إلى حد كبير عملاً مكثفاً. ومع بداية ١٨٠٥م، وصفت البداية للطريقة الأكثر كفاءة (Brigham , 1974). ومع تطور الحاسبات الرقمية في الستينيات من القرن التاسع عشر، طور كولي وتوكي (Cooley and Tukey , 1965) خطوات حسابية في حالة كون N تكون مرفوعة للأس ٢ الذي أصبح معروفاً بمحول فورييه السريع (Fast Fourier transform, FFT). وبواسطة إجراء عمليات مكررة على المجموعات التي تبدأ بعدد مفرد وتزيد في الحجم بواسطة معامل ٢ عند كل مراحل j (حيث $N=2^j$)، فإن الزمن المطلوب لإكمال المحول تتناسب مع $N \log_2 N$. ونتيجة لذلك، يكون تحول فورييه السريع أكثر كفاءة بكثير من تحول فورييه المنفصل. وعلى سبيل المثال، عند $N =$ ٢٠٤٨، يكون تحول فورييه السريع أسرع أكثر من ١٨٠ مرة من تحول فورييه المنفصل. ويعمل معكوس تحول فورييه السريع (inverse (Fast Fourier transform, IFFT) بسرعة متساوية.

(أ,٣,٥) طيف القدرة **Power Spectrum**

يمثل طيف سعة فوريه كيفية تغير المقاومة لكمية مع التردد. ويمكن التعبير أيضاً عن هذه المعلومات بمصطلح القدرة. وقدرة الإشارة، $x(t)$، التي يمكن التعبير عنها في صيغة المعادلة (أ,١١) أو (أ,١٢)، تعرف كالتالي :

$$P(\omega_n) = \frac{1}{2}\left(a_n^2 + b_n^2\right) = \frac{1}{2} c_n^2$$

لاحـظ أن هـذا التعـريف للقدرة يمكن أن يطبق لأي إشارة (إنه لا يرتبط بالقدرة الميكانيكية - القوة في السرعة). ويمكن رسم القدرة كدالة في التردد لإظهار طيف القدرة. وتكون القدرة الكلية للإشارة نفسها سواء حسبت في نطاق الزمن أو نطاق التردد:

$$\text{القدرة الكلية} = \sum_{n=1}^{\infty} P(\omega_n) = \int_o^{T_f} \left[x(t)\right]^2 dt = \frac{1}{2}\int_o^{\omega_n} c_n^2 d\omega$$

ويستعمل طيف القدرة غالباً لوصف الحركات الأرضية المحدثة زلزالياً.