تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **مقدمة :**
  - خدمة البنك :
    - توافد العملاء
    - ترتيب خدمة العملاء (صف الانتظار)
    - خدمة العملاء
  - تحسين أداء البنك :
    - صف الانتظار
    - وقوف أو مقاعد
    - تقليل وقت الانتظار : صحف – شاشة أسهم – ...
    - تسريع الخدمة : زيادة عدد المحاسبين – تحسين أداء المحاسبين
    - الاستفادة القصوى من العاملين في البنك

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **مقدمة :**

الغرض من دراسة نظم الصفوف

– تقييم النظام الحالي :

  - متوسط وقت الانتظار في الصف
  - متوسط الزمن الذي يقضيه العميل في البنك من لحظة دخوله إلى أن يخدم ويغادر البنك
  - متوسط عدد الزبائن في البنك
  - متوسط عدد المنتظرين في البنك
  - كفاءة مقدمي الخدمة :
    – متوسط عد الخدمات المقدمة في الساعة
    – متوسط زمن الفراغ في اليوم

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **مقدمة :**

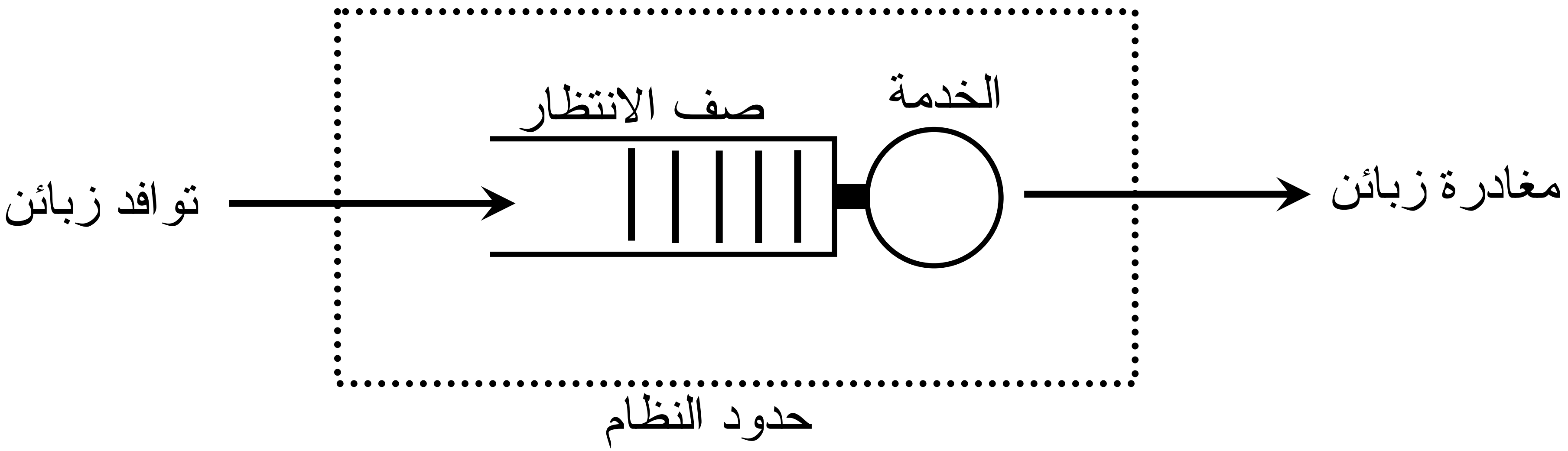
الغرض من دراسة نظم الصفوف

– مقارنة البدائل :

- عدد مقدمي الخدمة :
  - تعيين مقدمي خدمة متماثلين في الكفاءة وسرعة (انتظار أطول وصف أقصر)
  - تعيين مقدم خدمة بضعف الكفاءة و السرعة (انتظار أقصر وصف أطول)
- تصميم صالة الانتظار : صفوف متوازية – صف واحد – أرقام ...
- مدى جدوى دورة تدريبية لمقدمي الخدمة .
- عدد مقدمي الخدمة الذي يجعل متوسط زمن الانتظار أقل من حد ما
- عدد مقدمي الخدمة الذي يجعل متوسط طول الصف أقل من حد ما
- عدد مقدمي الخدمة الذي يجعل متوسط وقت الفراغ لا يتعدى أقل من حد ما

تطبيقات الصفوف
(Queueing Applications)

- **نظم الصفوف**



تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **نظم الصفوف**

عناصر النظام الصفي

1. عملية التوافد (Arrival Process) : وهو النمط الذي يتوافد على أساسه العملاء لطلب الخدمة وتوصف في صيغة متغير عشوائي للزمن الفاصل بين التوافدات

2. صف الانتظار (Queue) : وهي الطريقة أو الترتيب الذي على أساسه يتم خدمة المتوافدين إلى النظام

3. عملية المغادرة (Departure Process) : وهو النمط الذي يتم على أساسه حصول الزبائن مغادر الزبائن من النظام وتوصف في صيغة متغير عشوائي لزمن الخدمة .

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **التوزيع الأسي (Exponential Distribution)**

المتغير العشوائي T يتبع التوزيع الأسي (Exponential Distribution) بمتوسط $1/\lambda$ وحدة زمن

عملية التوافد (Arrival Process) هي عملية بواسونية (Poisson Process) بمعدل λ عميل في وحدة الزمن

1. يوجد مقدم خدمة واحد في النظام

2. يخدم العملاء على أساس من يأتي أولا يخدم أولا (First Come First Served)

تطبيقات الصفوف
(Queueing Applications)

- **التوزيع الأسي (Exponential Distribution)**

المتغير العشوائي T يتبع التوزيع الأسي (Exponential Distribution)
بمعدل μ وحدة في وحدة الزمن إذا كانت دالة الكثافة الاحتمالية له :

$$f_T(t) = \mu\, e^{-\mu t} \qquad\qquad t > 0$$

والقيمة المتوقعة للمتغير T هي :

$$E[T] = 1/\mu$$

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **التوزيع الأسي (Exponential Distribution)**

أمثلة:

زمن المستغرق لخدمة عميل في بنك يتبع التوزيع الأسي بمعدل 5 عملاء في الساعة.

$$f_T(t) = 5\,e^{-5t} \qquad\qquad t > 0$$

و القيمة المتوقعة لخدمة العميل : $\quad E[T] = 1/5 = 0.2$ hr

احتمال أن لا يمضي العميل أكثر من 20 دقيقة في الخدمة = $\Pr\{T \le 20/60\}$

$$\Pr\{T \le 20/60\} = \int_0^{20/60} 5e^{-5t}\,dt \qquad = 1 - e^{-5(2/6)} = 0.811$$

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **التوزيع الأسي (Exponential Distribution)**

أمثلة:

الفترة الزمنية التي يعمل خلالها جهاز حاسب آلي بدون عطل تتبع التوزيع الأسي بمتوسط عمر 4 أيام .

معدل الأعطال في اليوم : $\mu = 1/E[T] = 1/4 = 0.25$ def/day

$$f_T(t) = \tfrac{1}{4}\, e^{-\frac{1}{4}t} \qquad t > 0$$

احتمال أن يمضي الجهاز أسبوع بدون أعطال = $\Pr\{T \geq 7\}$

$$\Pr\{T \geq 7\} = \int_7^\infty \tfrac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t}\,dt = e^{-(7/4)} = 0.174$$

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **العملية البواسونية (Poisson Process)**

إذا كان الزمن الفاصل بين عدد من الأحداث متغير عشوائي T يتبع التوزيع الأسي (Exponential Distribution) بمعدل ثابت قدره μ حادثة في وحدة الزمن ، فإن إحتمال وقوع عدد من الحوادث قدره n خلال الفترة المغلقة $[0,t]$ هو :

$$P\{N=n\} = \frac{(\mu t)^n}{n!} e^{-\mu t} \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

والقيمة المتوقعة لعدد الحوادث خلال الفترة $[0,t]$هي :

$$\mathrm{E}[\mathrm{N}] = \mu t$$

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- العملية البواسونية **(Poisson Process)**

أمثلة:

زمن المستغرق لخدمة عميل في بنك يتبع التوزيع الأسي بمعدل 5 عملاء في الساعة.

$$f_T(t) = 5\, e^{-5t} \qquad t > 0$$

والقيمة المتوقعة لخدمة العميل : E[T] = 1/5 = 0.2 hr

احتمال أن يكون عدد العملاء الذين خدموا خلال الزمن [0,t] يساوي n هو:

$$P\{N = n\} = \frac{(5t)^n}{n!} e^{-5t} \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **العملية البواسونية (Poisson Process)**

أمثلة:

زمن المستغرق لخدمة عميل في بنك يتبع التوزيع الأسي بمعدل 5 عملاء في الساعة.

احتمال أن يكون عدد العملاء الذين خدموا خلال الزمن [0,t] يساوي n هو:

$$P\{N=n\}=\frac{(5t)^n}{n!}e^{-5t} \qquad n=0,1,2,3,\ldots$$

و القيمة المتوقعة لعدد العملاء خلال الفترة 3 ساعات

E[N] = 5t = 5(3) =15 customers

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **العملية البواسونية (Poisson Process)**

أمثلة:

زمن المستغرق لخدمة عميل في بنك يتبع التوزيع الأسي بمعدل 5 عملاء في الساعة.

احتمال أن يكون عدد العملاء الذين خدموا خلال ساعة يساوي 6 هو:

$$P\{N=6\} = \frac{(5)^6}{6!} e^{-5} \quad = 0.146$$

الزمن المتقوقع لخدمة العميل الخامس هو

E[T] = 1/5 = 0.2 hr = 12 min

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **التوزيع الأسي (Exponential Distribution)**

أمثلة:

الفترة الزمنية التي يعمل خلالها جهاز حاسب آلي بدون عطل تتبع التوزيع الأسي بمتوسط عمر 4 أيام .

معدل الأعطال في اليوم : $\mu = 1/E[T] = 1/4 = 0.25$ def/day

$$f_T(t) = \tfrac{1}{4}\, e^{-\frac{1}{4}t} \qquad t > 0$$

احتمال أن يمضي الجهاز أسبوع بدون أعطال = $\Pr\{T \geq 7\}$

$$\Pr\{T \geq 7\} = \int_7^{\infty} \tfrac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}t}\, dt = e^{-(7/4)} = 0.174$$

تطبيقات الصفوف
(Queueing Applications)

- **النظام الصفي البسيط**

فرضيات النظام

1. عملية التوافد (Arrival Process) هي عملية بواسونية (Poisson Process) بمعدل λ عميل في وحدة الزمن

2. الزمن الفاصل بين توافد العملاء يتبع التوزيع الأسي (Exponential Distribution) بمتوسط $1/\lambda$ وحدة زمن

3. يوجد مقدم خدمة واحد في النظام

4. يخدم العملاء على أساس من يأتي أولا يخدم أولا (First Come First Served)

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **النظام الصفي البسيط**

فرضيات النظام

5. وقت للخدمة لكل عميل متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي (Exponential Distribution) بمتوسط $1/\mu$ وحدة زمن وبالتالي فإن سرعة الخدمة هي μ عميل في وحدة زمن

6. يستوعب النظام عدد لا نهائي من المتوافدين أي أن حجم النظام ∞

7. مصدر توافد العملاء مصدر لا نهائي ∞

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **النظام الصفي البسيط**

نظرية

إذا تحققت الفرضيات السابقة وكانت $\mu > \lambda$ فإن احتمال أن يكون في النظام n زبون هو :

$$P_n = \rho^n \, (1-\rho) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

حيث $\frac{\lambda}{\mu} = \rho$

إذا استمر عمل النظام لوقت طويل جدا (∞)

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **النظام الصفي البسيط**

معايير تقييم الأداء (Measures of Performance)

جميع المعايير التالية تشترط أن يكون النظام في حالة استقرار أي أن $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

1. **متوسط عدد الزبائن في النظام:**

E[Number of customers in system] = $L = \Sigma n P_n$

$$\mathbf{L} = \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

2. **متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون حتى يغادر النظام بعد حصوله على الخدمة:**

E[Time spent in system] = W

$$\mathbf{W} = \frac{\mathbf{L}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

- **النظام الصفي البسيط**

معايير تقييم الأداء (Measures of Performance)

جميع المعايير التالية تشترط أن يكون النظام في حالة استقرار أي أن $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

3. متوسط عدد الزبائن المنتظرين في الصف :

E[Number of customers in queue] = Lq

$$\mathbf{Lq} = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

4. متوسط الوقت الذي يقضيه الزبون في الانتظار في الصف قبل خدمته :

E[Time spent in queue] = Wq

$$\mathbf{Wq} = \frac{\mathbf{Lq}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$$

تطبيقات الصفوف
(Queueing Applications)

مثال

يتوافد عملاء بمعدل 10 عملاء في الساعة إلى أحد البنوك. يعمل في البنك صراف واحد لخدمة العملاء بمتوسط خدمة يبلغ 4 دقائق. افترض أن توافد العملاء يتبع عملية بواسونية وأن زمن الخدمة يتبع التوزيع الأسي وأن البنك يستوعب أي عدد من العملاء الوافدين. أوجد مايلي:

1. كم نسبة الوقت الذي يقضيه الصراف عاطلاً عن العمل؟
2. ما هو متوسط عدد العملاء المنتظرين في الصف للحصول على الخدمة؟
3. إذا دخلت أنت هذا الفرع في تمام الساعة 9:15 فمتى تتوقع الخروج منه بعد الحصول على الخدمة؟
4. ما هو متوسط عدد العملاء في الفرع؟
5. ما هو متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الانتظار؟

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

مثال

معدل توافد العملاء = 10 عميل / الساعة $= \lambda$

متوسط زمن الخدمة = 4 دقائق $= \frac{1}{\mu}$

سرعة خدمة العملاء = $\frac{1}{\text{متوسط زمن الخدمة}} = \frac{1}{4}$ عميل/دقيقة $= \frac{60}{4}$ عميل/الساعة

توافد العملاء يتبع عملية بواسونية

أن زمن الخدمة يتبع التوزيع الأسي

أن البنك يستوعب أي عدد من العملاء الوافدين.

$\Leftarrow$ **النظام يتبع النظام الصفي البسيط**

الاستقرار : $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{10}{15} = 0.667 < 1$ $\Leftarrow$ **النظام مستقر**

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

مثال

1. كم نسبة الوقت الذي يقضيه الصراف عاطلاً عن العمل؟

الصراف يبقى عاطلا عن العمل إذا كان النظام خاليا

$\Leftarrow$ نسبة الوقت الذي يقضي الصراف عاطلا = احتمال أن يكون النظام خاليا

$$0.333 = 1-0.667 = \rho^{0}\ (1-\rho) = P_0 =$$

2. ما هو متوسط عدد العملاء المنتظرين في الصف للحصول على الخدمة؟

$$Lq = \frac{\rho^2}{(1-\rho)} = \frac{(0.667)^2}{(0.333)} = 1.333 \text{ customers}$$

تطبيقات الصفوف

(Queueing Applications)

مثال

3. إذا دخلت أنت هذا الفرع في تمام الساعة 9:15 فمتى تتوقع الخروج منه بعد الحصول على الخدمة؟

الوقت المتوقع لمغادرتك = لحظة الدخول + متوسط الوقت الذي ستقضيه في الفرع

$$= \quad 9{:}15 \quad + \quad W$$

$$W = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} = \frac{(0.667)}{10(0.333)} = 0.2 \text{ hours} = 12 \text{ minutes}$$

الوقت المتوقع لمغادرتك $= \quad 9{:}15 \quad + \quad 00{:}12 = 9{:}27$

تطبيقات الصفوف
(Queueing Applications)

مثال

4. ما هو متوسط عدد العملاء في الفرع؟

$$L = \frac{\rho}{(1-\rho)} = \frac{0.667}{(0.333)} = 2 \text{ customers}$$

5. ما هو متوسط الوقت الذي يقضيه العميل في الانتظار؟

$$Wq = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)} = \frac{(0.667)^2}{10(0.333)} = 0.1334 \text{ hours} = 8 \text{ minutes}$$