

د. برهان

جامعة الملك سعود كلية العلوم - قسم الرياضيات الاسم:	الاختبار النهائي في المقرر رياض 151 الرقم:	الفصل الثاني 1430/1429 الزمن: ثلاث ساعات رقم الشعبة:
---	--	--

رقم السؤال	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
رمز الجواب	ج	د	ج	د	ب	ب	أ	أ	د	ج	ب	د	أ	أ	ج

(30)

الجزء الأول: اختر الإجابة الصحيحة.

(1) العبارة $(p \rightarrow q) \vee (\neg p \rightarrow \neg q)$ هي:

(أ) مخلوطة (ب) تناقض (ج) مصدوقة (د) لا شيء مما ذكر

(2) العبارة $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$ تكافئ العبارة:

(أ) $p \vee q \vee r$ (ب) $(p \vee q) \wedge (q \vee r)$ (ج) $p \vee (q \wedge r)$ (د) لا شيء مما ذكر.

(3) المكافئ العكسي للتقرير "إذا كان x عددا موجبا أو سالبا فإن x عدد غير صفري" هو:

(أ) إذا كان x عددا ليس موجبا أو ليس سالبا فإن x يساوي الصفر.

(ب) إذا كان x عددا ليس موجبا و ليس سالبا فإن x يساوي الصفر.

(ج) إذا كان x عدد يساوي الصفر فإن x ليس موجب و ليس سالب.

(د) إذا كان x عدد يساوي الصفر فإن x ليس موجب أو ليس سالب.

(4) إذا عرفنا علاقة R على مجموعة الأعداد الصحيحة Z بالقاعدة: $xRy \Leftrightarrow x + y$ عدد موجب, فإن R :

(أ) علاقة ترتيب جزئي (ب) علاقة تكافؤ (ج) علاقة تناظرية و متعدية (د) علاقة تناظرية و غير متعدية.

(5) إذا كانت S علاقة على Z معرفة بالقاعدة: $aSb \Leftrightarrow |a| \geq |b|$ فإن S :

(أ) انعكاسية و تخالفية (ب) انعكاسية و غير تخالفية (ج) تخالفية و غير انعكاسية (د) غير انعكاسية و غير تخالفية.

(6) إذا كانت $A = \{1, 2, 3\}$ و كانت $T = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ فإن T :

(أ) علاقة ترتيب جزئي و علاقة تكافؤ (ب) علاقة تكافؤ ليست علاقة ترتيب جزئي

(ج) علاقة ترتيب جزئي ليست علاقة تكافؤ (د) ليست علاقة تكافؤ و ليست علاقة ترتيب جزئي.

(7) إذا كانت R علاقة على مجموعة الأعداد الكسرية Q معرفة بالقاعدة: $xRy \Leftrightarrow x - y$ عدد صحيح, فإن:

(أ) $\frac{7}{2} \in \left[\frac{1}{2}\right]$ (ب) $6 \notin [-1]$ (ج) $\frac{7}{2} \in [1]$ (د) لا شيء مما ذكر.

(8) إذا كانت $S = \{(u, w), (v, u), (w, v)\}$ علاقة معرفة على $A = \{u, v, w\}$ فإن $S^3 = S \circ S \circ S$ هي:

(أ) العلاقة القطرية (ب) S (ج) العلاقة التامة (د) لا شيء مما ذكر.

(9) إذا كان B جبرا بوليا و كان $x, y \in B$ بحيث $x + y = x$ فإن:

(أ) $x = 1$ (ب) $x + y = y$ (ج) $y = 0$ (د) $xy = y$

(10) إذا كانت f و g دالتين بوليتين، فإن $(f' + g')(f' + g')$ تساوي:

(أ) g (ب) 1 (ج) f' (د) 0

(11) إذا كانت $f(x, y, z) = yz' + y'z + x$ فإن $CPS(f)$ يساوي:

(أ) $x + y + z'$ (ب) $(x + y' + z')(x + y + z)$

(ج) $(x' + y + z)(x' + y' + z')$ (د) $(x + y' + z)(x' + y + z)$

(12) شكل MSP للدالة $f(x, y, z) = y + xy'$ هو:

(أ) $x + xy'$ (ب) $x + y'z$ (ج) $xz + xy'$ (د) $x + y$

(13) شكل MPS للدالة $g(x, y, z, w) = xy + y'w' + z'w'$ هو:

(أ) $(x + w')(y + w')(x + y' + z')$ (ب) $(x + w')(y + w')$

(ج) $(x + w')(x + y' + z')$ (د) $(y + w')(x + y' + z')$

(14) إذا كان G رسما منتظما من النوع r ، ذو 6 رؤوس و 12 ضلع. فإن r يساوي:

(أ) 4 (ب) 2 (ج) 6 (د) 8

(15) عدد أضلاع الرسم المتمم لـ $K_{8,12}$ يساوي:

(أ) 190 (ب) 96 (ج) 94 (د) لا شيء مما ذكر.

الجزء الثاني: أجب عن الأسئلة التالية:

(1) استخدم الاستقراء الرياضي لإثبات التالي: لكل $n \geq 1$ ، $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

نُحَرِّج P_n : " $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ "

① ولخطوة الأساس: $n=1$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{1}} = 1 \geq \sqrt{1}$ إذن P_1 حادى
خطوة الاستقراء: نفترض أن P_k حادى لكل $k \leq n$ ولنثبت أن

P_{n+1} حادى $\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

③ يمان $\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \geq \sqrt{n+1}$

$\geq \frac{1 + \sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{n+1}} \geq \frac{1 + \sqrt{n^2}}{\sqrt{n+1}} = \sqrt{n+1}$

لذا P_{n+1} حادى

الدرجة:

لذا $n \geq 1$ لدينا $\frac{1}{\sqrt{1}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}$

(2) استخدم مبدأ الترتيب الحسن و البرهان بالتناقض لإثبات أن $n^2 + 9 > 7n$ لكل عدد صحيح $n \geq 6$.

①

نفترض أنه يوجد $n_0 \geq 6$ بحيث $n_0^2 + 9 \leq 7n_0$.

ضع $A = \{m \geq 6 / m^2 + 9 \leq 7m\}$ اكن

$A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$ بما أن $n_0 \in A$. باستخدام مبدأ

الترتيب الحسن يوجب وجود أصغر عدد $n \in A$ بحيث لدينا:

- (1) $n^2 + 9 \leq 7n$
 (2) $(n-1)^2 + 9 > 7(n-1)$ و
 (3) $n \geq 6$

③

(2) $\Rightarrow (n^2 - 2n + 1 + 9) > 7n - 7$ يعني $n^2 + 9 > 7n - 8$ وباستخدام (1)

وجد أن $7n \geq n^2 + 9 > 7n - 8$ لأن $8 > 2n$ ($n < 4$)

و هذا يتناقض مع (3).

(3) لتكن f دالة بولية ممثلة بشكل كارنو أدناه:

	$\bar{x}w$	$\bar{x}w'$	$\bar{z}w'$	$\bar{z}'w'$
xy	1	1		
xy'		1	1	
$x'y'$	1	1		
$x'y$		1	1	

(i) اكتب f على شكل MSP .
 $MSP(f) = x y z + x y' w' + x' y' z + x' y w'$ ①

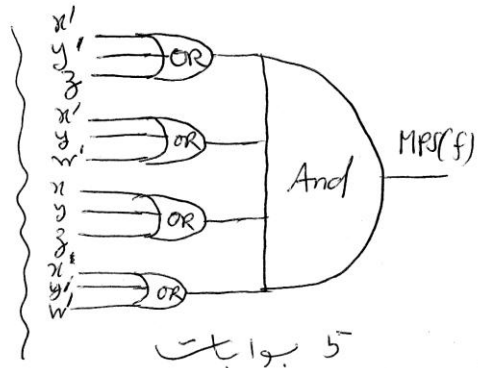
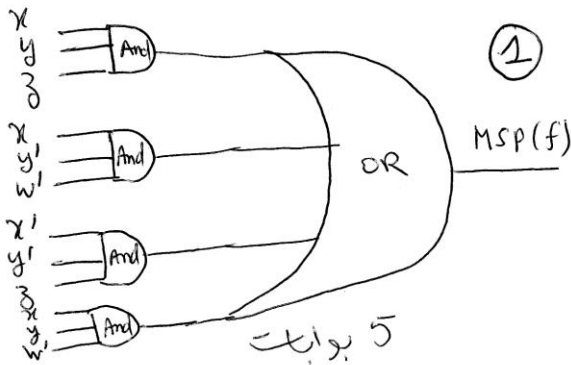
(ii) اكتب f على شكل MPS .

$MSP(f') = x y z' + x y' w + x' y' z' + x' y w$

①

$MPS(f) = (MSP(f'))'$
 $= (x' + y' + z) \cdot (x' + y + w') \cdot (x + y + z) \cdot (x + y' + w')$

(iii) صمم دائرة عطف و فصل أصغرية لـ f .

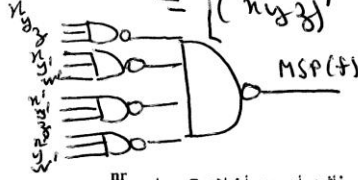


(iv) صمم دائرة لـ f باستخدام بوابات نفي العطف فقط.

$$MSP(f) = xyz + xy'w' + x'y'z + x'yzw'$$

$$MSP(f) = [(xyz + xy'w' + x'y'z + x'yzw)']$$

$$= [(xyz)' (xy'w')' (x'y'z)' (x'yzw)']$$



①

(4) ليكن G رسما منتظما من النوع r نو n رأس، فأثبت أن عدد أضلاع G يساوي $\frac{nr}{2}$.

$$\sum_{i=1}^n \deg(x_i) = 2|E|$$

③ بما أن G منتظما فإن لكل $1 \leq i \leq n$ ، $\deg(x_i) = r$

$$\text{لذا } nr = 2|E| \text{ ولذا يعني أن } |E| = \frac{nr}{2}$$

(مجموع الأضلاع لـ G)

(5) ليكن G رسما بسيطا عد رؤوسه n و عدد أضلاعه 36. فجد n إذا علمت أن عدد أضلاع متمم G يساوي 42.

نضع $G = (V, E)$ و $\bar{G} = (V, \bar{E})$ (للمتكمم). لدينا

$$|E| + |\bar{E}| = \frac{n(n-1)}{2} \text{ و بما أن } |E| = 36 \text{ و } |\bar{E}| = 42 \text{ لأن}$$

$$42 + 36 = \frac{n(n-1)}{2} \Leftrightarrow n^2 - n - 156 = 0$$

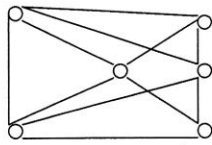
$$\Delta = 1 + 624 = (25)^2 \text{ مميز}$$

$$n_1 = \frac{1+25}{2} = 13 \text{ و } n_2 = \frac{1-25}{2} = -12$$

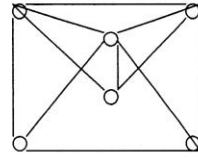
(6) بين ما إذا كان الرسمان التاليان متماثلين أم لا ؟

عدد رؤوس
 $|V| = n$
 $|V| = 13$

③



G



H

②

لا. هذين الرسمين ليسا متماثلين لأن $\deg(x_G) \neq \deg(x_H)$

لأن في الرسمين تطبيق تقابلي f بحيث $f(G) = H$.

$$G \neq H.$$