

4.7 بعض التوزيعات المتقطعة

- عناصر التجربة متماثلة
- ظروف متكافئة للتجارب
- تعريف مختلفة للمتغير العشوائي
- اختلافات عددية
- تسهيل حساب احتمالات المتغير العشوائي

4.7 بعض التوزيعات المتقطعة

مثال

▪ نتيجة الطالب في أحد المواد

• $S = \{ \text{Pass} , \text{Fail} \}$

• احتمال النجاح = 0.8

احتمال الرسوب = $0.8 - 1 = -0.2$

▪ رمي قطعة النقود المتزنة مرة واحدة

• $S = \{ \text{Head} , \text{Tail} \}$

• احتمال Head = 0.5

احتمال Tail = $0.5 - 1 = -0.5$

1.4.7 توزيع بيرنولي

خصائص تجربة توزيع بيرنولي:

1. محاولة واحدة فقط
2. المتغير العشوائي يحتمل قيمتين فقط (نجاح = 1 أو فشل = 0)
3. احتمال النجاح p احتمال الفشل $1-p$

▪ معلمة توزيع بيرنولي p

▪ دالة التوزيع

$$f_X(x) = p^x (1-p)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

1.4.7 توزيع بيرنولي

مثال

نتيجة الطالب في أحد المواد

$$S = \{ \text{Pass}, \text{Fail} \}$$

$$0.8 = \text{احتمال النجاح}$$

$$0 = X \text{ المتغير العشوائي}$$

$$1 = X \text{ المتغير العشوائي}$$

دالة التوزيع:

$$0.2 = 1 - 0.8 = \text{احتمال الرسوب}$$

$$\Leftrightarrow \text{نجاح الطالب}$$

$$\Leftrightarrow \text{رسوب الطالب}$$

$$f_X(x) = (0.8)^x (0.2)^{1-x} \quad x = 0, 1$$

$$P(\text{نجاح الطالب}) = f_X(x=1) = (0.8)^1 (0.2)^{1-1} = 0.8$$

$$P(\text{رسوب الطالب}) = f_X(x=0) = (0.8)^0 (0.2)^{1-0} = 0.2$$

1.4.7 توزيع بيرنولي

مثال

▪ رمي قطعة النقود المتزنة مرة واحدة

• $S = \{ \text{Head} , \text{Tail} \}$

• احتمال Head = 0.5

احتمال Tail = $0.5 = 1 - 0.5$

• المتغير العشوائي $Y = 0$ \Leftrightarrow ظهور Head

• المتغير العشوائي $Y = 1$ \Leftrightarrow ظهور Tail

دالة التوزيع:

$$f_Y(y) = (0.5)^y (0.5)^{1-y} \quad y = 0 , 1$$

$$P(\text{Head}) = f_Y(y=1) = (0.5)^1 (0.5)^{1-1} = 0.5$$

$$P(\text{Tail}) = f_Y(y=0) = (0.5)^0 (0.5)^{1-0} = 0.5$$

1.4.7 توزيع بيرنولي

مثال

▪ رمي قطعة نقود غير متزنة مرة واحدة

• $S = \{ \text{Head} , \text{Tail} \}$

• احتمال Head = 0.65

احتمال Tail = $1 - 0.65 = 0.35$

• المتغير العشوائي $Z = 0 \Leftrightarrow$ ظهور Head

• المتغير العشوائي $Z = 1 \Leftrightarrow$ ظهور Tail

دالة التوزيع:

$$f_Z(z) = (0.65)^z (0.35)^{1-z} \quad y = 0 , 1$$

$$P(\text{Head}) = f_Z(z=1) = (0.65)^1 (0.35)^{1-1} = 0.65$$

$$P(\text{Tail}) = f_Z(z=0) = (0.65)^0 (0.35)^{1-0} = 0.35$$

1.4.7 توزيع بيرنولي

مثال

▪ إنتاج مصباح كهربائي

• $S = \{ \text{Good} , \text{Bad} \}$

• احتمال Head = 0.85

• المتغير العشوائي $X = 0$

• المتغير العشوائي $X = 1$

دالة التوزيع:

احتمال Tail = $0.15 = 1 - 0.85$

⇔ ظهور Good

⇔ ظهور Bad

$$f_X(x) = (0.85)^x (0.15)^{1-x} \quad x = 0 , 1$$

$$P(\text{Good}) = f_X(x=1) = (0.85)^1 (0.15)^{1-1} = 0.85$$

$$P(\text{Bad}) = f_X(x=0) = (0.85)^0 (0.15)^{1-0} = 0.15$$

1.4.7 توزيع بيرنولي

التوقع والتباين

■ التوقع

$$\begin{aligned}\mu_X &= \sum x \cdot f_x(x) = (0)(1-p)^{1-0} + (1)p^1 \\ &= p\end{aligned}$$

■ التباين

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E[X^2] - (\mu_X)^2 \\ E[X^2] &= \sum x^2 \cdot f_x(x) = (0)^2 (1-p)^{1-0} + (1)^2 p^1 = p\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Var}[X] &= E[X^2] - (\mu_X)^2 = p - p^2 \\ &= p(1-p)\end{aligned}$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

خصائص التجربة

1. محاولة مكررة عدد n مرة
2. في كل محاولة ناتج التجربة يحتمل قيمتين (نجاح = 1 أو فشل = 0)
3. المتغير العشوائي في التجربة يمثل عدد مرات النجاح في n محاولة
4. احتمال النجاح في المحاولة = p و احتمال الفشل المحاولة = $1-p$

- معالم توزيع ذو الحدين = n , p
- قيم المتغير العشوائي = 0 , 1 , 2 , ... , n

2.4.7 توزيع ذو الحدين

دالة التوزيع

1. رمي قطعة نقود غير متزنة 4 مرات
2. في كل محاولة ($1 = H$ أو $0 = T$)
3. $X =$ عدد مرات H في 4 محاولات
4. احتمال $p = H$ و احتمال $1 - p = T$

■ قيم المتغير العشوائي $X = 0, 1, 2, 3, 4$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

دالة التوزيع

X	نقاط فراغ العينة	الطرق	$f_x(X)$
0	TTTT	1	$(1-p)^4$
1	H TTT , T H T T , T T H T , T T T H	4	$(4) p (1-p)^3$
2	H H T T , H T H T , T H T H , T T H H , H T T H , T H H T	6	$(6) p^2 (1-p)^2$
3	H H H T , H H T H , H T H H , T H H H	4	$(4) p^3 (1-p)^1$
4	HHHH	1	p^4

2.4.7 توزيع ذو الحدين

دالة التوزيع

X	الطرق	عدد نقاط العينة	$f_x(X)$
0	1	عدد طرق اختيار 0 من 4	$\binom{4}{0} p^0 (1-p)^4$
1	4	عدد طرق اختيار 1 من 4	$\binom{4}{1} p^1 (1-p)^3$
2	6	عدد طرق اختيار 2 من 4	$\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$
3	4	عدد طرق اختيار 3 من 4	$\binom{4}{3} p^3 (1-p)^1$
4	1	عدد طرق اختيار 4 من 4	$\binom{4}{4} p^4 (1-p)^0$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

دالة التوزيع

X	عدد H	عدد T	الطرق	$f_x(X)$
0	0	4	1	$\binom{4}{0} p^0 (1-p)^4$
1	1	3	4	$\binom{4}{1} p^1 (1-p)^3$
2	2	2	6	$\binom{4}{2} p^2 (1-p)^2$
3	3	1	4	$\binom{4}{3} p^3 (1-p)^1$
4	4	0	1	$\binom{4}{4} p^4 (1-p)^0$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

دالة التوزيع

1. رمي قطعة نقود غير متزنة 4 مرات
2. في كل محاولة ($1 = H$ أو $0 = T$)
3. $X =$ عدد مرات H في 4 محاولات
4. احتمال $p = H$ و احتمال $1 - p = T$

■ قيم المتغير العشوائي $X = 0, 1, 2, 3, 4$

$$f_X(x) = \binom{4}{x} p^x (1-p)^{4-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

دالة التوزيع

1. رمي قطعة نقود غير متزنة n مرات
2. في كل محاولة ($1 = H$ أو $0 = T$)
3. $X =$ عدد مرات H في n محاولة
4. احتمال $p = H$ و احتمال $1 - p = T$

■ قيم المتغير العشوائي $X = 0, 1, 2, \dots, n$

$$f_X(x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, n$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

مثال

مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائي يعمل على فحص الإنتاج بأخذ عينة عشوائية من 10 مصابيح من الإنتاج الكلي لفحصها ومن خلال التجارب السابق وجد أن المصباح يعمل باحتمال 0.85

المتغير العشوائي $X =$ عدد المصابيح التي تعمل في العينة

دالة التوزيع:

$$f_X(x) = \binom{10}{x} (0.85)^x (0.15)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

مثال

مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائي يعمل على فحص الإنتاج بأخذ عينة عشوائية من 10 مصابيح من الإنتاج الكلي لفحصها ومن خلال التجارب السابق وجد أن المصباح يعمل باحتمال 0.85

المتغير العشوائي $X =$ عدد المصابيح التي تعمل في العينة
احتمال النجاح $p = 0.85$
عدد مرات التكرار $n = 10$

دالة التوزيع:

$$f_X(x) = (0.85)^x (0.15)^{10-x}, x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

مثال

المتغير العشوائي X = عدد المصابيح التي تعمل في العينة
احتمال النجاح $p = 0.85$ عدد مرات التكرار $n = 10$

$$f_X(x) = \binom{10}{x} (0.85)^x (0.15)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

1. احتمال أن تكون العينة سليمة بالكامل؟

$$P(X=10) = f_X(10) = \binom{10}{10} (0.85)^{10} (0.15)^{10-10} = (0.85)^{10} = 0.197$$

2. احتمال أن تكون المصابيح الثلاثة = 3؟

$$P(X=7) = f_X(7) = \binom{10}{7} (0.85)^7 (0.15)^{10-7} = (0.85)^7 (0.15)^3 = 0.1298$$

3. احتمال أن تكون المصابيح السليمة لا تقل عن 5؟

$$\begin{aligned} P(X \geq 5) &= f_X(5) + f_X(6) + f_X(7) + f_X(8) + f_X(9) + f_X(10) \\ &= (0.0085) + (0.040) + (0.12983) + (0.2759) + (0.3474) + (0.197) = 0.99862 \end{aligned}$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

مثال

المتغير العشوائي $X =$ عدد المصابيح التي تعمل في العينة
احتمال النجاح $p = 0.85$ عدد مرات التكرار $n = 10$

$$f_X(x) = (0.85)^x (0.15)^{10-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 10$$

1. احتمال ألا يزيد عدد التالفة عن 3 ؟
احتمال أن لا يقل عدد السليم عن 7 مصابيح

$$\begin{aligned} P(X \geq 7) &= f_X(7) + f_X(8) + f_X(9) + f_X(10) \\ &= (0.12983) + (0.2759) + (0.3474) + (0.197) = 0.95 \end{aligned}$$

2. احتمال أن تكون المصابيح السليمة في العينة 4 على الأكثر ؟

$$\begin{aligned} P(X \leq 4) &= f_X(4) + f_X(3) + f_X(2) + f_X(1) + f_X(0) = \\ &= (0.00125) + (0.00013) + (0.00001) + (0.000001) + (\approx 0) = 0.00138 \end{aligned}$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

التوقع :

$$\mu_X = \sum x \cdot f_x(x) = np$$

التباين :

$$\text{Var}[X] = np(1-p)$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

مثال

في أحد المواد كان عدد الطلاب المسجلين فيها 20 طالبا ،
ويحتمل رسوب أي طالب في الشعبة بنسبة 20%

المتغير العشوائي X = عدد الراسبين في المادة
احتمال النجاح في التجربة = احتمال رسوب الطالب $p = 0.2$
عدد مرات التكرار $n = 20$

دالة التوزيع:

$$f_X(x) = \binom{20}{x} (0.8)^x (0.2)^{20-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 20$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

مثال

$$f_X(x) = (0.2)^x (0.8)^{20-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 20$$

1. احتمال نجاح جميع الطلاب؟

$$P(X=0) = f_X(0) = (0.2)^0 (0.8)^{20-0} = (0.8)^{20} = 0.01153$$

2. احتمال أن يرسب نصف الشعبة؟

$$P(X=10) = f_X(10) = (0.2)^{10} (0.8)^{10} = 1.1 \times 10^{-8}$$

3. احتمال أن يرسب ربع الشعبة على الأكثر؟

$$\begin{aligned} P(X \leq 5) &= f_X(0) + f_X(1) + f_X(2) + f_X(3) + f_X(4) + f_X(5) \\ &= (0.01153) + (0.0577) + (0.1369) + (0.20536) + (0.2182) \\ &\quad + (0.17456) + (0.197) = 0.80421 \end{aligned}$$

2.4.7 توزيع ذو الحدين

مثال

$$f_X(x) = \binom{20}{x} (0.2)^x (0.8)^{20-x}, \quad x = 0, 1, 2, \dots, 20$$

1. متوسط عدد الطلاب الراسبين؟

$$E[X] = np = 20(0.2) = 4 \text{ طلاب}$$

2. متوسط عدد الطلاب الناجين؟

$$n - E[X] = 20 - np = 20 - 4 = 16 \text{ طالب}$$

3. التباين لعدد الطلاب الراسبين؟

$$\text{Var}[X] = np(1-p) = 20(0.2)(0.8) = 3.2$$

4. الانحراف المعياري لعدد الطلاب الراسبين؟

$$(\text{Var}[X])^{1/2} = (np(1-p))^{1/2} = (3.2)^{1/2} = 1.789$$