

## 6. مبادئ الاحتمالات

---

- تعاريف ومصطلحات
- المجموعات والعمليات عليها
- حساب الاحتمالات على الحوادث
- الاحتمال الشرطي

## 1.6 مقدمة

يقال :

1. من المحتمل هطول المطر هذا اليوم (بمشيئة الله)
2. احتمالية نجاح محمد أكبر من احتمالية نجاح صالح
3. من المستحيل فشل هذه التجربة
4. من المؤكد نجاح عملية استئصال اللوزتين (بإذن الله)

((إحتمال))

قياس فرصة حدوث حادثة

مقياس كمي لفرص الحدوث

## 1.6 مقدمة

### تعريف :

الاحتمال هو مقياس كمي لفرصة وقوع حادثة معينة يكون محصورا بين 0 و 1.

0.6

من المحتمل هطول المطر هذا اليوم (بمشيئة الله)

0.6

احتمالية نجاح محمد أكبر من احتمالية نجاح صالح

0.8

من المستحيل فشل هذه التجربة

0.001

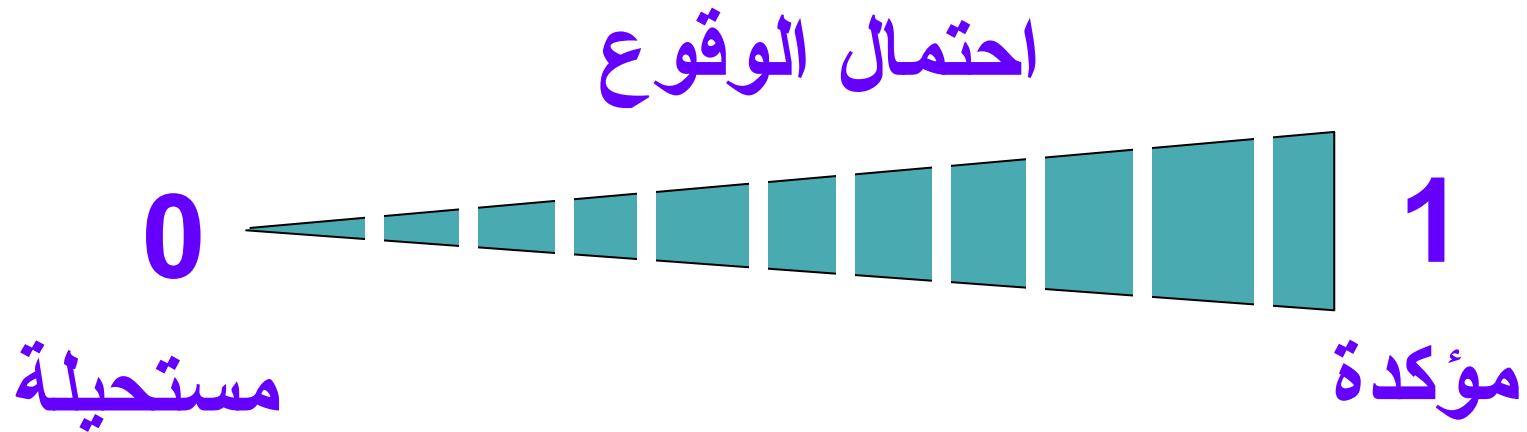
0.995

من المؤكد نجاح عملية استئصال اللوزتين (بإذن الله)

## 1.6 مقدمة

تعريف :

الاحتمال هو مقياس كمي لفرصة وقوع حادثة معينة يكون محصورا بين 0 و 1.



## 2.6 التجربة العشوائية

### شروط :

1. يمكن حصر النتائج الممكنة قبل التجربة
2. لا يمكن التنبؤ بالنتيجة قبل التجربة
3. يمكن قياس فرص الحدوث لكل نتيجة

### أمثلة :

1. رمي قطعتي نقود مرة واحدة
2. حالة الجو في يومين متتاليين
3. نتائج طالب بنهاية الفصل الدراسي في 3 مواد
4. حالة الأسهم في اليوم التالي لمحفظه استثمار تحوي ثلاث شركات
5. رمي حجري نرد معا

## 3.6 فضاء (فراغ) العينة

**تعريف :**

فراغ العينة  $S$  هو جميع النتائج الممكنة للتجربة العشوائية وعدد عناصرها  $n(S)$ .

– سرد النتائج

– استخدام الشجرة

– استخدام طرق العد

**مثال-1 :**

التجربة العشوائية : رمي قطعتي نقود مرة واحدة

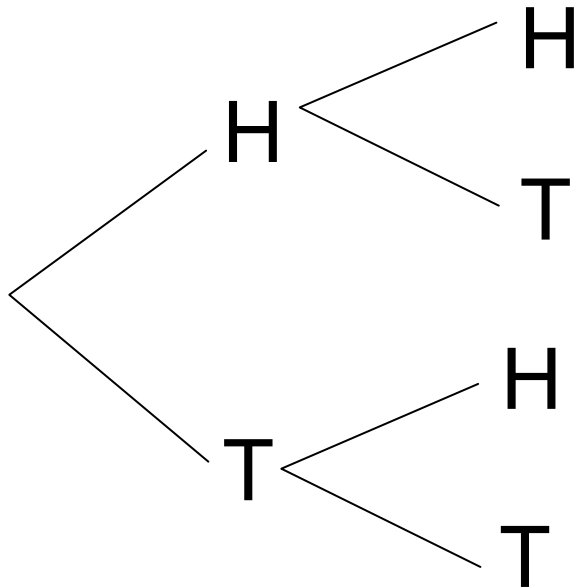
ليكن  $H$  يمثل الصورة على القطعة

و  $T$  يمثل الكتابه على الوجه الآخر

## 3.6 فضاء (فراغ) العينة

مثال-1 :

التجربة العشوائية : رمي قطعتي نقود مرة واحدة  
ليكن H يمثل الصورة على القطعة  
و T يمثل الكتابه على الوجه الآخر



فضاء العينة :

$$S = \{(H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 = 4$$

## 3.6 فضاء (فراغ) العينة

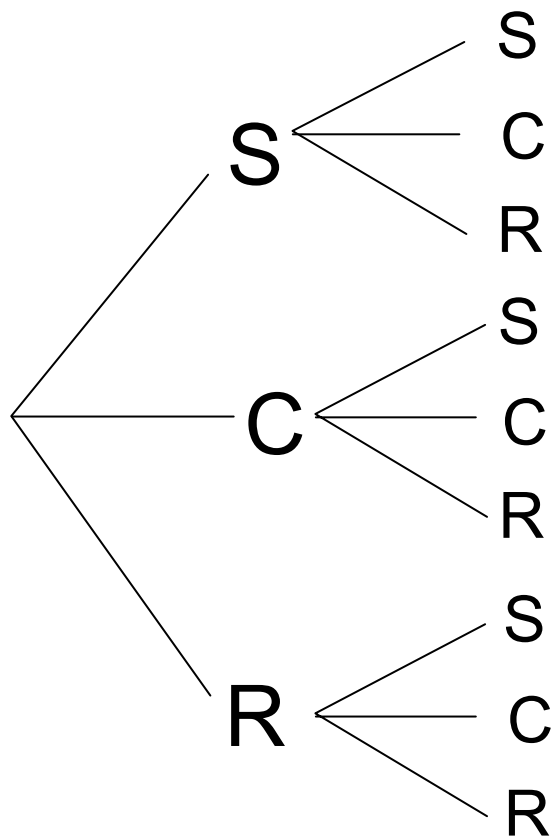
مثال-2 :

التجربة العشوائية : حالة الجو في يومين متتاليين  
حالة الجو في أي يوم

S مشمس

C غائم

R ممطر



فضاء العينة :

$$S = \{(S,S), (S,C), (S,R), (C,S), (C,C), (C,R), (R,S), (R,C), (R,R)\}$$

$$n(S) = 3 \times 3 = 9$$



## 3.6 فضاء (فراغ) العينة

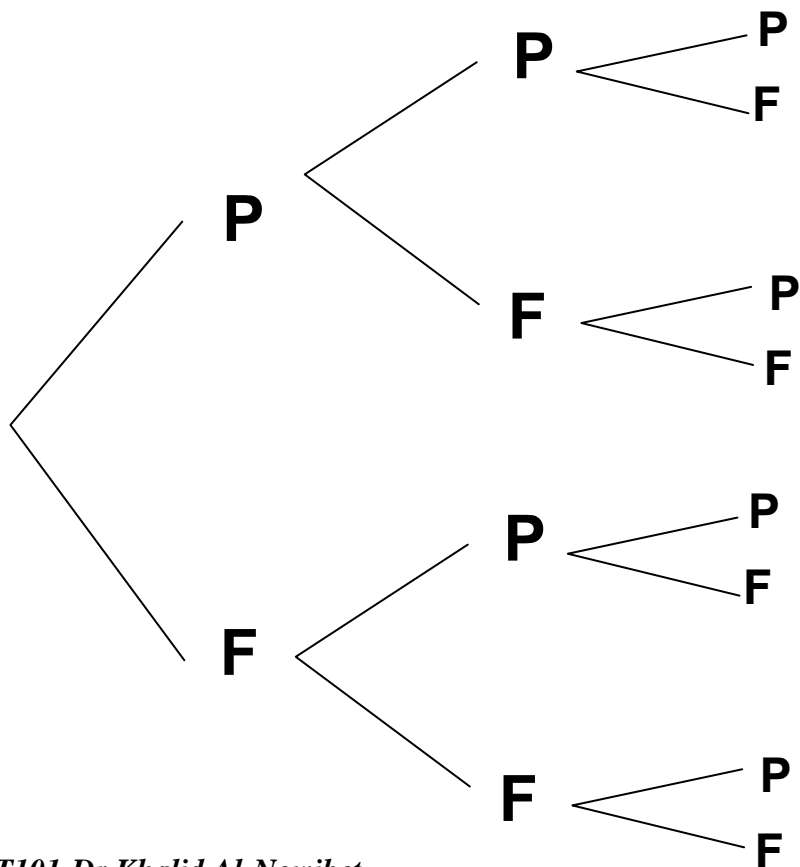
مثال-3 :

التجربة العشوائية :

نتائج طالب بنهاية الفصل الدراسي في 3 مواد

P ناجح

F راسب



فضاء العينة :

$$S = \{(P,P,P) , (P,P,F) , \\ (P,F,P) , (P,F,F) , \\ (F,P,P) , (F,P,F) , \\ (F,F,P) , (F,F,F)\}$$

$$n(S) = 2 \times 2 \times 2 = 8$$

## 3.6 فضاء (فراغ) العينة

مثال-4 :

التجربة العشوائية :

رمي حجر نرد متزن مرتين

عناصر الحجر الواحد =  $\{1,2,3,4,5,6\}$

$S =$

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

فضاء العينة :

$$n(S) = 6 \times 6 = 36$$

## 4.6 الحادثة أو الحدث

### تعريف :

مجموعة جزئية من عناصر فضاء العينة.  
حادثة  $A$

### الصياغة :

- سرد عناصر الحادثة
- الوصف اللفظي

### ملاحظات :

- حدوث (وقوع) حادثة  $A$  يتحقق بحدوث أحد عناصر الحادثة  $A$
- عدد عناصر الحادثة  $A$  هو  $n(A)$
- الحادثة المستحيلة هي المجموعة الخالية  $\phi$  و عدد عناصرها  $n(\phi)=0$
- الحادثة المؤكدة هي  $S$

## 4.6 الحادثة أو الحدث

مثال 1:

رمي حجر نرد متزن مرة واحدة

فراغ العينة =  $S = \{1,2,3,4,5,6\}$

الحوادث:

1.  $A =$  حادثة ظهور عدد زوجي
2.  $B =$  حادثة ظهور عدد فردي
3.  $C =$  حادثة ظهور عدد أقل من 6
4.  $D =$  حادثة ظهور عدد 6 على الأقل
5.  $E =$  حادثة ظهور عدد 7 على الأقل
6.  $F =$  حادثة ظهور عدد أقل من 10

## 4.6 الحادثة أو الحدث

### مثال 1:

تمثيل الحوادث بأشكال فن (Ven)

فراغ العينة  $\{1,2,3,4,5,6\} = S$

الحوادث:

A. حادثة ظهور عدد زوجي

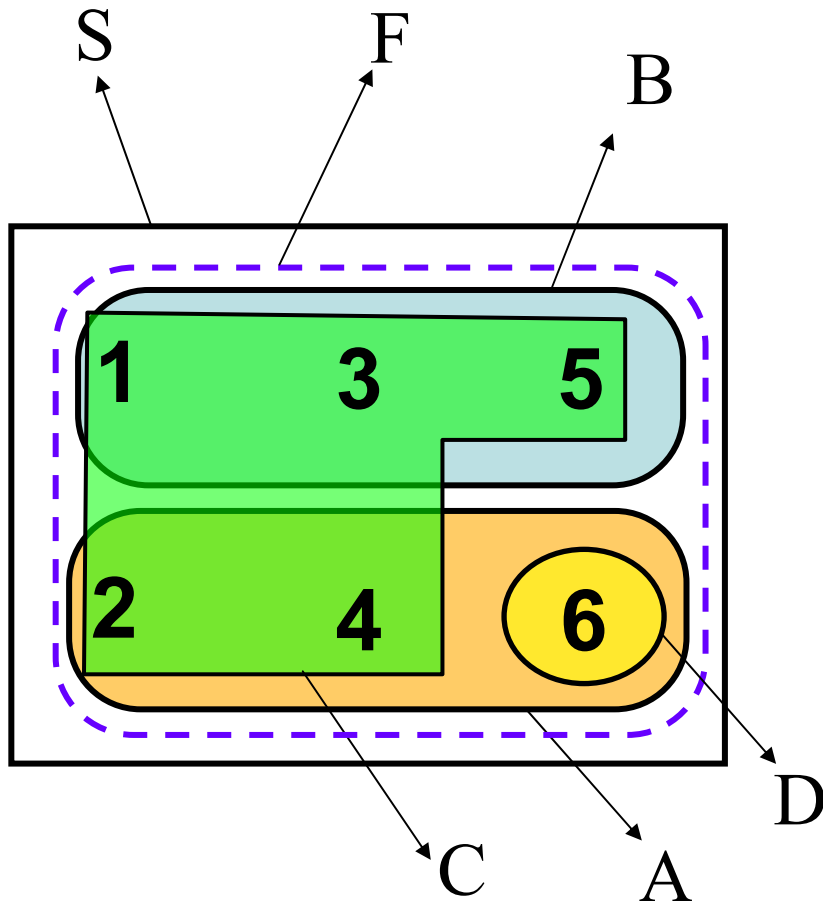
B. حادثة ظهور عدد فردي

C. حادثة ظهور عدد أقل من 6

D. حادثة ظهور عدد 6 على الأقل

E. حادثة ظهور عدد 7 على الأقل

F. حادثة ظهور عدد أقل من 10



## 4.6 الحادثة أو الحدث

مثال 2 :

التجربة العشوائية : رمي قطعتي نقود مرة واحدة

$$S = \{(H,H) , (H,T) , (T,H) , (T,T)\}$$

الحوادث:

A = حادثة ظهور صورة H في الرمية الأولى

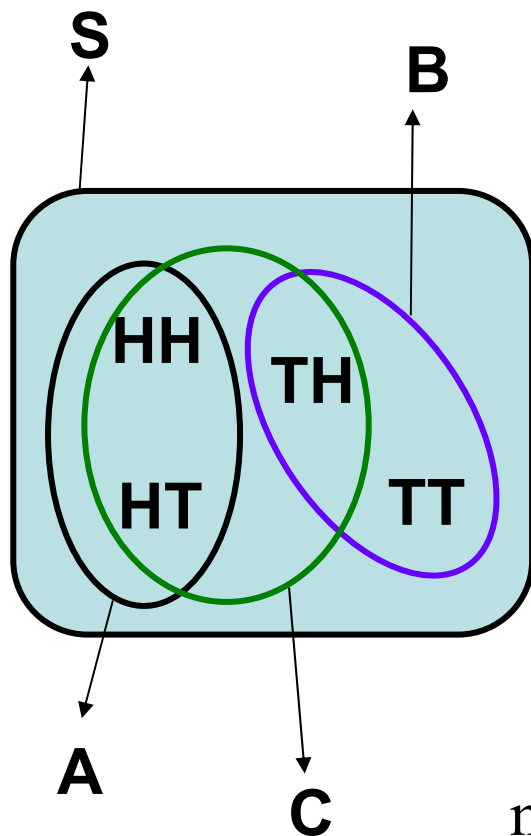
$$n(A) = 2 \quad A = \{(H,H) , (H,T)\} =$$

B = حادثة ظهور كتابة T في الرمية الأولى

$$n(B) = 2 \quad B = \{(T,H) , (T,T)\} =$$

C = حادثة ظهور صورة H واحدة على الأقل

$$n(A) = 3 \quad C = \{(H,H) , (H,T), (T,H)\} =$$



## 4.6 الحادثة أو الحدث

مثال-3 :

التجربة العشوائية :

رمي حجر نرد متزن مرتين

الحوادث:

A. = مجموع الرميتين = 5

B. = ظهور العدد 6

C. = ظهور عددين متساويين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

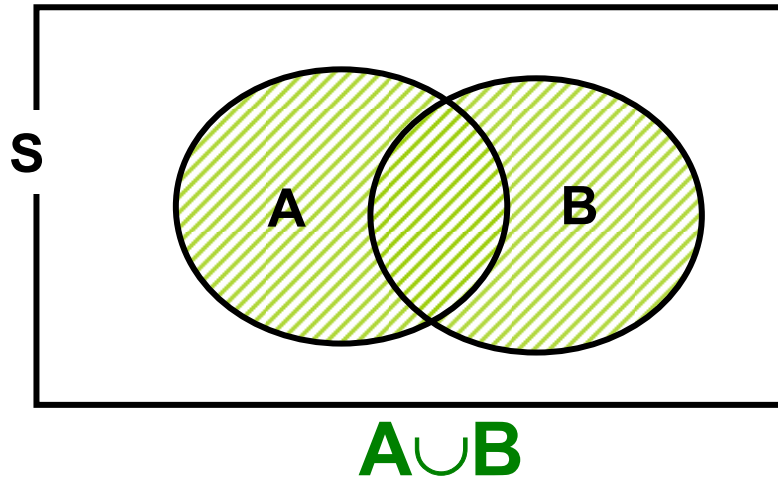
## 5.6 العمليات على الحوادث

الحوادث مجموعات جزئية من  $S$   
الحوادث تحقق عمليات المجموعات

### أ. اتحاد الحوادث ( $\cup$ )

الحادثة ( $A \cup B$ ) هي جميع العناصر التي تنتمي إلى  $A$  أو  $B$

$$A \cup B = \{ x \in S : x \in A \text{ or } x \in B \}$$





## 4.6 الحادثة أو الحدث

مثال :

التجربة العشوائية :

رمي حجر نرد متزن مرتين

الحوادث:

$A =$  مجموع الرميتين  $\geq 5$

$B =$  ظهور عددين متساويين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

العناصر المتساوية أو التي مجموعها  $\geq 5$

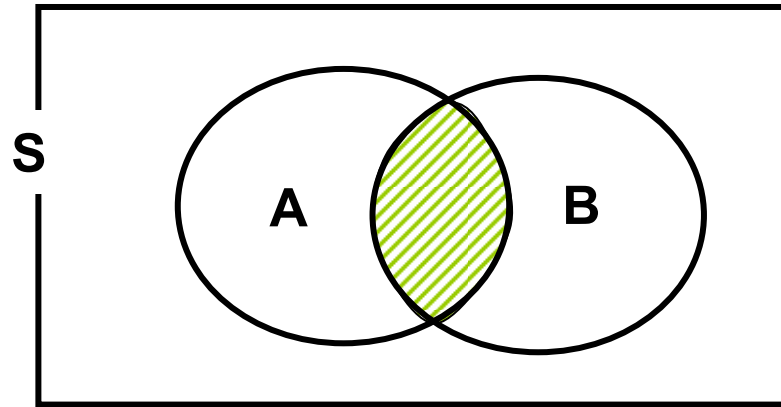
$$A \cup B = \{ (1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1) \}$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

### ب. تقاطع الحوادث ( $\cap$ )

الحادثة ( $A \cap B$ ) هي جميع العناصر التي تنتمي إلى  $A$  و  $B$  معاً

$$A \cap B = \{ x \in S : x \in A \text{ and } x \in B \}$$



$A \cap B$

## 4.6 الحادثة أو الحدث

مثال :

التجربة العشوائية :

رمي حجر نرد متزن مرتين

الحوادث:

$A =$  مجموع الرميتين  $\geq 5$

$B =$  ظهور عددين متساويين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

العناصر المتساوية و مجموعها  $\geq 5$

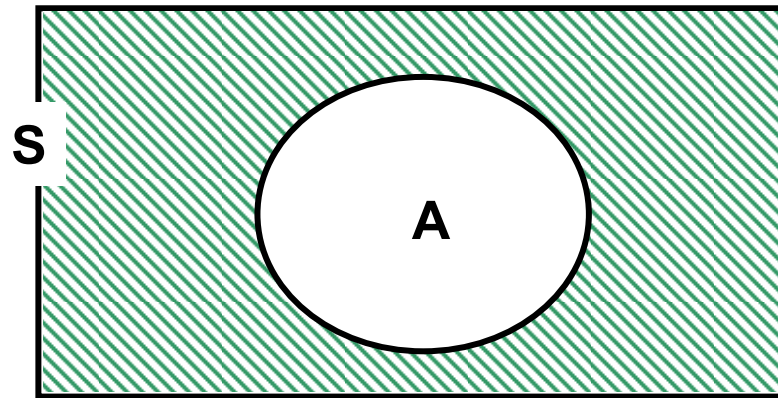
$$A \cap B = \{ (1,1), (2,2) \}$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

### ج. متممة (مكملة) الحادثة ( $A^c$ )

الحادثة ( $A^c$ ) هي جميع العناصر التي لا تنتمي إلى  $A$

$$A^c = \{ x \in S : x \notin A \}$$



$A^c$

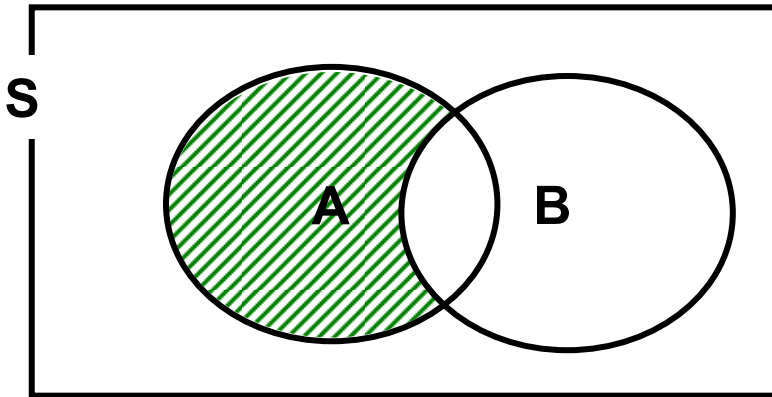
## 5.6 العمليات على الحوادث

### د. الفرق بين الحوادث

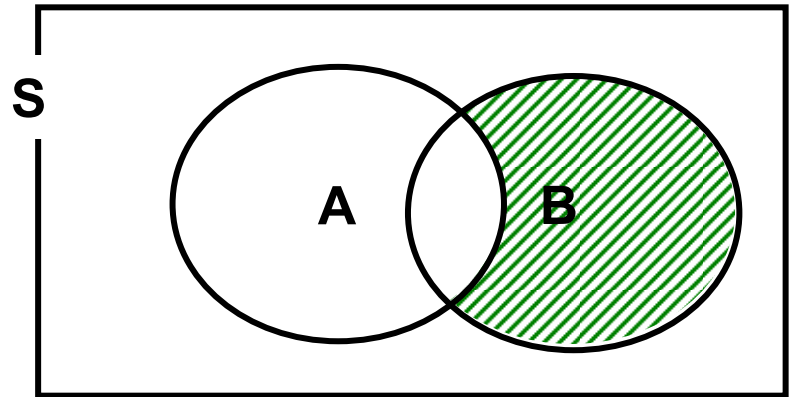
الحادثة  $(A-B)$  هي جميع العناصر التي تنتمي إلى  $A$  و لا تنتمي للحادثة  $B$

$$A-B = \{ x \in S : x \in A \text{ and } x \notin B \}$$

$$B-A = \{ x \in S : x \in B \text{ and } x \notin A \}$$



**A-B**



**B-A**

## 4.6 الحادثة أو الحدث

مثال :

التجربة العشوائية :

رمي حجر نرد متزن مرتين

الحوادث:

$A =$  مجموع الرميتين  $\geq 5$

$B =$  ظهور عددين متساويين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

العناصر التي مجموعها  $\geq 5$  وليست متساوية

$$A-B = \{(1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\}$$

## 4.6 الحادثة أو الحدث

مثال :

التجربة العشوائية :

رمي حجر نرد متزن مرتين

الحوادث:

$A =$  مجموع الرميتين  $\geq 5$

$B =$  ظهور عددين متساويين

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

العناصر المتساوية ومجموعها  $5 <$

$$B-A = \{ (3,3), (4,4), (5,5), (6,6) \}$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

### نتائج على العمليات

$$(A^c)^c = A$$

$$S^c = \phi$$

$$\phi^c = S$$

$$A^c = S - A$$

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

$$A \cap S = A$$

$$A \cup S = S$$

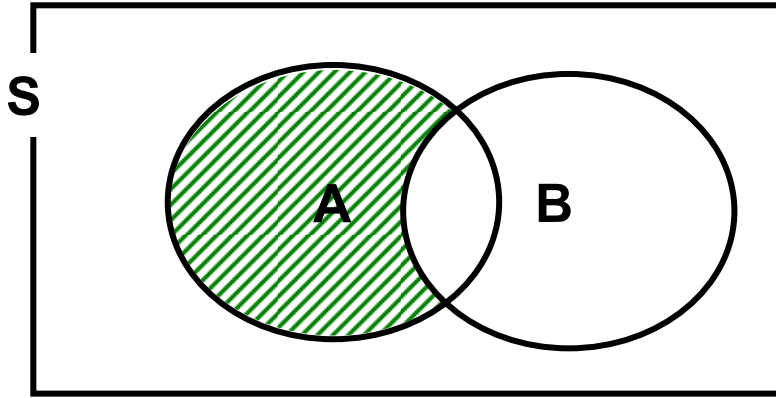
$$A \cap \phi = \phi$$

$$A \cup \phi = A$$

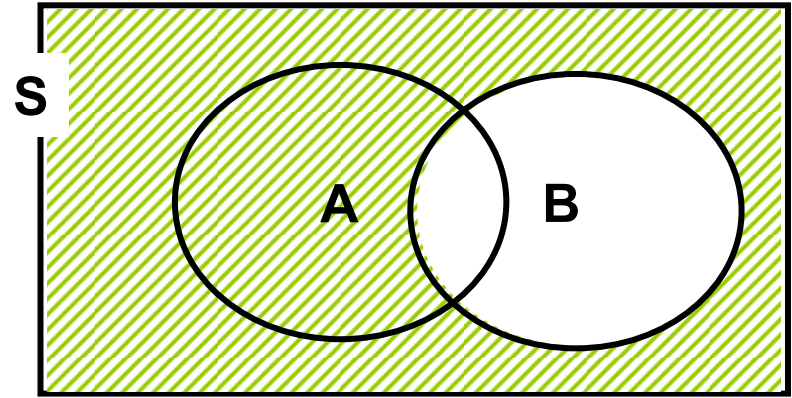


# 5.6 العمليات على الحوادث

## نتائج على العمليات



$A - B$

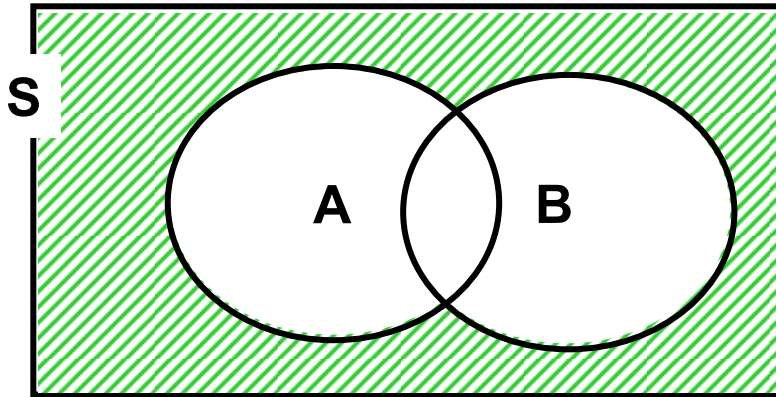


$A \cap B^c$

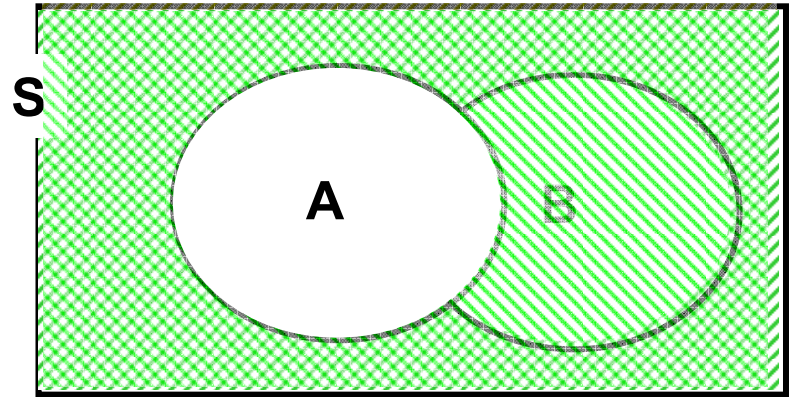
$$A - B = A \cap B^c$$

# 5.6 العمليات على الحوادث

## قانون دي مورجان



$$A \cup B$$
$$(A \cup B)^c$$



$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

مكملة الاتحاد = تقاطع المكملات

مكملة التقاطع = اتحاد المكملات

## 5.6 العمليات على الحوادث

مثال :

التجربة العشوائية : رمي حجر نرد متزن مرة واحدة ولتكن حادثة A ظهور عدد زوجي و حادثة B ظهور عدد فردي أكبر من 2

$$S = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

$$A = \{ 2, 4, 6 \}$$

$$B = \{ 3, 5 \}$$

$$A^c = \{1,3,5\} \quad \text{and} \quad B^c = \{1,2,4,6\}$$

$$\Rightarrow A^c \cap B^c = \{1\} \quad \text{and} \quad A^c \cup B^c = \{1,2,3,4,5,6\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\} \Rightarrow (A \cup B)^c = \{1\} = A^c \cap B^c$$

$$A \cap B = \phi \Rightarrow (A \cap B)^c = \{1,2,3,4,5,6\} = A^c \cup B^c$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

مثال :

التجربة العشوائية : نتائج طالب بنهاية الفصل الدراسي في 3 مواد  
P ناجح أو F راسب ، أوجد ما يلي :

S : فراغ العينة

A : نجاح الطالب في مادتين على الأقل

B : نجاح الطالب في المادة الأولى

C : نجاح الطالب في المادة الثالثة

D : نجاح الطالب في المادة الأولى ورسوبه في الثالثة

الحوادث:

$$A \cap B, B \cup C, A \cap C^c, A^c \cup B^c, B^c \cap C^c, A^c \cap D$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

مثال :

S : فراغ العينة

$$S = \{(P,P,P), (P,P,F), (P,F,P), (P,F,F), (F,P,P), (F,P,F), (F,F,P), (F,F,F)\}$$

A : نجاح الطالب في مادتين على الأقل

$$A = \{(P,P,P), (P,P,F), (P,F,P), (F,P,P)\}$$

B : نجاح الطالب في المادة الأولى

$$B = \{(P,P,P), (P,P,F), (P,F,P), (P,F,F)\}$$

C : نجاح الطالب في المادة الثالثة

$$C = \{(P,P,P), (P,F,P), (F,P,P), (F,F,P)\}$$

D : نجاح الطالب في المادة الأولى ورسوبه في الثالثة

$$D = \{(P,P,F), (P,F,F)\}$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

مثال

$$S = \{(P,P,P) , (P,P,F) , (P,F,P) , (P,F,F) , (F,P,P) , (F,P,F) , (F,F,P) , (F,F,F)\}$$

$$A = \{(P,P,P) , (P,P,F) , (P,F,P) , (F,P,P) \}$$

$$B = \{(P,P,P) , (P,P,F) , (P,F,P) , (P,F,F) \}$$

$$C = \{(P,P,P) , (P,F,P) , (F,P,P) , (F,F,P)\}$$

$$D = \{ (P,P,F) , (P,F,F) \}$$

$$A \cap B$$

$$B \cup C$$

$$A \cap C^c$$

$$A^c \cup B^c$$

$$B^c \cap C^c$$

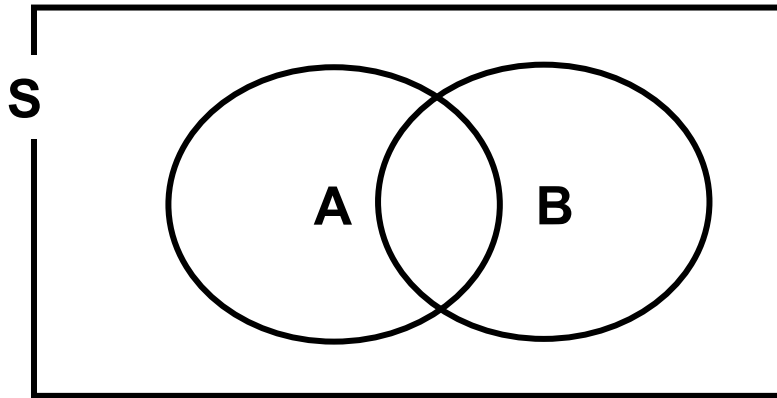
$$A^c \cap D$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

### الحوادث المتنافية

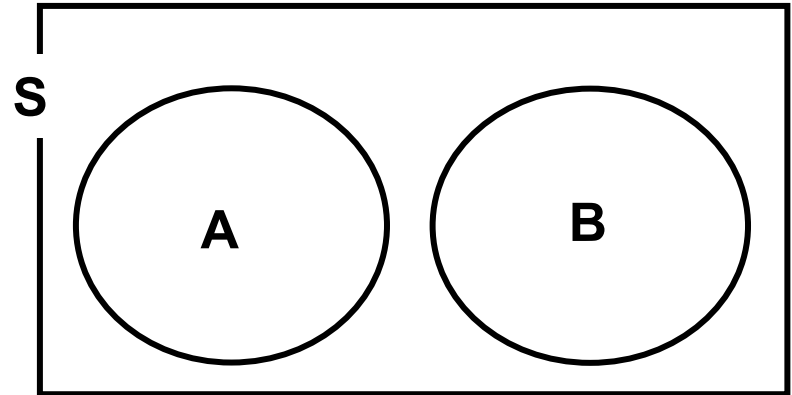
حدوث أحد الحادثتين ينفي وقوع الحوادث المتنافية الأخرى

$$A \cap B = \phi$$



A و B غير متنافيتين

$$A \cap B \neq \phi$$



A و B متنافيتين

$$A \cap B = \phi$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

### الحوادث المتنافية

حدوث أحد الحادثتين ينفي وقوع الحوادث المتنافية الأخرى

$$A \cap B = \phi$$

أمثاله:

1. رمي قطعة نقود : حادثة ظهور H تنفي حادثة ظهور T
2. حادثة نجاح الطالب في مادة 101 إحص تنفي رسوبه في نفس المادة
3. حجر النرد : حادثة ظهور رقم 4 تنفي ظهور الأرقام 1,2,3,5,6
4. حالة الطقس : ظهور طقس مشمس ينفي ظهور الطقس الغائم أو الممطر



## 5.6 العمليات على الحوادث

### الحوادث الشاملة

مجموعة حوادث مختلفة اتحادها يمثل فراغ العينة الحوادث  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$  تسمى حوادث شاملة إذا كان

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = S$$

أمثاله:

1. رمي قطعة نقود : حادثة ظهور H و حادثة ظهور T حوادث شاملة

2. حجر النرد : حادثة {1,2} و حادثة {3,4,5} و حادثة {2,4,6}

$$\{1,2\} \cup \{3,4,5\} \cup \{2,4,6\} = \{1,2,3,4,5,6\} = S$$

⇒ حوادث شاملة

## 5.6 العمليات على الحوادث

### الحوادث المتكافئة (الحوادث متساوية الفرص)

حوادث مختلفة متساوية في عدد العناصر

الحوادث  $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$   
تسمى حوادث متكافئة إذا كان

$$n(A_1) = n(A_2) = n(A_3) = \dots = n(A_n)$$

## 5.6 العمليات على الحوادث

### الحوادث المتكافئة (الحوادث متساوية الفرص)

#### حوادث مختلفة متساوية في عدد العناصر

أمثاله:

1. رمي قطعة نقود مرة واحدة : ظهور H و ظهور T حوادث متكافئة

2. حجر النرد :  $A = \text{حادثة ظهور عدد زوجي } \{2,4,6\}$   
 $n(A) = 3$

$B = \text{حادثة ظهور عدد فردي } \{1,3,5\}$   $n(B) = 3$

$\Leftarrow$  A و B حوادث متكافئة (متساوية الفرص)

## 5.6 العمليات على الحوادث

### الحوادث المتكافئة (الحوادث متساوية الفرص)

#### حوادث مختلفة متساوية في عدد العناصر

أمثاله:

وعاء يحتوي على 3 كرات حمراء وخمس كرات بيضاء وكرتان سوداء  
سحبت من الوعاء كرة واحدة فقط

إمكانية الحدوث بخمس طرق

W = ظهور كره بيضاء

إمكانية الحدوث بثلاث طرق

R = ظهور كره حمراء

إمكانية الحدوث بطريقتين

B = ظهور كره سوداء

حوادث غير متكافئة (غير متساوية الفرص)  $B$  و  $R$  و  $W$   $\Leftarrow$