د. برهان

جَامعة الملك سعود

قسم الريَاضيّات — الإختبَار النهَائي للمقرر — الفصل الَاول ١٤٣٠ ـ ١٤٣١ هـ

كلية العلوم — ٢٤٤ ريض — الزمن ثلَاث سَاعَات

ألإسم .... الرقم الجَامعي .... رقم التّحضير ......

رقم الشعبة .... أستَاذ المَادة ....

رقم السّؤَال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	ألدرجة
رمز الإجَابة	أ	ب	ب	ب	أ	د	ج	ب	ج	أ	أ	أ	ج	د	

ألسّؤَال الَاول	ألسّؤَال الثّاني	ألسّؤَال الثّالث	ألسّؤَال الرَابع	ألسّؤَال الخَامس	ألمجموع

ألدرجة النّهَائية	
	50

عدد الورقَات 8

ممنوع إستعمَال الَالة الحَاسبة

إستعمل خلف الورقَات مع الورقة الإضَافية كمسودَّات من دون نزع الورقة الأَخيرة

الجزء الأول [درجتان لكل سؤال] (ضع رمز الإجابة الصحيحة من 1 إلى 14 في الجدول المعطى)

(1) مجموعة قيم الثابت α التي تجعل للنظام

$$\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + \alpha x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + \alpha x_3 = -1 \end{cases}$$

حلًا وحيدًا هي

أ) $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{1, -2\}}$ ب) $\{1, -2\}$ ج) $\{1, 2\}$ د) $\mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.

(2) إذا كانت $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ مجموعة مستقلة خطيًا في فضاء كثيرات الحدود $P_4[x]$ فإن

أ) S تولد $P_4[x]$ ب) $\{v_1; v_2, v_3\}$ مستقلة خطيًا

ج) $\{v_1, v_2, v_3\}$ مرتبطة خطيًا د) S تشكل اساسا في $P_4[x]$

(3) مجموعة قيم الثابت β التي تجعل المجموعة $\{(0, \beta, \beta), (\beta, 0, 0), (0, -\beta, \beta)\}$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ هي

أ) $\mathbb{R}$ ب) $\boxed{\mathbb{R} \setminus \{0\}}$ ج) $\{-1, 1\}$ د) $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

(4) إذا كانت المجموعة $W = \{A \in M_{3\times3};\ A^t = -A\}$ تشكل فضاءا جزئيا من $M_{3\times3}$ فإن $\dim W$ يساوي

أ) 2 ب) $\boxed{3}$ ج) 4 د) 5 .

(5) إذا كانت المجموعة $B = \{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ أساسا للفضاء $\mathbb{R}^3$ و كان $v = (4, -1, 1) \in \mathbb{R}^3$ فإن $[v]_B$ يساوي

أ) $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}}$ ب) $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix}$

(6) إذا كانت كل من المجموعتين B ، C أساسا في $\mathbb{R}^2$ حيث C هو الأساس المعتاد و $B = \{v_1, v_2\}$ و إذا كانت مصفوفة الإنتقال من الأساس C إلى الأساس B هي $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ فإن

أ) $v_1 = (1, 1),\ v_2 = (0, -1)$ ب) $v_1 = (1, 2),\ v_2 = (1, 1)$ ج) $v_1 = (-1, 0),\ v_2 = (2, 2)$

د) $\boxed{v_1 = (1, 1),\ v_2 = (-1, 0)}$.

(7) إذا كان v متجها عياريا في فضاء ضرب داخلي V و كان $u \in V$ ، $u \neq 0$ فإن المجموعة

تكون $\{u, u-\langle u,v\rangle v\}$

أ) متعامدة و عيارية ب) متعامدة و غير عيارية

ج) $\boxed{\text{غير متعامدة و غير عيارية}}$ د) مرتبطة خطيًا.

(8) إذا كان V فضاء ضرب داخلي و كان المتجهان $u,v\in V$ مرتبطين خطيًا، فإن المقدار $\begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle \end{vmatrix}$ يساوي

أ) $||u||^2-||v||^2$ ب) $\boxed{0}$ ج) $||u||^2+||v||^2$ د) $2||u||^2-||v||^2$.

(9) إذا كان $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ تحويلًا خطيًا بحيث أن $T(1,-1,1)=(2,3)$ ، $T(0,1,-1)=(-1,4)$ ، $T(1,1,2)=(1,-1)$ فإن $T(6,5,7)$ تساوي

أ) $(-5,14)$ ب) $(5,-14)$ ج) $\boxed{(5,14)}$ د) $(2,12)$.

(10) إذا كان $T:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^2$ تحويلًا خطيًا معرفًا بالقاعدة $T(x,y,z)=(x-y+2z, x+2y-z),$ فإن المتجه $(a,b,c)\in\ker T$ عندما يكون

أ) $\boxed{a=-b=-c}$ ب) $a=b=c$ ج) $a=-b=c$ د) $a+b+c=0$.

(11) إذا كان $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ تحويلًا خطيًا معرفًا بالقاعدة $T(x,y)=(x-y, 2x+y, x+y),$ فإن المتجه $(a,b,c)\in\operatorname{Im}T$ عندما يكون

أ) $\boxed{2b-3c=a}$ ب) $b-3c=a$ ج) $3b-2c=a$ د) $3b+2c=a$.

(12) إذا كانت كل من B ، C أساسًا في $\mathbb{R}^2$ حيث C هو الأساس المعتاد و B هو الأساس $B=\{(1,1),(2,1)\}$ و إذا كان $T:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ مؤثرًا خطيًا بحيث أن $[T]_C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix}$ فإن $[T]_B$ تساوي

أ) $\boxed{\begin{bmatrix}10 & 13\\ -5 & -6\end{bmatrix}}$ ب) $\begin{bmatrix}10 & -5\\ 13 & -6\end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix}10 & -13\\ 5 & 6\end{bmatrix}$ د) $\begin{bmatrix}-10 & -13\\ 5 & -6\end{bmatrix}$.

(13) إذا كانت $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$ فإن كثيرة الحدود المميزة $h(\lambda)$ للمصفوفة A تساوي

أ) $(\lambda-1)^2(\lambda+2)$ ب) $(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda+2)$

ج) $\boxed{(1-\lambda)(\lambda+1)(\lambda-2)}$ د) $(\lambda+1)^2(\lambda-2)$.

(14) إذَا كَانت $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}$ فإن المصفوفة P التي تجعل $P^{-1}AP$ مصفوفة قطرية هي

أ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ ب) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ج) $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ د) $\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}$.

اَلجزءُ الثَّاني

السُّؤَال الَاول [أَربع درجَات]

إِذَا كَانت $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ فاحسب $(I-A)^3$ ثم إستنتج أن للمصفوفة A معكوسًا ثم عين هذَا المعكوس.

$$I - A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I-A)^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(I-A)^3 = I - 3A + 3A^2 - A^3 = 0$$

$$I - A(3I - 3A + A^2) = 0$$

$$I = A(3I - 3A + A^2)$$

2

إذن A لها معكوس و هو $A^{-1} = 3I - 3A + A^2$

السؤال الثاني [ثلاث درجات]

إذا كانت المجموعة $B = \{u, v, w\}$ مستقلة خطيًا في فضاء متجهات V فأثبت أن المجموعة $\{u + w, u - w, v\}$ مستقلة خطيًا كذلك

نفترض أن لدينا $\alpha(u+w)+\beta(u-w)+\lambda v=0$

(1) ولنثبت أن $\alpha=\beta=\lambda=0$

إذن $\alpha u+\alpha w+\beta u-\beta w+\lambda v=0$

$(\alpha+\beta)u+\lambda v+(\alpha-\beta)w=0$

بما أن $\{u,v,w\}$ مستقلة خطيا فإن $\begin{cases}\alpha+\beta=0\\ \lambda=0\\ \alpha-\beta=0\end{cases}$ (2)

هذا يؤدي $\alpha=0$ ، $\beta=0$ ، $\lambda=0$

السؤال الثالث [أربع درجات]

إذا كانت القاعدة $\langle(a,b),(c,d)\rangle = 2ac + 3bd$ تعرف ضربًا داخليًا على فضاء المتجهات $\mathbb{R}^2$ ، فاستخدم قاعدة جرام شميدت لتحويل الأساس $\{(1,2),(2,-1)\}$ إلى أساس عياري متعامد.

نضع $u_1=(1,2)$ و $u_2=(2,-1)$ ، $\|u_1\|^2=2+12=14$

(1) $\|u_2\|^2=6+3=9$

$v_1=u_1$ ،

$w_1=\frac{u_1}{\|u_1\|}=\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2)$ ، $\langle u_2,v_1\rangle=4-6=-2$

$v_2=u_2-\frac{\langle u_2,v_1\rangle}{\|v_1\|^2}v_1$ (2)

$=(2,-1)+\frac{2}{14}(1,2)$

$=\left(2+\frac{1}{7},-1+\frac{2}{7}\right)$

$=\left(15/7,-5/7\right)$

$\|v_2\|^2=\frac{5^2\times 21}{7^2}$

إذن $w_1=\left(\frac{\sqrt{14}}{14},\frac{2\sqrt{14}}{14}\right)$

(1) $w_2=\left(\frac{15}{5\sqrt{21}},\frac{-5}{5\sqrt{21}}\right)$

$=\left(\frac{3\sqrt{21}}{21},-\frac{\sqrt{21}}{21}\right)$

$\{w_1,w_2\}$ أساس عياري متعامد.

اَلسُّؤَال الرَّابع [خمس درجات]

ليكن $T:\mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ تحويلًا خطيًا معرفًا بالقَاعدة $T(X)=AX$ حيث

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(i) عين أَساس و بعد نوَاة T (أي $\ker T$).

(ii) عين أَساس و بعد صورة T (أي $\operatorname{Im} T$).

$\ker T = \{X \in \mathbb{R}^5 \,/\, TX = 0\}$ (i)

$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \ker T$

$$TX=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 + 4x_5 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 5 & 4 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_4 + x_5 = 0 \\ x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_4 + 2x_5 = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_3 = 2x_5 - 2x_4 = 4x_5 \\ x_1 - x_2 - x_5 + 2x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} x_4 = -x_5 \\ x_3 = 4x_5 \\ x_1 = x_2 - x_5 \\ x_2, x_5 \text{ حرة} \end{cases}$$

إذن $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2 - x_5; x_2; 4x_5; -x_5; x_5)$

$= x_2(1,1,0,0,0) + x_5(-1,0,4,-1,1)$

2 $\ker T = \langle (1,1,0,0,0);(-1,0,4,-1,1) \rangle.$

1 $\dim \ker T = 2.$

$\operatorname{Im} T = \{AX \,/\, X \in \mathbb{R}^5\}$ (ii)

1 $\dim \ker T + \dim \operatorname{Im} T = 5.$

إذن $\dim \operatorname{Im} T = 3$

1 $\operatorname{Im} T = \langle (1,0,0,0);(0,1,1,0);(1,2,2,2) \rangle.$

اَلسُّؤَال الخَامس [ست درجَات]

لتكن $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ·

(i) عين القيم المميزة للّمصفوفة A ·

(ii) عين أَسَاسًا لكل فضَاء مميز مرَافق لكل قيمة مميزة·

(iii) عين " إن أمكن " مصفوفة P لهَا معكوس تحول المصفوفة A إلَى الصيغة القطرية مع تعيين تلك الصيغة القطرية·

(i) $P(\lambda) = \det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} (2-\lambda) & 0 & 0 \\ 1 & (2-\lambda) & 1 \\ -1 & 0 & (1-\lambda) \end{vmatrix}$

(2) $= (2-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(1-\lambda)$ ،

القيم المميزة هو $\lambda = 1$ و $\lambda = 2$ (مضاعف مرتين)

(ii) $\lambda = 1$ ، الفضاء المميز المقابل لـ $\lambda = 1$:

$E_1 = \{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A-I)X = 0 \}$

$X = (x_1, x_2, x_3) \in E_1$ إذن $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

هذا يؤدي إلى $\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = -x_3 \end{cases}$ إذن $(x_1, x_2, x_3) = (0, -x_3, x_3)$

(1) $E_1 = \langle (0, -1, 1) \rangle$

$\lambda = 2$ ، الفضاء المميز المقابل لـ $\lambda = 2$:

$E_2 = \{ X \in \mathbb{R}^3 \ / \ (A-2I)X = 0 \}$

$X = (x_1, x_2, x_3) \in E_2$ إذن $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

هذا يؤدي أن $x_1 + x_3 = 0$. إذن $(x_1, x_2, x_3) = (-x_3, x_2, x_3)$

$= x_2(0,1,0) + x_3(-1,0,1)$

(1) $E_2 = \langle (0,1,0) \ ; \ (-1,0,1) \rangle$

(iii) بما أن التعدد الجبري يساوي التعدد الهندسي لـ $\lambda = 2$

فإن A تكتب على الصيغة القطرية (أي قابلة للاستقطار).

(2) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$