

الإصلاح

جامعة الملك سعود / كلية العلوم قسم الرياضيات	بسم الله الرحمن الرحيم	الفصل الثاني 1428 / 1429 هـ الزمن // ساعة و نصف
الإسم / رقم الشعبة / رقم التحضير /	الإختبار الفصلي الثاني في المقرر 101 رياض	الرقم الجامعي / أستاذ المادة /

درجة الجزء الأول

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	المجموع
رمز الإجابة	ب	ج	د	أ	د	ج	ب	أ	د	ج	$\frac{10}{10}$

درجة الجزء الثاني

درجة السؤال الأول	درجة السؤال الثاني	درجة السؤال الثالث	درجة السؤال الرابع	المجموع
$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{3}$	$\frac{10}{10}$

<u>الدرجة النهائية</u>
20

لاحظ أن عدد الورقات خمس ورقات

أستخدم خلف الورقات فقط كمسودة بدون نزع أي منها
عدم وضع علامة على رمز الإجابة الصحيحة لأنه يعتبر غشاً

ممنوع إستخدام الآلة الحاسبة

الجزء الأول: [درجة واحدة لكل سؤال] ضع رمز الإجابة الصحيحة للأسئلة من 1 إلى 10 في الجدول المعطى :

(1) قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin 2(x-1)}{x-1}$ تساوي : (أ) $\frac{1}{2}$ (ب) 2 (ج) $+\infty$ (د) -2

(2) قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}-x}{3-x^2}$ تساوي : (أ) $2\sqrt{3}$ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ (د) $6\sqrt{3}$

(3) قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} \right]$ تساوي : (أ) $+\infty$ (ب) 2 (ج) 0 (د) $-\infty$

(4) قيمة النهاية $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin 3x}{\sqrt{x}}$ تساوي : (أ) 0 (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $+\infty$ (د) 3

(5) الدالة $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & x \geq 3 \\ 2x-4 & x < 3 \end{cases}$ عند $x=3$ تكون : (أ) متصلة وقابلة للاشتقاق (ب) غير متصلة وغير قابلة للاشتقاق (ج) غير متصلة ولكنها قابلة للاشتقاق (د) متصلة ولكنها غير قابلة للاشتقاق

(6) قيمة الثابت k التي تجعل الدالة $f(x) = \begin{cases} kx^2 & x < 3 \\ -3kx-6 & x \geq 3 \end{cases}$ متصلة على R هي : (أ) -6 (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $-\frac{1}{3}$ (د) 6

(7) الدالة $f(x) = |x^2 - 1|$ غير قابلة للاشتقاق عند : (أ) $x=3$ (ب) $x=\pm 1$ (ج) $x=0$ (د) $x=4$

(8) إذا كانت $f(x) = \frac{x}{x+1}$ ، $g(x) = \frac{x-1}{x}$ ، فإن $(g \circ f)'(1)$ تساوي : (أ) 1 (ب) -1 (ج) 2 (د) -2

(9) إذا كانت $f(x) = 2 + \sin(\cos^2 x)$ ، فإن $f'(0)$ تساوي : (أ) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (ب) $\frac{1}{2}$ (ج) 2 (د) 0

(10) ميل المماس لمنحنى الدالة $\sqrt{x^2 y} - xy = 2$ عند النقطة $(-1, 1)$ يساوي : (أ) $\frac{3}{4}$ (ب) 3 (ج) $\frac{4}{3}$ (د) 4

الجزء الثاني : أجب على الأسئلة التالية في نفس ورقة الأسئلة :
السؤال الأول : [درجتان]

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2x^2}$$

أوجد قيمة النهاية

بما أن $\sin 0 = 0$ ، إذن نهاية البسط هي صفر عند $x=0$

نفس الشيء

نستخدم قاعدة لوبيتال : لكل $x \in \mathbb{R}$ ، $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - \sin 2x}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x - 2 \sin x \cos x}{2x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x (1 - \cos x)}{2x^2}$$

$$= \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \right) \left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} \right)$$

$$= 1 \times 0 = 0$$

السؤال الثاني : [ثلاث درجات]

أوجد مشتقة الدالة العكسية للدالة $f(x) = \frac{1}{x-1} - 1$ عند $x=1$

الطريقة الأولى : نلاحظ أن f هي دالة كسرية معرفة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ و $\mathbb{R} \setminus \{1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

هذه الدالة f هي دالة متساوية لأننا نجد عددين $a \neq 1, b \neq 1$

$$\frac{1}{a-1} - 1 = \frac{1}{b-1} - 1 \quad \text{وإن} \quad f(a) = f(b)$$

$$\text{يعني} \quad \frac{1}{a-1} = \frac{1}{b-1} \quad \text{أي} \quad a-1 = b-1 \quad \text{منه نحصل على} \quad a = b$$

لأن الدالة f متساوية ، إذن $f^{-1}(x) = x$ ، $x \neq 1$

$$f(y) = x$$

$$\frac{1}{y-1} - 1 = x \quad \text{ببساطة}$$

$$\frac{1}{y-1} = x+1 \quad \leftarrow \quad (y-1)(x+1) = 1$$

$$y = \frac{x+2}{x+1} = 1 + \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = 1 + \frac{1}{x+1}, \quad x \neq -1}$$

لأن مشتقة الدالة العكسية للدالة f عند $x=1$ هي :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{-1}{(x+1)^2} \quad \text{لأن} \quad (f^{-1})'(1) = -\frac{1}{4}$$

الطريقة الثانية : استخدم قاعدة مشتقة الدالة العكسية : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

السؤال الثالث : [درجتان]

$$\sin^2(x+y) + \cos y^2 = x+1$$

جد y' للدالة

نستخدم الآلة تعاقب الضرب :

$$\frac{d}{dx} (\sin^2(x+y) + \cos y^2) = \frac{d}{dx} (x+1)$$

$$\frac{d}{dx} [\sin^2(x+y)] + \frac{d}{dx} [\cos y^2] = 1$$

$$\frac{d}{dx} \sin^2(x+y) = 2 \sin(x+y) \cos(x+y) \frac{d}{dx} (x+y) \quad \text{بما أن :}$$

$$\frac{d}{dx} \cos(y^2) = -\sin(y^2) \frac{d}{dx} (y^2) \quad \text{و}$$

نتحصل على :

$$2 \sin(x+y) \cos(x+y) (1+y') - (\sin y^2) (2y y') = 1$$

$$\sin 2(x+y) + y' \sin 2(x+y) - 2y y' \sin y^2 = 1 \quad \text{أي أن :}$$

$$y' = \frac{1 - \sin 2(x+y)}{\sin 2(x+y) - 2y \sin y^2} \quad \text{فإن}$$

إذا كان $\sin 2(x+y) - 2y \sin y^2 \neq 0$

السؤال الرابع : [ثلاث درجات]

أوجد معادلة المستقيم المماس لمنحنى (ليان) الدالة $f(x) = 2\sqrt{x^2+3}$ عند النقطة (1, 4).

بخطوة واحدة معادلة المستقيم المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(x_0, f(x_0))$ هي :

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$f(x_0) = f(1) = 4 \quad \text{و} \quad x_0 = 1$$

نلاحظ أن الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} ، أي أنها قابلة للاشتقاق عند $x=1$

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}} \quad \text{لأن} \quad x \in \mathbb{R}$$

$$= \frac{2x}{\sqrt{x^2+3}} \quad \text{إذن} \quad f'(1) = \frac{2}{\sqrt{4}} = 1$$

$$y = (x-1) + 4 \quad \text{وهذا هو المستقيم المطلوب.$$

$$\boxed{y = x + 3}$$