المحاضرة الماضية

- تعريف الدالة والمتراجحة الخطية
- البرنامج الخطي
  - دالة الهدف ، القيود ، اللاسلبية
- خواص البرنامج الخطي
  - النسبية ، التجميع ، الاتصال ، التأكد
- التمثيل البياني للبرنامج الخطي
  - تمثيل القيود : معادلة ، متراجحة
  - تحديد فضاء الحلول الممكنة
  - تمثيل دالة الهدف
  - تحديد الحل الأمثل
  - صياغة الحل الأمثل

الحل البياني للبرنامج الخطي

(Graphical Solution for Linear Programs)

<u>مثـــال (1):</u>

مصنع ينتج السيارات الفاخرة ، وتعتقد الإدارة أن غالبية الزبائن إما من رجال الأعمال أو من الموظفين ذوي الدخل العالي. وللوصول إلى أكبر شريحة من الزبائن قررت الإدارة طرح إعلانات تجارية تتخلل إما البرامج الكوميدية أو البرامج الرياضية. ومن خلال دراسة أجرتها وزارة الإعلام وجد أن البرامج الكوميدية يتابعها 7 مليون من رجال الأعمال و 2 مليون من موظفي الدخل العالي. في حين أن البرامج الرياضية يتابعها 2 مليون من رجال الأعمال و 12 مليون من موظفي الدخل العالي. وترغب الإدارة في إيجاد سياسة إعلانية مثلى تضمن لها كحد أدنى 28 مليون مشاهد من رجال الأعمال و 24 مليون مشاهد من موظفي الدخل العالي. فإذا كان الإعلان يكلف 50,000 ريال للدقيقة الواحدة خلال البرامج الكوميدية ويكلف 100,000 ريال للدقيقة خلال البرامج الرياضية فما هي سياسة الإعلان المناسبة.

الحل البياني للبرنامج الخطي
(Graphical Solution for Linear Programs)

الحــل :

- متغيرات القرار : ما الذي تملك الشركة التصرف فيه؟؟
  - عدد الدقائق للإعلان خلال البرامج الكوميدية
  - عدد الدقائق للإعلان خلال البرامج الرياضية
- لتكن

x_1 = Advertisement length (minutes) during the comedy programs.

x_2 = Advertisement length (minutes) during the sport programs.

الحل البياني للبرنامج الخطي
(Graphical Solution for Linear Programs)

الحـــل :

- دالة الهدف :
  - لتكن Z التكلفة الإجمالية بالريال للإعلانات خلال البرامج الكوميدية والبرامج الرياضية

$$Z = 50{,}000\, x_1 + 100{,}000\, x_2$$

  - يمكن إعادة تعريف Z التكلفة الإجمالية بـالــ 1000 ريال للإعلان خلال البرامج الكوميدية والبرامج الرياضية. وبالتالي :

$$Z = 50\, x_1 + 100\, x_2$$

  - Z تكاليف ⇐ Min.

الحل البياني للبرنامج الخطي
(Graphical Solution for Linear Programs)

<u>الحــل :</u>

- القيود :
  - قيد الحد الأدنى لمشاهدي الإعلان من رجال الأعمال علماً بأن 7 مليون منهم يتابعون البرامج الكوميدية و 2 مليون منهم يتابعون البرامج الرياضية

$$7mil\ x_1 + 2mil\ x_2 \geq 28mil$$
$$\Leftrightarrow\ 7\ x_1 + 2\ x_2 \geq 28$$

  - قيد الحد الأدنى لمشاهدي الإعلان من موظفي الدخل العالي علماً بأن 2 مليون منهم يتابعون البرامج الكوميدية و 12 مليون منهم يتابعون البرامج الرياضية

$$2mil\ x_1 + 12mil\ x_2 \geq 24mil$$
$$\Leftrightarrow\ 2\ x_1 + 12\ x_2 \geq 24$$

الحل البياني للبرنامج الخطي
(Graphical Solution for Linear Programs)

الحــل :

- البرنامج الخطي :

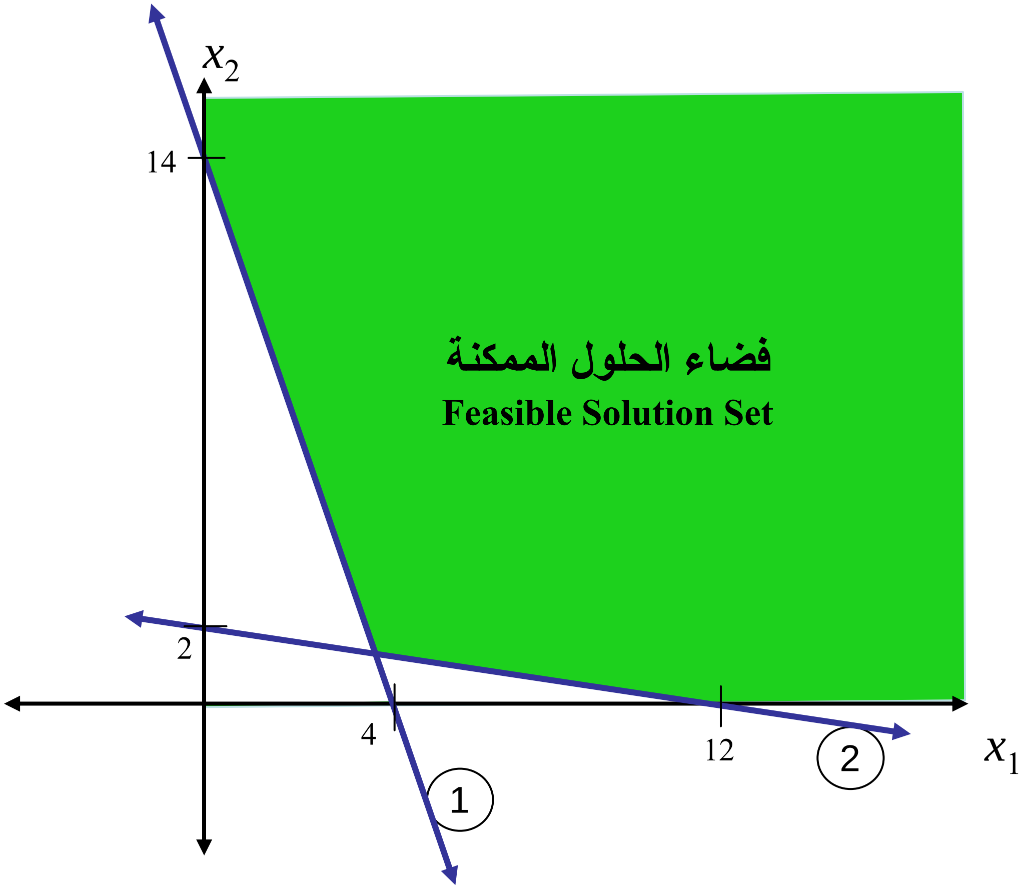
دالة الهدف + القيــود + اللاساليبيــة

$$\text{Min} \quad Z = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

Subject to

$$7\,x_1 + 2\,x_2 \geq 28$$
$$2\,x_1 + 12\,x_2 \geq 24$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

الحل البياني للبرنامج الخطي
(Graphical Solution for Linear Programs)



<u>مثال(1) :</u>

القيــــود

$$x_1 \geq 0 \ , \ \ x_2 \geq 0$$

$$7\, x_1 + 2\, x_2 \geq 28$$

$$(0,14) \ , \ (4,0)$$

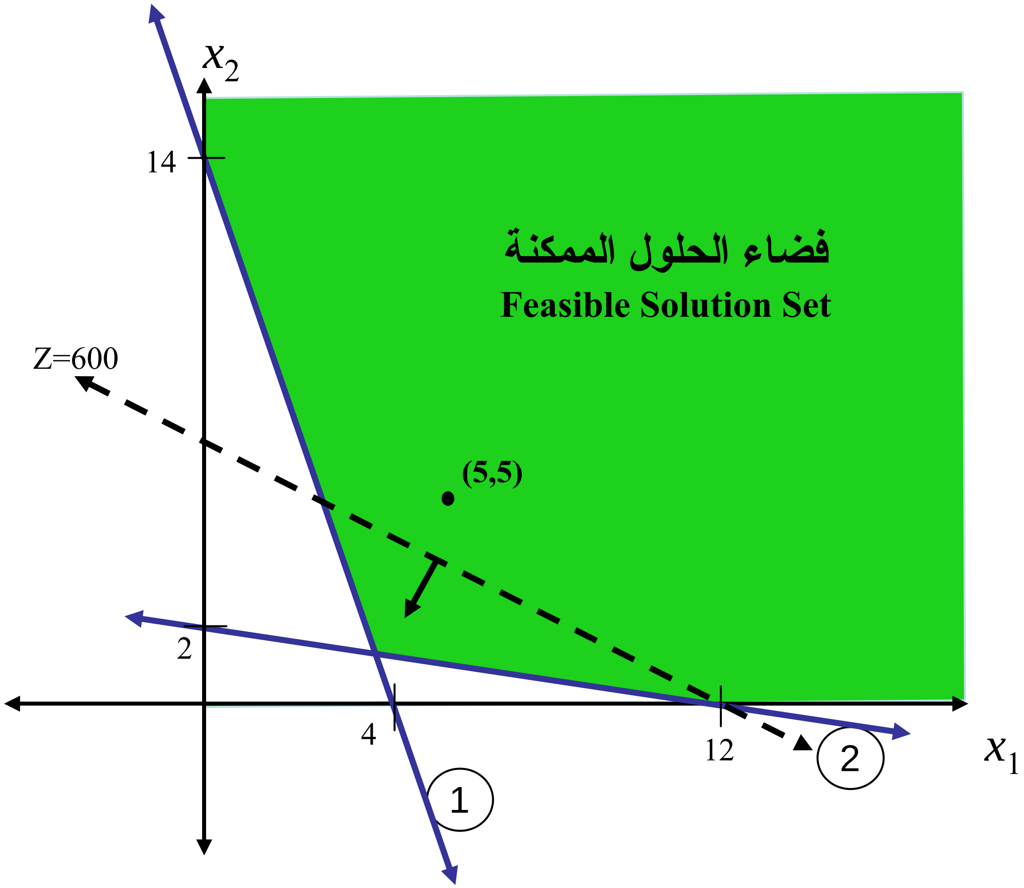
$$(0,0) \Rightarrow 7(0)+2(0) = 0 < 28$$

$$2\, x_1 + 12\, x_2 \geq 24$$

$$(0,2) \ , \ (12,0)$$

$$(0,0) \Rightarrow 2(0)+12(0) = 0 < 24$$

الحل البياني للبرنامج الخطي
(Graphical Solution for Linear Programs)



<u>مثال :</u>

دالة الهدف

$$\text{Min} \quad Z = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

$$\text{Let } Z = 600 = \alpha$$

$$\Rightarrow 600 = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

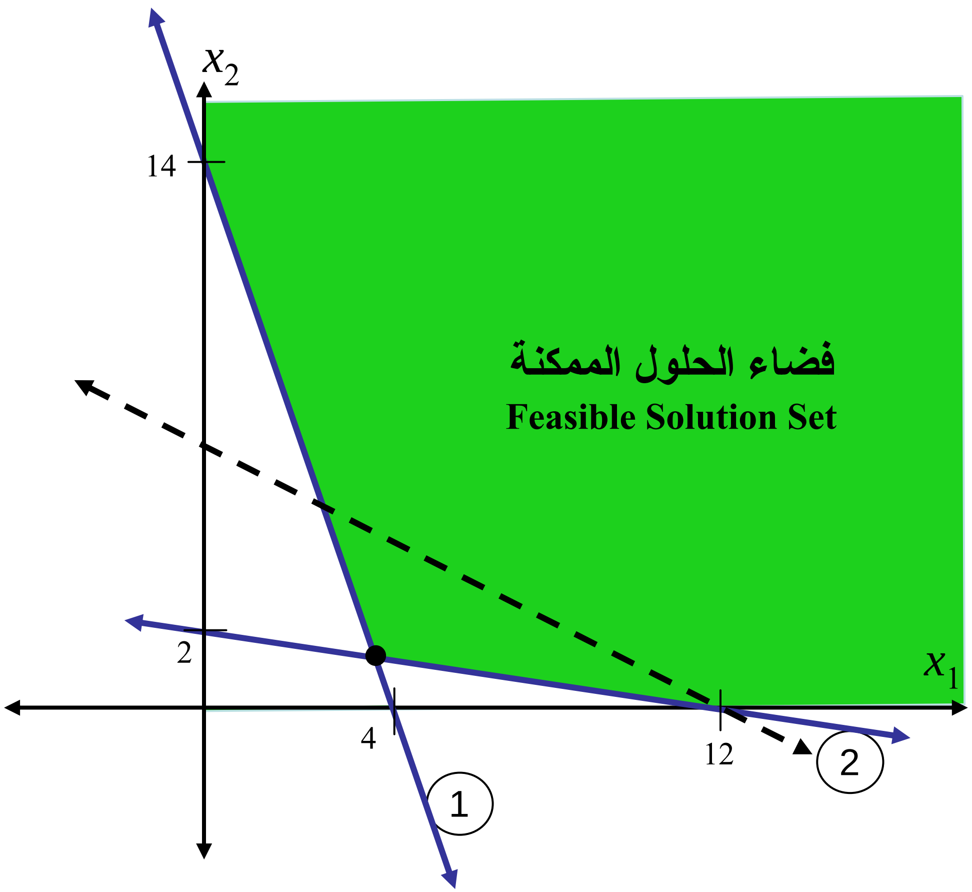
$$(0,6)\ ,\ (12,0)$$

$$\text{Let } (y_1, y_2) = (5,5)$$

$$\Rightarrow \quad 50\,(5) + 100(5) = 750$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 750 > 600 = \alpha$$

الحل البياني للبرنامج الخطي
(Graphical Solution for Linear Programs)



مثال (2) :

الحل الأمثل

إزاحة مستقيم Z الافتراضي باتجاه الأمثلية

لإيجاد قيم متغيرات القرار الأمثل
حل المعادلتين

$$7\,x_1 + 2\,x_2 = 28$$
$$2\,x_1 + 12\,x_2 = 24$$

$$\Rightarrow x_1^* = 3.6 \text{ and } x_2^* = 1.4$$

على الإدارة شراء 3.6 دقيقة من زمن البرنامج الكوميدي و 1.4 دقيقة من زمن البرنامج الرياضي بتكلفة مثلى = 320,000 ريال

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)

- حل أمثل فريد (Unique Optimal Solution)

للبرنامج الخطي نقطة وحيدة تعطي قيمة مثلى لدالة الهدف . بيانياً : خط دالة الهدف يمر **بنقطة** وحيدة في فضاء الحلول عند أقصى حد لتحسين دالة الهدف.

- حل أمثل متعدد (Alternative Optimal Solutions)

للبرنامج الخطي أكثر من نقطة تعطي قيمة مثلى لدالة الهدف . بيانياً : خط دالة الهدف يمر **بحافة** (قطعة مستقيمة) من حواف فضاء الحلول عند أقصى حد لتحسين دالة الهدف.

- حل أمثل غير محدود (Unbounded Optimal Solutions)

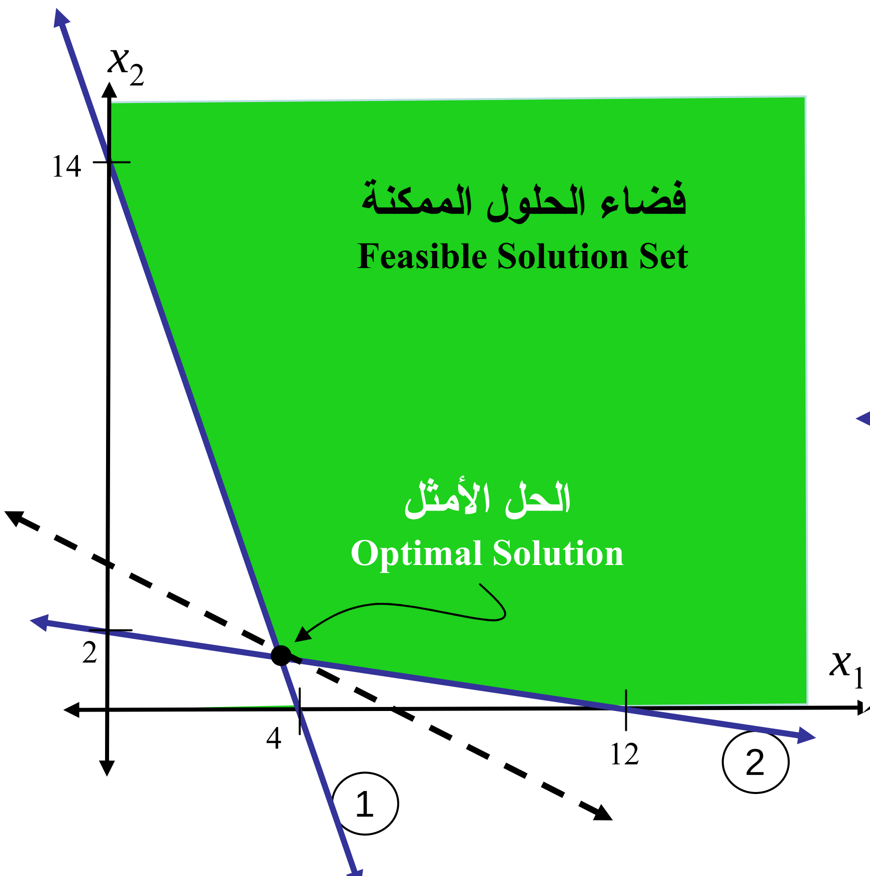
للبرنامج الخطي نقاط في فضاء الحلول تعطي قيمة مثلى لا نهائية لدالة الهدف . بيانيا : اتجاه تحسين دالة الهدف ليس له حد.

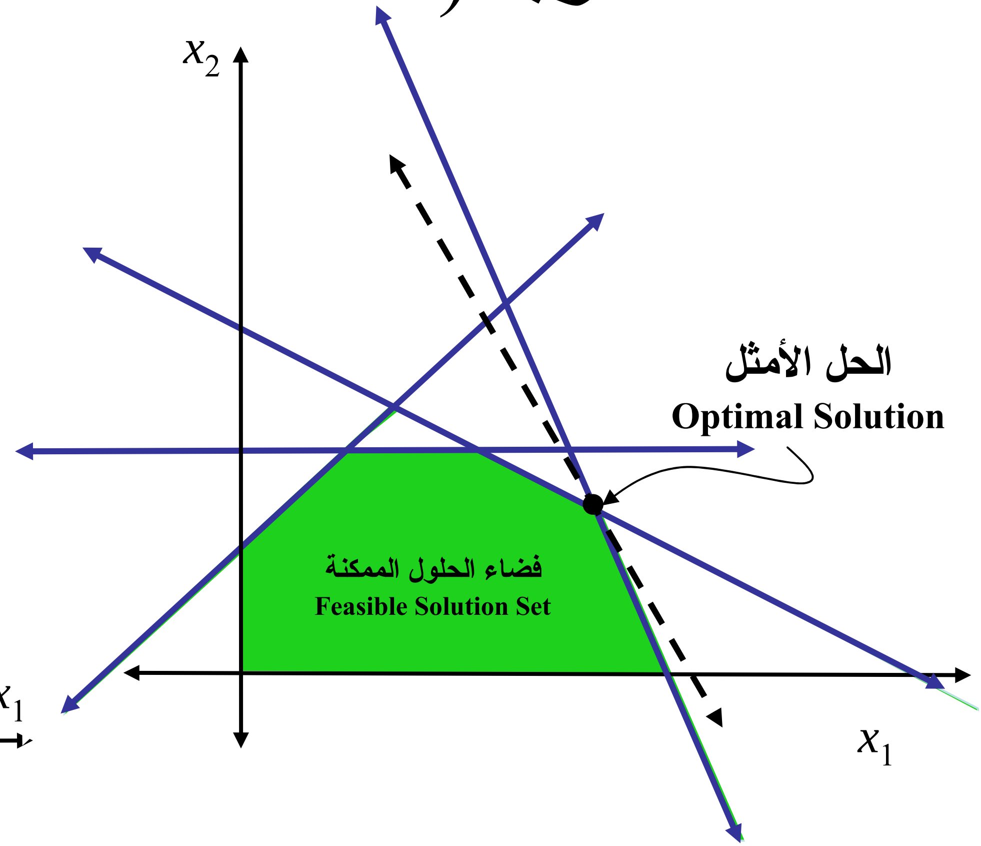
- حل أمثل غير ممكن (Infeasible Optimal Solutions)

البرنامج الخطي ليس له حل ممكن

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)

حل أمثل فريد (Unique Optimal Solutions)





حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)

حل أمثل متعدد (Alternative Optimal Solutions)

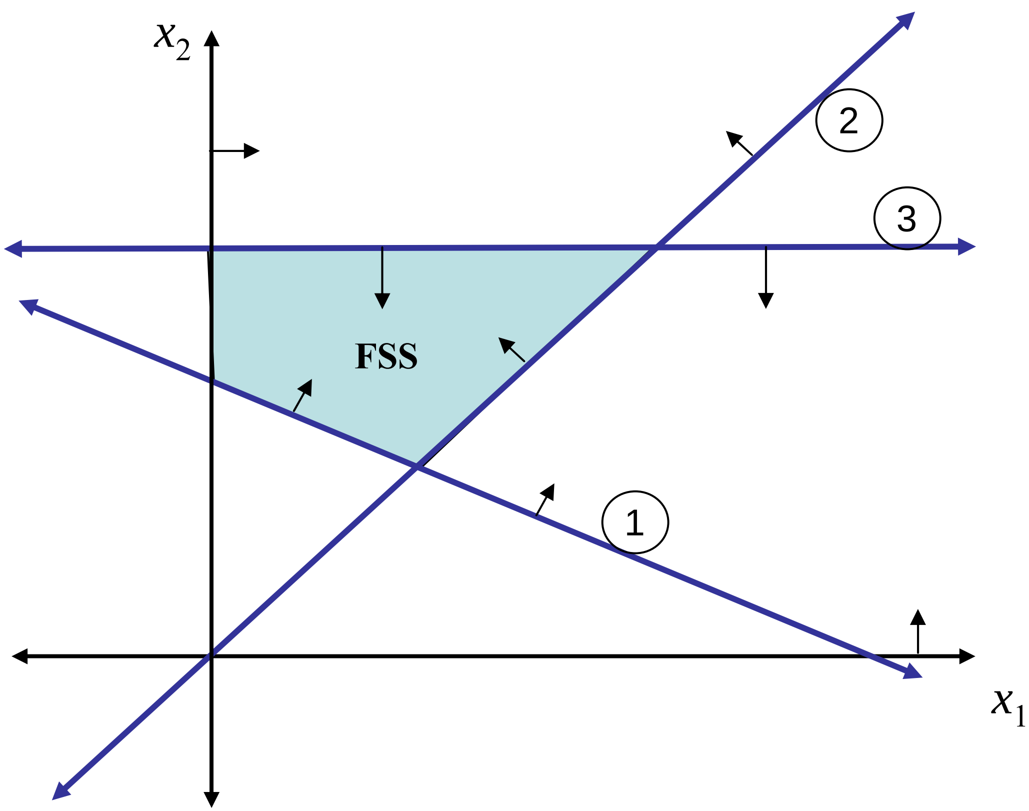
مثال(3): افترض البرنامج الخطي التالي

$$\text{Min} \quad Z = 5x_1 + 10x_2$$

Subject to

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$x_2 - x_1 \geq 0$$
$$x_2 \leq 8$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)



الحل:

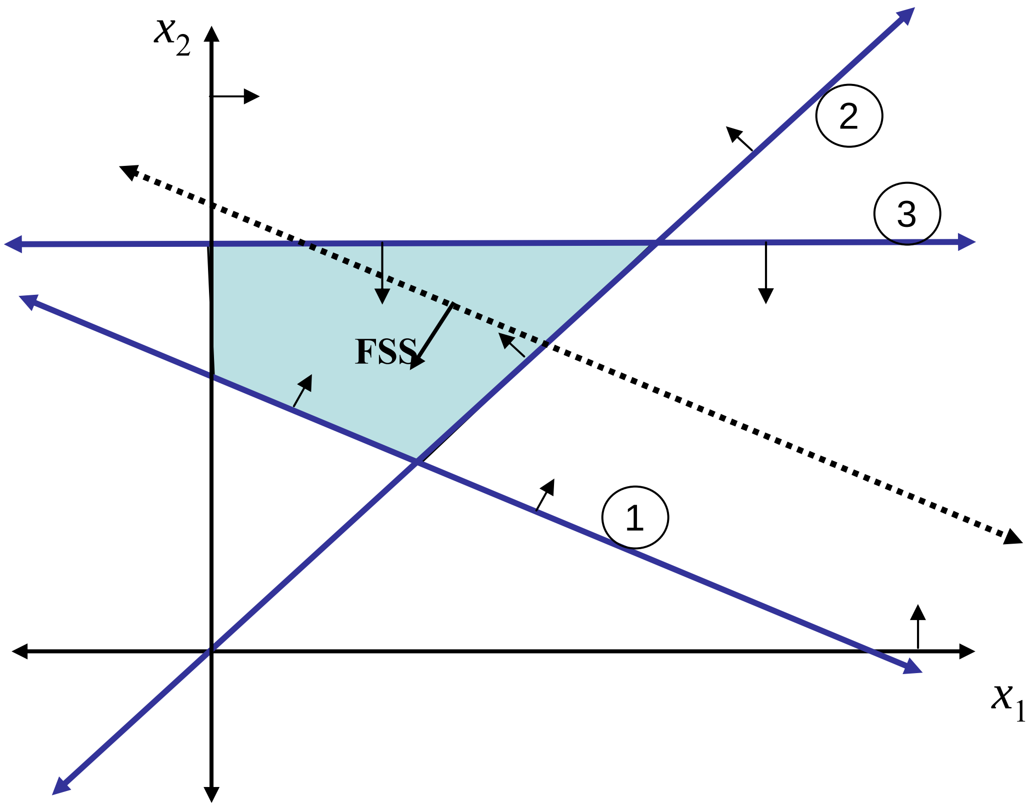
$$x_1 \geq 0 \ , \ \ x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$
$$(0,5) \ , \ (10,0)$$
$$(0,0) \Rightarrow (0)+2(0) = 0 < 10$$
$$x_2 - x_1 \geq 0$$
$$(1,1) \ , \ (2,2)$$
$$(1,2) \Rightarrow (2) - (1) = 1 > 0$$

$$x_2 \leq \ 8$$

حالات القرار في البرامج الخطية

(Decision Cases in Linear Programs)



الحل:

دالة الهدف

$$Z = 5\,x_1 + 10\,x_2$$

Let $Z = 60$

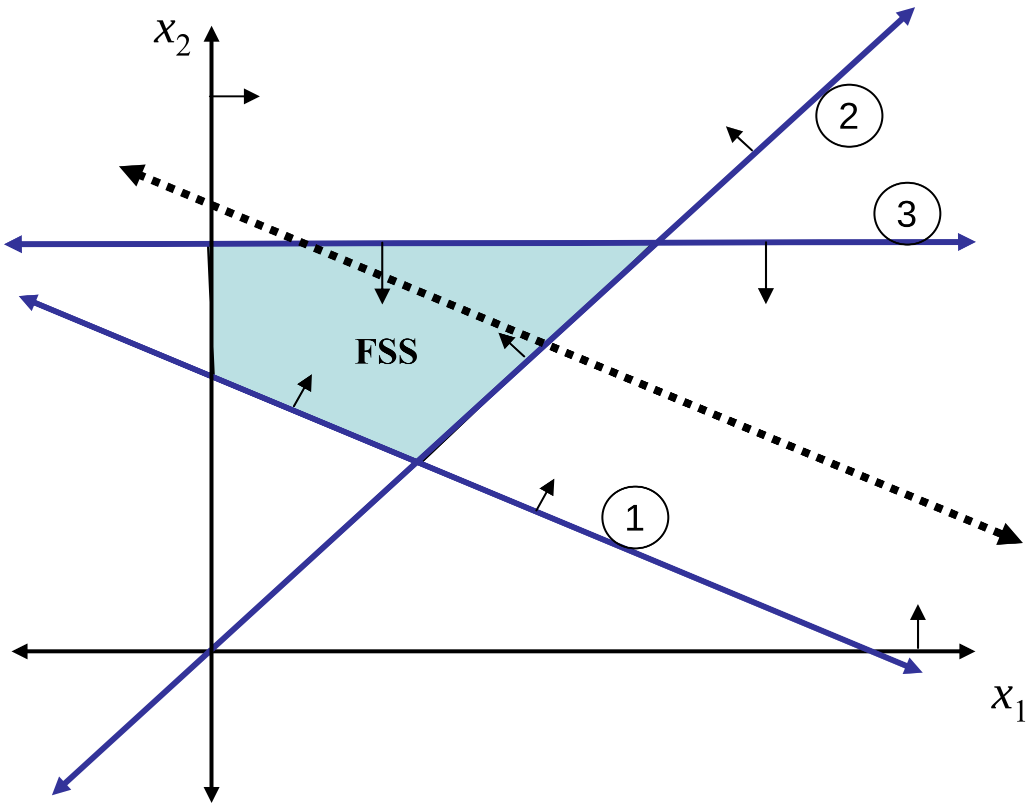
$$60 = 5\,x_1 + 10\,x_2$$

(0,6) , (12,0)

Take (1,1)

$$5(1)+10(1) = 15 < 60$$

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)



الحل:

دالة الهدف

$$Z = 5\,x_1 + 10\,x_2$$

Let $Z = 60$

$$60 = 5\,x_1 + 10\,x_2$$

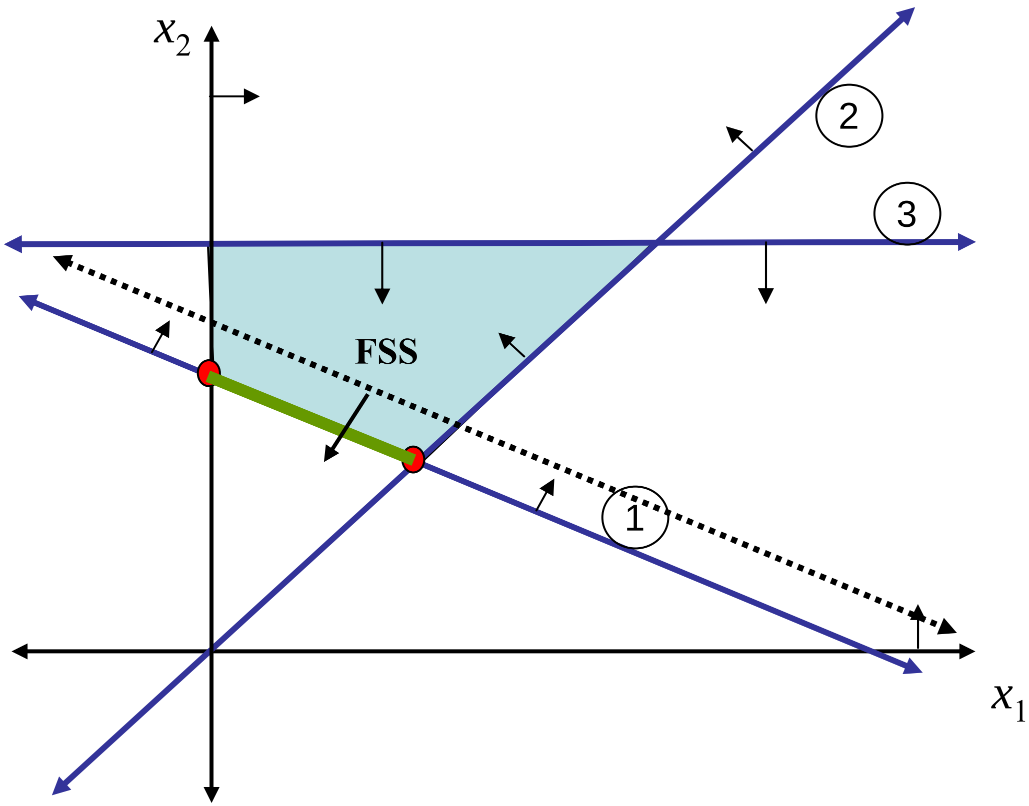
(0,6) , (12,0)

Take (1,1)

$$5(1)+10(1) = 15 < 60$$

حالات القرار في البرامج الخطية

(Decision Cases in Linear Programs)



الحل: النقط المثلى

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_2 - x_1 = 0$$
$$\Rightarrow x_1^* = 3.33 \ , \ x_2^* = 3.33$$

And

$$x_1 + 2x_2 = 10$$
$$x_1 = 0$$
$$\Rightarrow x_1^* = 0 \ , \ x_2^* = 5$$

جميع الحلول المثلى

$$(x_1^*, \ x_2^*) =$$
$$\lambda(3.33,3.33) + (1\text{-}\lambda)(0,5)$$
$$0 \le \lambda \le 1$$

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)

حل أمثل غير محدود (Unbounded Optimal Solutions)

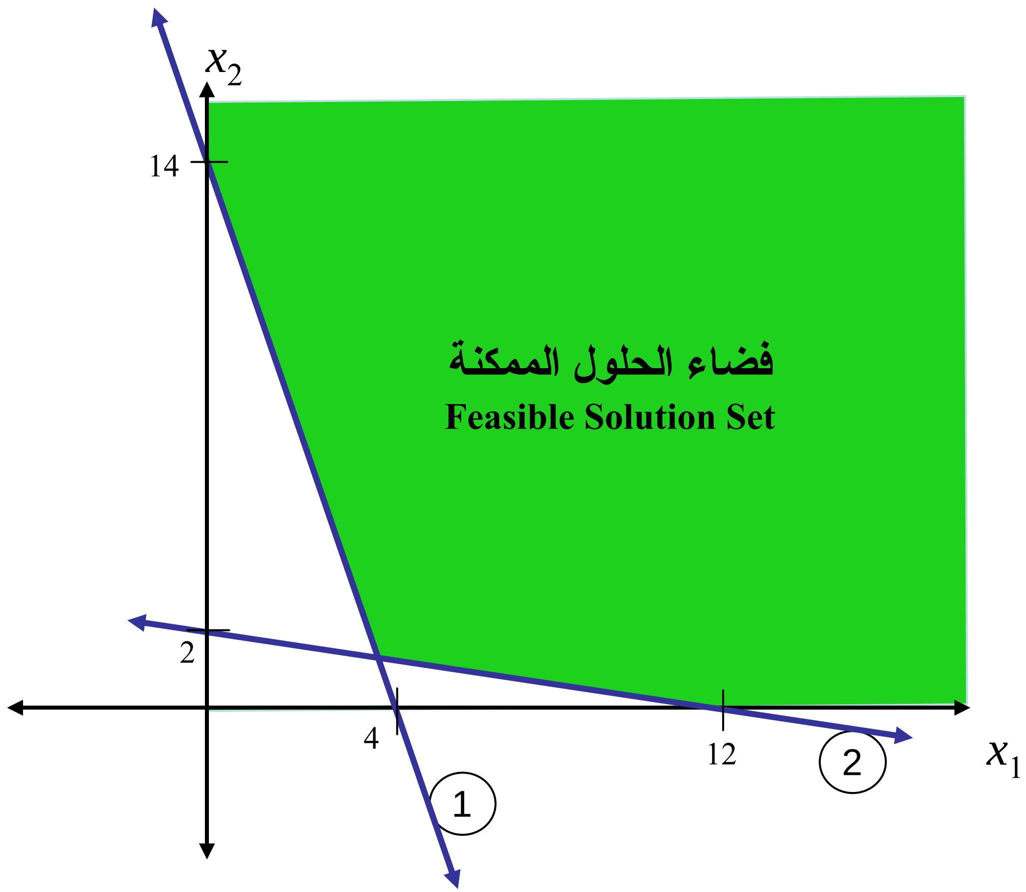
<u>مثال (4):</u>

$$\text{Max} \quad Z = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

Subject to

$$7\,x_1 + 2\,x_2 \geq 28$$
$$2\,x_1 + 12\,x_2 \geq 24$$
$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)



<u>مثال (2) :</u>

القيـــود

$$x_1 \geq 0 \ , \ \ x_2 \geq 0$$

$$7\, x_1 + 2\, x_2 \geq 28$$

$$(0,14)\ ,\ (4,0)$$

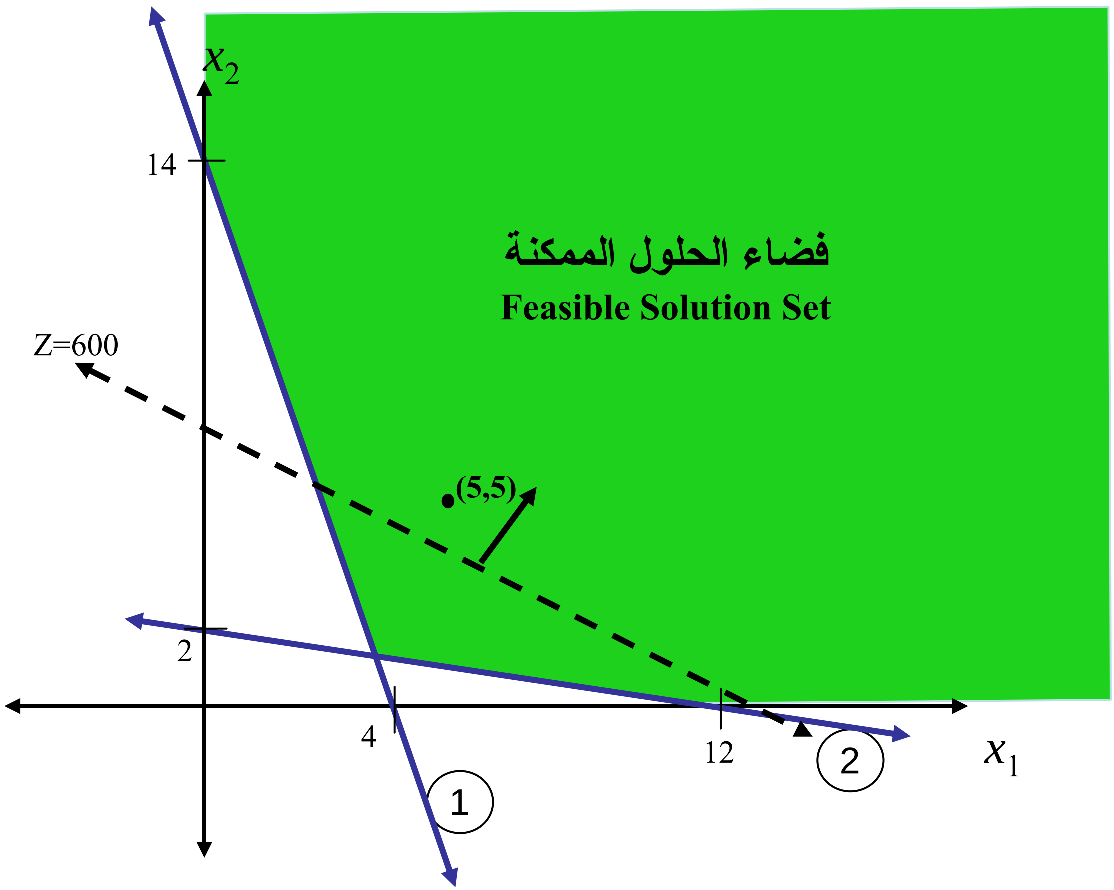
$$(0,0) \Rightarrow 7(0)+2(0) = 0 < 28$$

$$2\, x_1 + 12\, x_2 \geq 24$$

$$(0,2)\ ,\ (12,0)$$

$$(0,0) \Rightarrow 2(0)+12(0) = 0 < 24$$

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)



<u>مثال (4) :</u>

دالة الهدف

$$\text{Max} \quad Z = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

$$\text{Let } Z = 600$$

$$\Rightarrow 600 = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

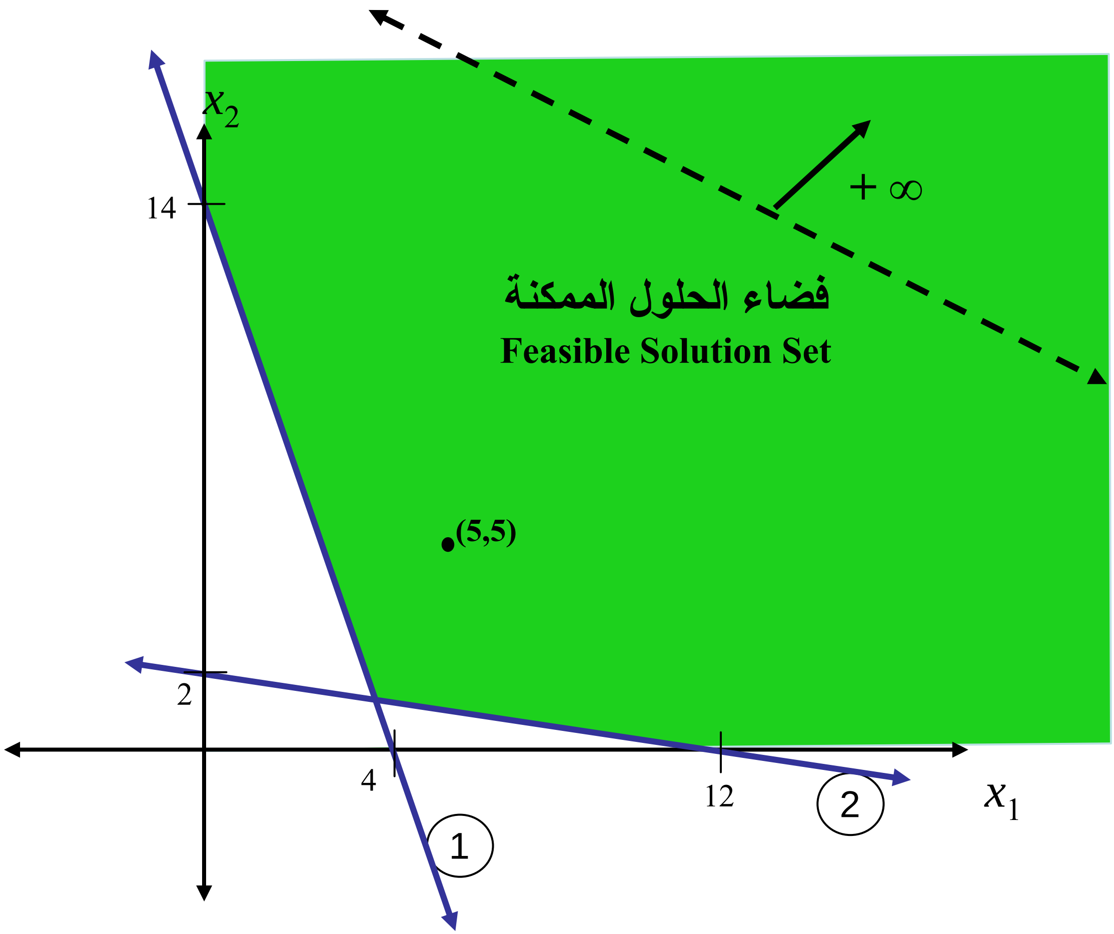
$$(0,6)\ ,\ (12,0)$$

$$\text{Let } (y_1, y_2) = (5,5)$$

$$\Rightarrow \quad 50\,(5) + 100(5) = 750$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 750 > 600 = \alpha$$

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)



مثال (4) :

دالة الهدف

$$\text{Max} \quad Z = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

$$\text{Let } Z = 600$$

$$\Rightarrow 600 = 50\,x_1 + 100\,x_2$$

$$(0,6)\ ,\ (12,0)$$

$$\text{Let } (y_1, y_2) = (5,5)$$

$$\Rightarrow \quad 50\,(5) + 100(5) = 750$$

$$\Rightarrow \quad \beta = 750 > 600 = \alpha$$

حالات القرار في البرامج الخطية
(Decision Cases in Linear Programs)

- حل أمثل غير ممكن (Infeasible Optimal Solutions)

مثال(5): افترض البرنامج الخطي التالي

$$\text{Min} \quad Z = 5\,x_1 + 10\,x_2$$

Subject to

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$x_2 - x_1 \geq 0$$

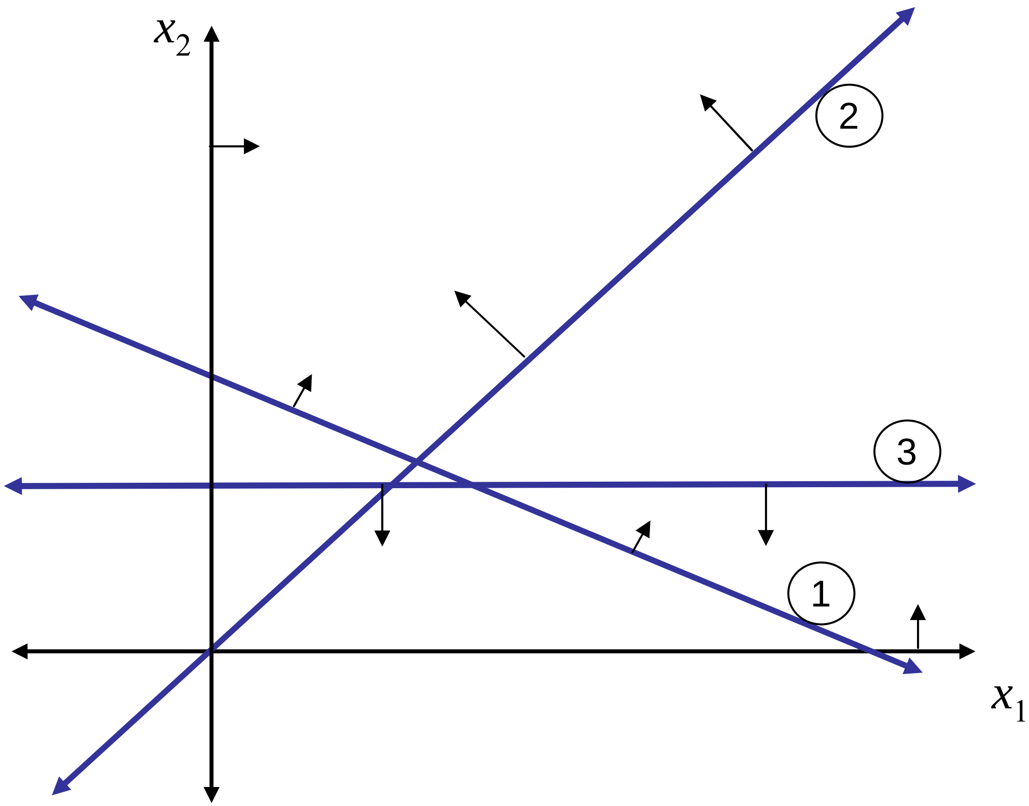
$$x_2 \leq 3$$

$$x_1 \geq 0$$

$$x_2 \geq 0$$

حالات القرار في البرامج الخطية

(Decision Cases in Linear Programs)



الحل:

$$x_1 \geq 0\ ,\ \ x_2 \geq 0$$

$$x_1 + 2x_2 \geq 10$$

$$(0,5)\ ,\ (10,0)$$

$$(0,0) \Rightarrow (0)+2(0) = 0 < 10$$

$$x_2 - x_1 \leq 0$$

$$(1,1)\ ,\ (2,2)$$

$$(1,2) \Rightarrow (2) - (1) = 1 > 0$$

$$x_2 \leq\ 3$$