حل الواجب – ١٠١ريض، شعبة ١٧٢٨٧

السؤال الأول:

أوجد قيمة كل من

❶ $:\sin^{-1}(\sin 313)$

لأن $\pi \approx 3.141\ldots$ **، فالزاوية** 313 **تحقق** $99\pi < 313 < 100\pi$ **كما أنها لـ** 100π **أقرب أي** $100\pi - 313 < \frac{\pi}{2}$**. بالضرب في** -1 **ينتج**

$$0 > 313 - 100\pi > -\frac{\pi}{2}$$

أي أن $$\sin^{-1}(\sin 313) = 313 - 100\pi$$

❷ $:\cos^{-1}(\cos 999)$

بملاحظة أن $317\pi < 999 < 318\pi$ **نطرح** 318π **لنجد أن**

$$-\pi < 999 - 318\pi < 0$$

أي أن $$\cos^{-1}(\cos 999) = -(999 - 318\pi) = 318\pi - 999$$

❸ $:\sin\left(5\pi + \cos^{-1}\frac{1}{5}\right)$

$$\begin{aligned}\sin\left(5\pi + \cos^{-1}\tfrac{1}{5}\right) &= \sin 5\pi \cos\left(\cos^{-1}\tfrac{1}{5}\right) + \sin\left(\cos^{-1}\tfrac{1}{5}\right)\cos 5\pi \\ &= (0)\left(\tfrac{1}{5}\right) + \sin\left(\cos^{-1}\tfrac{1}{5}\right)(-1)\end{aligned}$$

الزاوية $\cos^{-1}\frac{1}{5}$ **في الربع الأول، لذا**

$$\begin{aligned}\sin\left(\cos^{-1}\tfrac{1}{5}\right) &= \sqrt{1 - \left(\cos^2\left(\cos^{-1}\tfrac{1}{5}\right)\right)} \\ &= \sqrt{1 - \left(\tfrac{1}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{24}}{5}\end{aligned}$$

يصبح الآن $$\sin\left(5\pi + \cos^{-1}\tfrac{1}{5}\right) = -\frac{\sqrt{24}}{5}$$

السؤال الثاني:

❶ المعادلة $\cos^{1426} x - \sin^{1426} x = 1$ تكافئ $\cos^{1426} x = \sin^{1426} x + 1$
ولأن القوة زوجية، فالطرف الأيمن أكبر أو يساوي 1 ولكن الطرف الأيسر أقل أو يساوي 1 وبالتالي لتحقق المعادلة لابد أن كلا الطرفين يساوي 1:

$$\sin^{1426} x + 1 = 1 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

$$\cos^{1426} x = 1 \Leftrightarrow \cos x = \pm 1 \Leftrightarrow x = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$$

مجموعة الحل هي: $x = n\pi$ حيث n أي عدد صحيح.

❷ سوف نستخدم الحقائق: $|\sin x| \leq 1$، $|\cos x| \leq 1$، $\sin$ فردية، $\cos$ زوجية: ليكن x حلا للمعادلة، لدينا

$$\begin{aligned}
1 &= \cos^{1427} x - \sin^{1427} x \\
&= \cos^{1427}(-x) + \sin^{1427}(-x) \\
&\leq |\cos^{1427}(-x)| + |\sin^{1427}(-x)| \\
&= |\cos^{1425}(-x)|\cos^2(-x) + |\sin^{1425}(-x)|\sin^2(-x) \\
&\leq \cos^2(-x) + \sin^2(-x) \\
&= 1
\end{aligned}$$

وبالتالي لابد من تحقق المساواة في كلا المتراجحتين. المساواة في الأولى تعني أن $\cos(-x) \geq 0$ و $\sin(-x) \geq 0$. أما المساواة في الثانية فلا تقع إلا في حالتين: إما أن $|\sin(-x)| = 1$ أو $|\cos(-x)| = 1$ (نعلم أن ماعدا يعني تحقق كلا من $|\cos(-x)| < 1$ و $|\sin(-x)| < 1$ ولن تتحقق المساواة في المتراجحة الثانية:

$$\begin{aligned}
|\cos(-x)| < 1 \Rightarrow |\cos^{1425}(-x)| < 1 \quad &\Rightarrow \quad |\cos^{1425}(-x)|\cos^2(-x) < \cos^2(-x) \\
|\sin(-x)| < 1 \Rightarrow \left|\sin^{1425}(-x)\right| < 1 \quad &\Rightarrow \quad |\sin^{1425}(-x)|\sin^2(-x) < \sin^2(-x)
\end{aligned}$$

وبالجمع يتضح انعدام المساواة). بالتالي فإن $\sin(-x) = 1$ أو $\cos(-x) = 1$. وعليه نجد أن $x = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ أو $x = 2n\pi$ حيث n أي عدد صحيح.

❸ البرهان: ليكن $x \in [-1,1]$. لدينا

$$\cos^{-1} x + \cos^{-1} - x = \pi \Leftrightarrow \cos^{-1} x = \pi - \cos^{-1} - x$$
$$\Leftrightarrow x = \cos(\pi - \cos^{-1}(-x)), \quad \pi - \cos^{-1}(-x) \in [0, \pi]$$

من تعريف $\cos^{-1}$، نحتاج التحقق أن $\pi - \cos^{-1} - x$ هذا $\cos(\pi - \cos^{-1}(-x))$:

$$\begin{aligned}
\cos(\pi - \cos^{-1}(-x)) &= \cos\pi\cos(\cos^{-1}(-x)) + \sin\pi\sin(\cos^{-1}(-x)) \\
&= -(-x) + 0 = x
\end{aligned}$$

وحيث $0 \leq \cos^{-1}(-x) \leq \pi$، بالضرب في -1 ثم جمع π ينتج أن $0 \leq \pi - \cos^{-1}(-x) \leq \pi$.