

جامعة الملك سعود

١٤٢٢هـ / ١٤٢٣هـ

كلية العلوم

الفصل الدراسي الصيفي

قسم الإحصاء وبحوث العمليات

المدة: ثلاث ساعات

٢٢١ إحص: أساسيات الاستدلال الإحصائي

أجب عن خمسة أسئلة فقط مما يأتي:

السؤال الأول:

إذا كان X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية حجمها n من مجتمع بتوزيع طبيعي $N(m, S^2)$ حيث أن m و S^2 معلمتين غير معلومتين، فأوجد تقدير الإمكانية العظمى لكل من m (أ) ، S^2 (ب) عندما تكون m معلومة،
وبين أن كل من التقديرين غير متحيز ومتسق.

(ج) أثبت كذلك بأن للإحصاءة $\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n$ وسط m وتباين (S^2/n) .

السؤال الثاني:

(أ) إذا كان المتغير العشوائي X يتبع توزيع مربع كاي بدرجات حرية عددها k
وبدالة كثافة احتمالية

$$g(x) = \frac{1}{\Gamma(k/2)} (1/2)^{k/2} x^{(k/2)-1} \exp(-x/2),$$

فبين أن الدالة المولدة للعزوم $M_X(t)$ تعطى بالعلاقة:

$$M_X(t) = (1-2t)^{-n/2} \quad \text{و أثبت أن } E(X)=k \text{ وأن } \text{var}(X)=2k$$

(ب) أثبت أنه إذا كان Z متغير عشوائي يتبع التوزيع الطبيعي المعياري $N(0,1)$
فإن Z^2 يتبع توزيع مربع كاي بدرجة حرية تساوي الواحد.

السؤال الثالث:

إذا كانت X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يتبع توزيعاً ، فأوجد التقدير باستخدام طريقة الإمكانية العظمى وطريقة العزوم

(أ) لكل من المعلمتين q و a ، عندما تكون دالة الكثافة الاحتمالية للمجتمع هي

$$f(x; a, q) = aq^a / x^{a+1}, x \geq q, q \neq 0, a \neq 0$$

(ب) للمعلمة q عندما تكون دالة الكثافة الاحتمالية للمجتمع هي

$$f(x; a, q) = q / x^{q+1}, x \geq 0, q \neq 0$$

السؤال الرابع:

(أ) ماذا تقصد بقولك أن الإحصاءة $T_1(n)$ تقدير غير متحيز عندما يكون حجم

العينة كبيراً جداً أو القول بأن $T_1(n)$ أكثر كفاءة من الإحصاءة $T_2(n)$.

(ب) أذكر صيغة لمراجعة شيبشيف (Chebyshev) وبرهنها، وبين فائدتها في

دراسة اتساق (consistent) الإحصاءة لتقدير عينة.

السؤال الخامس:

إذا كان X_1, X_2, \dots, X_n عينة عشوائية حجمها n من مجتمع يتبع توزيعاً بدالة

كثافة احتمالية $f(x; q) = q \exp(-qx), x \geq 0, q \neq 0$ وكان للتوزيع القبلي (prior)

للمعلمة q بدالة الكثافة $g(q; a) = \frac{1}{\Gamma(a)} (q)^{a-1} \exp(-q), q \geq 0, a \neq 0$ ، حيث أن a

مقدار معلوم، عندئذ أوجد تقدير بيز (Bayes) لكل من q و $1+q^2$ ، وادرس الخواص

الممكنة لتقدير q .

السؤال السادس:

(أ) وضح بالتفصيل ما المقصود بفترة الثقة أو التقدير بفترة، وكيف يمكن حساب ذلك لوسط مجتمع يتبع التوزيع الطبيعي معلوم التباين أو لوسط مجتمع لا يتبع التوزيع الطبيعي.

(ب) أوجد فترة ثقة 95% للوسط m لمجتمع طبيعي تباينه 81 إذا سحبنا منه عينة عشوائية حجمها 10 وكان وسطها الحسابي يساوي 30، مع العلم بأنه من جدول التوزيع الطبيعي المعياري وجد أن $t_{0.975} = 1.96$.

مع تمنياتي لكم بالتوفيق