جامعـــة الملك سعـــود   كليـة العلـــوم   قســـم الريــاضيــــات

الفصل الثاني 1430-1431 هـ /200-ريض / الإختبـار الفصلي الأول / الزمن: ساعة و نصف

السـؤال الأوّل:

1) إذا كانت الدالة f معرّفة كالتالي:

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

أ) احسب: $f_x(0,0)$ و $f_y(0,0)$.

ب) احسب: $f_y(x,y)$ لكل $(x,y)\neq(0,0)$.

السـؤال الثـاني:

1) عين نطاق الدالة $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ ثم ارسمه.

2) احسب النهاية التالية إن وجدت: $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}$.

3) بـــين أن: $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sin(x^2+y^2)}=1$.

السـؤال الثـالث:

1) إذا كان $u=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ و كان $v=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ و كان $x=r\cos\theta$ و $y=r\sin\theta$، أوجد كلا من $\dfrac{\partial u}{\partial r}$ و $\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$ ثم احسب $\dfrac{\partial u}{\partial r}-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta}$.

2) إذا كانت المعادلة $e^{x/y}+\cos(xy)=z+1$ تعرف دالة ضمنية $z=f(x,y)$ قابلة للتفاضل.
أوجد $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

السـؤال الرابع:

أوجد القيم القصوى المحلية و النقاط السرجية إن وجدت للدالة: $f(x,y)=2x^2-y^3-2xy$.

و الله ولي التوفيـــق

د. برهان

الفصل الثاني ١٤٣١/٣٠ إصلاح الاختبار الشهري الأول

ريض ٢٠٠

السؤال الأول :

أ)

(1) $$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0+h,0)-f(0,0)}{h}$$

(1) $$= \lim_{h\to 0} \frac{h^3/h^2 - 0}{h} = 1$$

(1) $$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}$$

(1) $$= \lim_{h\to 0} \frac{-h^3/h}{h} = -1$$

ب) لنأخذ $(x,y)\neq(0,0)$ ،

(1) $$f_y(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right) = \frac{-3y^2(x^2+y^2)-2y(x^3-y^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

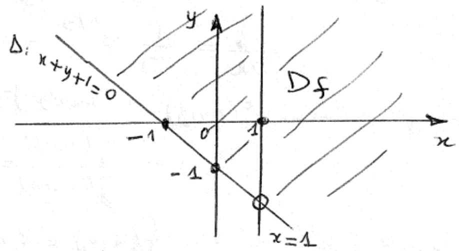
$$= -\frac{3x^2y^2+y^4-2yx^3}{(x^2+y^2)^2}.$$

السؤال الثاني :

(1) $f(x,y) = \dfrac{\sqrt{x+y+1}}{x-1}$ معرّفة على

(2) $$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \quad x+y+1 \geq 0 ,\ x\neq 1\}$$

(1)



② نأخذ المسار $x=1$ ،

(1) $$\lim_{y\to 1} \frac{1-y^4}{1-y^4} = 1$$

نأخذ المسار $y=1$ ،

(1) $$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^3-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$= \frac{1}{3}$$

فنستنتج أن $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,1)} \frac{x-y^4}{x^3-y^4}$ غير موجودة.

③ نضع $u = x^2+y^2$. بما أن $(x,y)\to(0,0)$ فإن $u\to 0$ بالتعويض

(1) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x^2+y^2)}{\sin(x^2+y^2)} = \lim_{u\to 0}\frac{u}{\sin u} \overset{\text{لوبيتال}}{=} \lim_{u\to 0}\frac{1}{\cos u} = \frac{1}{\cos 0} = 1.$$

السؤال الثالث:

① بما أن $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ فإن

$$v = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{r\cos\theta}{r^2} = \frac{\cos\theta}{r}$$

$$u = \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{r\sin\theta}{r^2} = \frac{\sin\theta}{r}$$

إذن

(1) $$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sin\theta}{r}\right) = -\frac{\sin\theta}{r^2}$$

و

(1) $$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\cos\theta}{r}\right) = -\frac{\sin\theta}{r}$$

- **الطريقة الثانية:** نستخدم قاعدة السلسلة:

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \left(\frac{(x^2+y^2)-2x^2}{(x^2+y^2)^2}\right)(-r\sin\theta) + \frac{2yx}{(x^2+y^2)^2} r\cos\theta \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \left(\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}\right)\cdot\cos\theta + \left(\frac{(x^2+y^2)-2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right)\sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{(y^2-x^2)(-r\sin\theta)}{r^4} - \frac{2r^3\cos^2\theta\sin\theta}{r^4} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{-2r^2\cos^2\theta\sin\theta}{r^4} + \frac{(r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta)\sin\theta}{r^4}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{-\sin\theta}{r} \; ; \quad \frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)\sin\theta}{r^2} = -\frac{\sin\theta}{r^2}.$$

فنستنتج أن $\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$ يعني $\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = 0$ (1)

② $z = f(x,y)$ حيث $f(x,y) = e^{x/y} + \cos(xy) - 1$

باشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x، نحصل على أن:

(2) $$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}e^{x/y} - y\sin(xy)$$

- **الطريقة الثانية:** نضع $F(x,y,z) = e^{x/y} + \cos(xy) - z - 1$. باستخدام قاعدة الدوال الضمنية

$$F(x,y,z) = 0 \; ; \quad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = -\frac{\frac{1}{y}e^{x/y} - y\sin(xy)}{-1}$$

السؤال الرابع: $f(x,y) = 2x^2 - y^3 - 2xy$ دالة كثيرة حدود بمتغيرين x و y.

* النقاط الحرجة هي حلا للنظام التالي:

$$\begin{cases} f_x(x,y) = 0 \\ f_y(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -3y^2 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 6x^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ x(6x+1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = -1/6 \\ y = -1/3 \end{cases}$$

(2)

النقاط الحرجة هي $(0,0)$ و $(-1/6, -1/3)$.

* $g(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{vmatrix}$ إذن $g(x,y) = -24y - 4$

- عند النقطة $(0,0)$، $g(0,0) = -4 < 0$ اذن $(0,0)$ نقطة سرجية لـ f.

(2) - عند النقطة $(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$، $g(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}) = 4 > 0$ و بما أن $f_{xx}(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3}) = 4 > 0$ فإن $f(-\frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$ هي قيمة صغرى محلية لـ f.