الاصلاح

قسم الرياضيات	الاختبار الفصلي الثاني لمقرر 102 ريض	الفصل الأول 1429/1428 هـ
الاسم : ..د.أبوهسابـن......	الرقم الجامعي :......................	إستاذ المقرر : ....

1. أجب في المكان المخصص للإجابة 2 . أستخدم خلف الورقات مع الورقة الإضافية كمسودات دون نزع الورقة الأخيرة 3. ممنوع استخدام الآلة الحاسبة

الجزء الأول : ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من 1 إلى 6 في الجدول المعطى :

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6
رمز الإجابة	أ	ج	ب	د	ب	ج

(1) : التكامل $\int \frac{x}{x^2-4x+8}\,dx$ يساوي :

(أ) $\boxed{\frac{1}{2}Ln(x^2-4x+8)+\tan^{-1}\frac{x-2}{2}+c}$

(ب) $\frac{1}{2}Ln(x^2-4x+8)+\tan^{-1}\frac{x-2}{2\sqrt{2}}+c$

(ج) $\frac{1}{2}Ln(x^2-4x+8)+2\tan^{-1}\frac{x+2}{2}+c$

(د) $\frac{1}{2}Ln(x^2-4x+8)+\tan^{-1}\frac{x+2}{2\sqrt{2}}+c$

(2) التكامل $\int Ln(xe^x)dx$ يساوي :

(أ) $\frac{x^2}{2}Lnx-\frac{x^2}{4}+c$

(ب) $x^2Lnx-x-\frac{x^2}{2}+c$

(ج) $\boxed{xLnx-x+\frac{x^2}{2}+c}$

(د) $\frac{x^2}{2}e^x+c$

(3) التكامل $\int \tan^4 x\ \sec^4 x dx$ يساوي :

(أ) $\frac{\tan^5 x}{5}-\frac{\sec^5 x}{5}+c$

(ب) $\boxed{\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^7 x}{7}+c}$

(ج) $\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\tan^9 x}{9}+c$

(د) $\frac{\tan^5 x}{5}+\frac{\sec^5 x}{5}+c$

(4) التكامل $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x^4}+\sqrt[3]{x^5}}\,dx$ يساوي :

(أ) $6\sin^{-1}x^{\frac{1}{3}}+c$

(ب) $6\tan^{-1}x^{\frac{1}{3}}+c$

(ج) $6Ln(1+x^{\frac{1}{3}})+c$

(د) $\boxed{6\tan^{-1}x^{\frac{1}{6}}+c}$

(5) النهاية $\lim_{x \to 0^+} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1}\right)$ **تساوي :**

(أ) 0 $\boxed{\text{(ب) } \frac{1}{2}}$ (ج) -1 (د) 1

(6) التكامل المعتل $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{\sqrt{1 - 2\sin x}}\, dx$

(أ) متقارب ويساوي $\frac{1}{2}$ (ب) متقارب ويساوي $-\frac{1}{2}$ $\boxed{\text{(ج) متقارب ويساوي 1}}$ (د) متباعد

<u>ألجزء الثاني:</u> أجب على الأسئلة التالية في الحيز المعطى على نفس الصفحة من ورقة الأسئلة :

<u>السؤال الأول:</u> أوجد التكامل $\int \frac{x^3 - 1}{x^2 + x}\, dx$.

نضع $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x}$ ، f دالة كسرية معرفة على $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$.

بما أن درجة البسط تفوق درجة المقام بمقدار 1، إذن

يمكن كتابة f على النحو التالي $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x}$

لكل $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ ، $= (ax + b) + \frac{c}{x} + \frac{d}{x+1}$ حيث $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

حساب الثوابت:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 1 & x^2 + x \\ \cline{2-2} -x^3 - x^2 & x - 1 \\ \hline -x^2 - 1 & \\ x^2 + x & \\ \hline x - 1 & \end{array}$$

إذن $f(x) = (x-1) + \frac{x-1}{x(x+1)}$

$= (x-1) + \frac{(x+1) - 2}{x(x+1)} = (x-1) + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(x+1)}$

$a = 1$, $b = -1$. نضع $f_1(x) = \frac{x-1}{x(x+1)}$

$c = \lim_{x \to 0} x f_1(x) = \lim_{x \to 0} \frac{x-1}{x+1} = -1$

$d = \lim_{x \to -1} (x+1) f_1(x) = \lim_{x \to -1} \frac{x-1}{x} = \frac{-2}{-1} = 2$.

أخيراً ، لكل $x \in \mathbb{R} - \{-1, 0\}$ ، $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2+x} = (x-1) - \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1}$

نستنتج من هنا أن

$$\boxed{\int f(x)\, dx = \int \frac{x^3-1}{x^2+x}\, dx = \frac{x^2}{2} - x - \ln|x| + 2\ln|x+1| + cste, \quad cste \in \mathbb{R}}$$

السؤال الثاني: أحسب قيمة النهاية (إن وجدت) $\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{3}{Lnx}}$.

طبعه النهاية هي صيغة عدم التعيين 0^0

$$\lim_{x\to 0^+} \ln\left[(\sin x)^{\frac{3}{\ln x}}\right] = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{\ln x} \ln(\sin x)$$

$$= 3 \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln(x)}$$ (صيغة عدم التعيين $\frac{\infty}{\infty}$)

نستخدم قاعدة لوبيتال

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\sin x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x/\sin x}{1/x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x\cos x}{\sin x} = \left[\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{\sin x}\right)\right]\left[\lim_{x\to 0^+} \cos x\right] = 1$$

إذن

$$\lim_{x\to 0^+} (\sin x)^{\frac{3}{\ln x}} = \exp\left(\lim_{x\to 0^+} \ln\left[(\sin x)^{3/\ln x}\right]\right)$$

$$= \exp(3) = e^3 < \infty$$

السؤال الثالث : أدرس تقارب التكامل $\int_0^{\infty}(1-x)\, e^{-x}\, dx$ وأوجد قيمته في حالة التقارب .

$$\int_0^{\infty}(1-x)\, e^{-x}\, dx = \lim_{t\to\infty}\left[\int_0^t (1-x)\, e^{-x}\, dx\right]$$

بما أن:

$$\int_0^t (1-x)\, e^{-x}\, dx = \int_0^t e^{-x}\, dx - \int_0^t x\, e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_0^t - \int_0^t x\, e^{-x}\, dx$$

نضع $I = \int_0^t x\, e^{-x}\, dx$ لحساب I نستخدم التكامل بالتجزئ

$$u(x) = x \qquad u'(x) = 1$$
$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

إذن

$$I = \left[-x e^{-x}\right]_0^t + \int_0^t e^{-x}\, dx$$

$$= \left[-x e^{-x} - e^{-x}\right]_0^t = -\left[(1+x) e^{-x}\right]_0^t$$

فنحصل على:

$$\int_0^t (1-x)\, e^{-x}\, dx = \left[-e^{-x} + (1+x) e^{-x}\right]_0^t$$

$$= \left[x e^{-x}\right]_0^t = t e^{-t}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left(\int_0^t (1-x)\, e^{-x}\, dx\right) = \lim_{t\to\infty} t e^{-t} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^t} = \underline{\underline{0}}$$