الفصــ ـــل الثامن

ا تغ ات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Random Variables and Probability Distributions

١/٨مقـ ـدمة

يهتم هذا الفصل بدراسة ا تغ ات العشوائية، من حيث تعريفها، وأنواعها، والتوزيعات الاحتمالية ا، وخصائص هذه التوزيعات، والتوزيعات الاحتمالية للمتغ ات العشوائية ا اصة.

٢/٨ ا تغ العشوائي Random Variable:

ا تغ العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية تلفة تع عن نتائج فراغ العينة، ومن ال هـذا ا تغ ، يشمل كل القيم ا مكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم ال يأخذها ا تغ احتمال مع ، وينقسـم ا تغ العشوائي إ قسم ا:

١- ا تغ ات العشوائية ا نفصلة Discrete Random Variables

٢- ا تغ ات العشوائية ا تصلة(ا ستمرة) Continuous Random Variables

٣/٨ ا تغ ات العشوائية ا نفصلة

ا تغ العشوائي ا نفصل هو الذي يأخذ قيم بينية، ومتباعدة، ويرمز للمتغ العشوائي بشـكل عـام رف من ا روف الأ دية الكب ة *X, Y, Z,….* ويرمز للقيم ال يأخذها ا تغ با روف الأ دية الصغ ة، *x, y, z, …*، ومن أمثلة هذه ا تغ ات:

١- عدد الأولاد الذكور الأسرة ا كونة من أربع أولاد *X*، *X:{x=0,1,2,3,4}* .

٢- عدد العملاء الذين يتم إ اء خدمتهم البنكية كل *10* دقائق *Y*، *Y:{y=0,1,2,3,….}*.

٣- عدد مرات استخدام نوع مع من الأ دة خلال الدورة الزراعية.

٤- عدد الوحدات التالفة من إنتاج مزرعة معينة تنتج *200* وحدة كل موسم.

٥- عدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر.

وهكذا..... الأمثلة كث ة

١/٣/٨ التوزيع الاحتما للمتغ العشوائي ا نفصل

التوزيع الاحتما ، هو الذي يب احتمالات حدوث القيم ال كن يأخذها ا ـتغ ، والـ تـرتبط باحتمالات النتائج ا مكنة فراغ العينة، و ع آخر هو التكراري النس للقيم ال كـن أن يأخـذها ا تغ .

فإذا كان ا ـتغ العشـوائي ا نفصـل X يأخـذ القـيم، $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$ ، وكـان $P(X=x_i)=f(x_i)$ هو احتمال أن ا تغ العشوائي يأخذ القيمة x_i ، فإنه، كن تكوين جـدول التوزيع الاحتما للمتغ العشوائي X ، وهو جدول مكون من عمودين، الأول به القيم ا مكنة للمتغ $X:\{x=x_1,x_2,...,x_n\}$ ، والثا به القيم الاحتمالية ذا ا تغ $P(X=x_i)=f(x_i)$ ، أي أن:

جدول (٨-١)

جدول التوزيع الاحتما للمتغ العشوائي ا نفصل

x_i	$f(x_i)$
x_1	$f(x_1)$
x_2	$f(x_2)$
$\vdots$	$\vdots$
x_n	$f(x_n)$
Σ	1

وتسمى الدالة $f(x_i)$ بدالة الاحتمال، ومن خصائص هذه الدالة ما يلي:

$$1-\quad 0<f(x_i)<1 \qquad 2-\quad \sum f(x_i)=1 \qquad (١-٨)$$

مثـ ـال (٨-١)

إذا كان من ا علوم أن نسبة مبيعات أحد ا راكز التجارية من التفاح الأمريكي 0.60 ، بينما يكون نسبة مبيعاته من الأنواع الأخرى للتفاح 0.40، اشترى أحد العملاء عبوت ، وا طلوب:

١- كون فراغ العينة.

٢- إذا عرف ا تغ العشوائي X بأنه عدد العبوات ا شتراة من التفاح الأمريكي، فأوجد الآ :

- التوزيع الاحتما للمتغ العشوائي X .
- ارسم دالة الاحتمال ذا ا تغ .
- كون التوزيع الاحتما التجميعي.
- ما هو احتمال $P(X=1)$ ، $P(X\leq 1)$ ، $P(X=1.5)$ ، $P(X\leq 1.5)$
- حدد قيمة الوسيط، وا نوال لعدد العبوات ا شتراة.

ا ـ ـل:

تكوين فراغ العينة:

التجربة هنا هو شراء وحدت من عبوات التفاح، ومن فراغ العينة يتكون من أربع نتائج، هي:

- **التوزيع الاحتما لعدد العبوات ا شتراة من التفاح الأمريكي** X

من ا علوم أن العميل اشترى عبوت ، وأن ا تغ العشوائي هو عدد العبوات ا شـتراة مـن التفـاح الأمريكي، لذا تكون القيم ا مكنة للمتغ العشوائي هي:

$x=0$ **إذا كانت العبوت من النوع الآخر، أى إذا كانت نتيجة التجربة (آخر، آخر)**

$x=1$ **إذا كان أحد العبوت من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (آخر, أمريكـي) أو (أمريكي,آخر)**

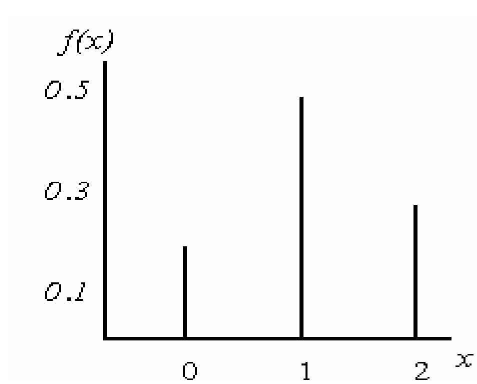
$x=2$ **إذا كان العبوت من النوع الأمريكي، أي إذا كانت نتيجة التجربة (أمريكي , أمريكي)**

ومن يأخذ ا تغ القيم: $X:\{x=0,1,2\}$ **، ويرتبط احتمالات هذه القيم باحتمـالات نتـائج التجربة ا ناظرة ا كما هو مب أعلاه، ومن يكون التوزيع الاحتما للمتغ العشوائي** X **هو:**

جدول التوزيع الاحتما لعدد العبوات ا شتراة من التفاح الأمريكي

x_i	$f(x_i)$
0	0.16
1	0.48
2	0.36
Σ	1

- **رسم دالة الاحتمال** $f(x)$:



- **تكوين التوزيع الاحتما   التجميعي:**

التوزيع التجميعي، هو جدول يشمل الاحتمالات النا ة من حساب الاحتمال $P(X \le x)$ **، ويرمز له بالرمز** $F(x)$ **، أي أن دالة التوزيع الاحتما   التجميعي تأخذ الصورة التالية:**

$$F(x) = P(X \le x) \qquad (٨-٢)$$

ومن   كن تكوين جدول التوزيع الاحتما   التجميعي لعدد الوحدات ا شتراة من التفاح الأمريكـي كما يلي:

جدول التوزيع الاحتما ، والتوزيع التجميعي لعدد العبوات ا شتراه من التفاح الأمريكي

x_i	$f(x_i)$	$F(x_i)$
0	0.16	$F(0) = P(X \le 0) = 0.16$
1	0.48	$F(1) = P(X \le 1) = 0.16 + 0.48 = 0.64$
2	0.36	$F(2) = P(X \le 2) = 0.64 + 0.36 = 1.00$
Σ	1	

- **حساب الاحتمالات:-** $P(X = 1)$ ، $P(X \le 1)$ ، $P(X = 1.5)$ ، $P(X \le 1.5)$

$$P(X = 1) = f(1) = 0.48$$
$$P(X \le 1) = F(1) = 0.64$$
$$P(X = 1.5) = f(1.5) = 0$$
$$P(X \le 1.5) = F(1.5) = F(1) = 0.64$$

- ** ديد قيمة الوسيط، وا نوال.**

الوسيط:- رتبة الوسيط هو 0.50 **، إذا الوسيط** M **هو القيمة ال   فق الاحتمال:**
$P(X \le M) = F(M) = 0.50$ **، وهذا الاحتمال يقع ب   القيمة** *(1,0)* **كما هو مـ ب   بالرسـم التا :**

	x_i	$F(x_i)$	
M	0	0.16	
			$F(M) = 0.50$
	1	0.64	
	2	1.00	

إذا الوسيط قيمته هي:

$$M = 0 + \frac{0.5 - 0.16}{0.64 - 0.16} \times (1 - 0) = 0.71$$

حساب ا نوال:

ا نوال $Mode$ = القيمة x_i ا ناظرة لأك فيمة احتمالية.

إذا ا نوال هو: $Mode = 1$ حيث أنه يناظر أك فيمة احتمالية هي: $f(1) = 0.48$.

٢/٣/٨ الوسط ا سا والتباين للمتغ العشوائي ا نفصل

أ- يرمز للوسط ا سا للمتغ العشوائي بالرمز μ (ميو)، و سب بتطبيق ا عادلة التالية:

$$\mu = \sum x_i \; f(x_i) \qquad (٨-٣)$$

ب- وأما التباين ويرمز له بالرمز σ^2 (سيجما)، فيحسب بتطبيق ا عادلة التالية:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \sum (x_i - \mu)^2 \; f(x_i) \\ &= \sum x_i^2 \; f(x_i) - \mu^2 \end{aligned} \qquad (٨-٤)$$

مثــال (٨-٢)

ا ثال السابق احسب ما يلي:

أ- الوسط ا سا لعدد العبوات ا شتراة من النوع الأمريكي:

ب- احسب الا راف ا عياري لعدد العبوات ا شتراة من النوع الأمريكي.

ت- أوجد معامل الاختلاف النس :

ا ـل

أ- الوسط ا سا لعدد العبوات من النوع الأمريكي:

ساب الوسط ا سا والا راف ا عياري يتم استخدام ا عادلة (٨-٣)، (٨-٤) وهذا يتطلب تكوين جدول يشمل ا اميع التالية: $\sum x_i \; f(x_i) \; , \; \sum x_i^2 \; f(x_i)$ ، وذلك كما يلي:

x_i	$f(x_i)$	$x_i\, f(x_i)$	$x_i^2\, f(x_i)$
0	0.16	0	0
1	0.48	0.48	0.48
2	0.36	0.72	1.44
Σ	1	1.20	1.92

إذا الوسط ا سا هو: $\mu = \sum x_i \; f(x_i) = 1.20$

ب- و ساب الا راف ا عياري ب أولا حساب التباين وهو:

$$\sigma^2 = \sum x_i^2 \; f(x_i) - \mu^2 = 1.92 - (1.20)^2 = 0.48$$

إذا الا راف ا عياري فيمنه هي:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{0.48} = 0.693$$

ت- معامل الاختلاف النس هو:

$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{0.693}{1.2} \times 100 = 57.7$$

واجب م :-

فيما يلي التوزيع الاحتما لعدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة من أحد مساحيق النظافة خلال الشهر X **،** $X : \{x = 0,1,2,3,4,5\}$

x (عدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة)	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0.15	0.30	0.25	0.23	0.05	0.02

وا طلوب:

١- حدد نوع هذا ا تغ (عدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة)

٢- احسب الوسط والوسيط وا نوال والا راف ا عياري لعدد الوحدات ا ستهلكة.

٣- كون جدول التوزيع التجميعي $F(x)$ **أوجد الآ :**

أ- نسبة الأسر ال يقل استهلاكها عن وحدة

ب- نسبة الأسر ال يزيد استهلاكها عن 3 **وحدات**

ت- إذا كان لدينا 500 **أسرة، فما هو عدد الأسر ا توقع أن يكون استهلاكها على الأقل** 3 **وحدات؟**

٤- احسب معامل الالتواء، وكذلك معامل الاختلاف النس ، وعلق على النتائج.

٤/٨ التوزيعات الاحتمالية ا نفصلة ا اصة

كث من النواحي التطبيقية، تتبع بعض الظواهر توزيعات احتمالية خاصة، وهي التوزيعات ال كن حساب احتمالات قيم ا تغ عن طريق معادلة رياضية، تسمى بدالة الاحتمال $f(x)$ **، وهذه ا عادلـة ا معا معينة، تسمى عا ا تمع الذي ينسب له هذا التوزيع، وهذه ا عا ما هي إلا حقائق ثابتة هوا ـة، وهي الأساس حساب القيم الاحتمالية للتوزيع الاحتما للمجتمع ل الدراسة.**

ومن أهم التوزيعات ال سيتم دراستها هذا ا قرر، توزيع ثنائي ا دين، والتوزيع البواسون.

١/٤/٨ التوزيع ثنائي ا دين The Binomial Distribution

يستخدم هذا التوزيع ا الات ال يكون للظاهرة ل الدراسة نتيجتان فقط متنافيتان، النتيجة ل الاهتمام وتسمى الة النجاح، والأخرى تسمى الة الفشل، ومن أمثلة ذلك:

- عند إعطاء مريض نوع مع من الأدوية، ا نتيجتان: (استجابة للدواء، أو عدم استجابة)
- عند فحص عبوة بداخلها نوع مع من الفاكهة، ا نتيجتان (الوحدة إما أن تكون سليمة، أو تكون معيبة)
- عند إلقاء قطعة عملة، ا نتيجتان (ظهور الوجه الذي مل الصورة، أو الوجه الذي مل الكتابة)
- نتيجة الطالب الاختبار (اح، رسوب)
- استخدام ا زارع ل نامج مع الزراعة (يستخدم، أو لا يستخدم).

شكل التوزيع الاحتما ثنائي ا دين

إذا كررت اولة n من ا رات، يث أن كل اولة ا نتيجتان فقط متنافيتان ا:

- النتيجة ل الاهتمام " حالة اح " وتتم باحتمال ثابت كل اولة هو p
- النتيجة الأخرى " حالة فشل " وتتم باحتمال ثابت أيضا هو $q = 1 - p$

وبافتراض أن هذه ا اولات مستقلة، ع أن نتيجة كل اولة ليس ا علاقة بنتيجة ا اولة الأخرى، وإذا كان ا تغ العشوائي X يع عن عدد حالات النجاح "عدد النتائج ل الاهتمام" الـ n اولة، فـإن مدي ا تغ العشوائي X والذي يع عن عدد حالات النجـاح هـو: $X : \{x = 0,1,2,...,n\}$ ، ومـن سب الاحتمال $P(X = x) = f(x)$ بتطبيق ا عادلة التالية:

$$f(x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x} \;,\; x = 0,1,2,...n \qquad (٨-٥)$$

حيث أن $\binom{n}{x}$ هي عدد طرق اختيار x من n مع إ ال الترتيب، و سب كما يلي:

$$\binom{n}{x} = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-x+1)}{x(x-1)(x-2)...3\times2\times1} \qquad (٨-٦)$$

$$\binom{7}{3} = \frac{7\times6\times5}{3\times2\times1} = 35 \quad = \quad \binom{7}{4}$$

$$\binom{7}{0} = \binom{7}{7} = 1$$

مثـ ـ ـال (٨-٣)

إذا كان من ا علوم أن نسبة الشفاء من مرض مع باستخدام نوع مع من العقاقير الطبيـة هـو 0.60 ، إذا تناول هذا العقار 5 مصاب ذا ا رض. إذا عرف ا تغ العشـوائي X بأنـه عـدد الـذين ا ستجيب (حالات الشفاء) ذا العقار.

ا طلوب:

أ- ما هو نوع ا تغ ؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ ذا ا تغ .

ت- احسب الاحتمالات التالية:

- **ما احتمال استجابة 3 مرضى ذا العقار؟**
- **ما هو احتمال استجابة مريض واحد على الأقل؟**
- **ما هو احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر؟**

ث- احسب الوسط ا سا ، والا راف ا عياري لعدد حالات الاستجابة.

ج- حدد شكل التوزيع.

ا ـ ـل:

أ- عدد حالات الاستجابة X متغ <u>كمي</u> <u>منفصل</u> ، ومدى هذا ا ـتغ هـذه ا الـة هـو:

$X : \{x = 0,1,2,3,4,5\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال: $n = 5$ ، $p = 0.60$ ، $q = 1 - p = 0.40$ **إذا:**

$$f(x) = \binom{n}{x}(p)^x (q)^{n-x}$$

$$= \binom{5}{x}(0.6)^x (0.4)^{5-x} \quad , \quad x = 0,1,2,3,4,5$$

ت- حساب الاحتمالات:

- **حساب احتمال استجابة 3 مرضى ذا الدواء:** $P(x = 3) = f(3)$

$$f(3) = \binom{5}{3}(0.6)^3 (0.4)^{5-3} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} \times 0.216 \times 0.16 = 10 \times 0.03456$$

$$= 0.3456$$

- **حساب احتمال استجابة مريض واحد على الأقل:** $P(x \geq 1)$

$$P(x \geq 1) = f(1) + f(2) + f(3) + f(4) + f(5) = 1 - f(0)$$

$$= 1 - \left[\binom{5}{0}(0.6)^0 (0.4)^5\right] = 1 - 1 \times 1 \times 0.01024 = 0.98976$$

- **حساب احتمال استجابة 2 مرضى على الأكثر:** $P(x \leq 2)$ **:**

$$P(x \leq 2) = f(2) + f(1) + f(0)$$

$$= \binom{5}{2}(0.6)^2(0.4)^3 + \binom{5}{1}(0.6)^1(0.4)^4 + \binom{5}{0}(0.6)^0(0.4)^5$$
$$= \frac{5\times 4}{2\times 1}(0.36)(0.064) + \frac{5}{1}(0.6)(0.0256) + 1(1)(0.01024$$
$$= 0.2304 + 0.0768 + 0.01024 = 0.31744$$

ث - حساب الوسط ا سا ، والا راف ا عياري لعدد حالات الاستجابة:

- **الوسط ا سا** (μ) **حالة التوزيع ثنائي ا دين سب بتطبيق ا عادلة (٨-٣)، وباستخدام العمليات الرياضية كن الوصول إ النتيجة التالية:**

$$\boxed{\mu = \sum x\ f(x) = np} \qquad (٧-٨)$$

إذا الوسط ا سا هو:

$$\mu = np = 5(0.60) = 3$$

- **الا راف ا عياري هو ا ذر التربيعي ا وجب للتباين، و ساب التباين التوزيع ثنائي ا دين يتم تطبيق ا عادلة (٨-٤)، ومنها كن التوصل إ الصورة التالية:**

$$\boxed{\sigma^2 = npq} \qquad (٨-٨)$$

إذا تباين عدد حالات الاستجابة هو:

$$\sigma^2 = npq$$
$$= 5(0.60)(0.40) = 1.2$$

ومن يأخذ الا راف ا عياري الصورة التالية:

$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{1.2} = 1.095$$

و كن حساب معامل الاختلاف النس ، بتطبيق ا عادلة التالية:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu}\times 100 = \frac{1.095}{3}\times 100 = 36.5\%$$

ج - ديد شكل التوزيع:

يتحدد شكل التوزيع ثنائي ا دين وفقا لقيمة احتمال النجاح p **كما يلي:**

إذا كان $p = 0.5$ **فإن التوزيع الاحتما ثنائي ا دين يكون متماثل.**

إذا كان $p < 0.5$ **فإن التوزيع الاحتما ثنائي ا دين يكون موجب الالتواء.**

إذا كان $p > 0.5$ **فإن التوزيع الاحتما ثنائي ا دين يكون سالب الالتواء.**

وحيث أن $p = 0.6 > 0.5$ **فإن توزيع عدد حالات الاستجابة سالب الالتواء.**

٢/٤/٨ التوزيع البواسو Poisson Distribution

يكثر استخدام هذا التوزيع ا الات ال نقع فيها الأحداث وفقا عدلات زمنية، وكذلك حالة الأحداث نادرة الوقوع، ومن أمثلة ذلك:

- عدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشهر. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات ري نوع معـ من ا اصيل الزراعية خلال ا وسم. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد العملاء الذين يتم خدمتهم البنكية كل 10 دقائق. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات زيارة ا ريض للطبيب كل سنة. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد مرات تناول الأسرة للحوم ا مراء خلال الأسبوع. $X:\{x=0,1,2,...\}$
- عدد أخطاء الطباعة لكل صفحة من صفحات الكتاب. $X:\{x=0,1,2,...\}$

وهكذا الأمثلة كثـ ة

شكل التوزيع الاحتما البواسو

إذا كان متوسط عدد مرات وقوع حادث وفقا عدل زمـ معـ هو μ، وكان ا تغ العشـوائي X يعـ عن عدد مرات وقوع ا ادث وفقا ذا ا عـدل، فـإن مـدي ا ـتغ العشـوائي X هـو: $X:\{x=0,1,2,...\}$، وهذا ا دى عبارة عن فئة مفتوحة من اليم ، فإن الاحتمال $P(X=x)=f(x)$ والذي يعـ عن احتمال وقوع ا ادث عدد x من ا رات وفقا ذا ا عدل، سب بتطبيق ا عادلة التالية:

$$f(x)=\frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}\ ,\quad x=0,1,2,... \qquad (٨-٩)$$

حيث أن e هي أساس اللوغاريتم الطبيعي، وتوجد بعض الآلات ا اسبة، وقيمتـها هـي: $e=2.718$ تقريبا، و كن حساب قيمتها باستخدام الآلة ا اسبة باتباع ا طوات التالية من الشمال إ اليم :

مثلا إ اد $e^{-1.5}$

(SHIFT) (e^x) (-) (1.5) (=) (0.22323016) — النتيجة

وأما $x!$ فتسمى "مضروب العدد x " ويساوي: $x!=x(x-1)(x-2)...3\times2\times1$

مثـ ـال (٨-٤)

إذا كان من ا علوم أن عدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة من سلعة معينة خلال الشـهر تتبـع توزيع بواسون توسط 3 وحدات شهريا، إذا عرف ا تغ العشوائي X بأنه عدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة خلال الشهر من هذه السلعة.

ا طلوب:

أ- ما هو نوع ا تغ العشوائي؟

ب- اكتب شكل دالة الاحتمال $f(x)$ ذا ا تغ .

ج- احسب الاحتمالات التالية:

- **احتمال أن الأسرة تستهلك وحدتا خلال الشهر؟**
- **احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر؟**
- **احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر؟**

خ- احسب الوسط ا سا ، والا راف ا عياري لعدد الوحدات ا ستهلكة.

د- حدد شكل التوزيع.

ا ـل:

أ- عدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة X متغ كمي منفصل ، ومدى هذا ا ـتغ هـذه ا الة هو: $X:\{x=0,1,2,3,...\}$:

ب- شكل دالة الاحتمال:

ا أن متوسط عدد الوحدات ال تستهلكها الأسرة خلال الشهر هو: $\mu = 3$ ، إذا دالة الاحتمال هي:

$$f(x) = \frac{e^{-\mu}\mu^{x}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-3}3^{x}}{x!} \quad , \quad x = 0,1,2,...$$

ج- حساب الاحتمالات:

- **حساب احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدتا خلال الشهر، *f(2)***

$$f(2) = \frac{e^{-3}3^{2}}{2!} = \frac{0.0498(9)}{2\times 1} = 0.22404$$

- **احتمال أن أسرة ما تستهلك وحدة واحد على الأقل خلال الشهر هو:**

$$P(X \geq 1) = f(1) + f(2) + ...$$

$$= 1 - f(0) = 1 - \frac{e^{-3}3^{0}}{0!} = \frac{0.0498}{1} = 1 - 0.0498 = 0.9502$$

- **احتمال أن أسرة ما تستهلك 3 وحدات على الأكثر خلال الشهر هو:**

$$P(X \le 3) = f(3) + f(2) + f(1) + f(0)$$

$$= \frac{e^{-3}3^3}{3!} + \frac{e^{-3}3^2}{2!} + \frac{e^{-3}3^1}{1!} + \frac{e^{-3}3^0}{0!} \frac{0.0498}{1}$$

$$= 0.0498\left(\frac{27}{6} + \frac{9}{2} + \frac{3}{1} + \frac{1}{1}\right) = 0.0498(13) = 0.6474$$

خ - حساب الوسط ا سا ، والا راف ا عياري لعدد حالات الاستجابة:

- **الوسط ا سا (μ) حالة التوزيع البواسون هو معلمة معطاة هي:**

$$\mu = 3$$

هذا التوزيع، فإن التباين يساوي الوسط ا سا :

أي أن: $\sigma^2 = \mu = 3$

ومن يكون الا راف ا عياري هو:

$$\sigma = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} = 1.732$$

و كن حساب معامل الاختلاف النس ، بتطبيق ا عادلة ال سبق استخدامها الفصل السابق، وهو:

$$V.C = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{1.732}{3} \times 100 = 57.7\%$$

د - ديد شكل التوزيع:

<u>دائما التوزيع البواسون موجب الالتواء.</u>

٥/٨ ا تغ ات العشوائية ا ستمرة Continuous Random Variables

ا تغ العشوائي ا ستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، ويأخذ عدد لا ائي من القيم ا مكنـة لـه داخل اله، فإذا كان X متغ عشوائي مستمر، ويقع ا ـدى (a,b)، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$، فإن للمتغ X عدد لا ائي من القيم تقع ب ا دين الأد والأعلى (a,b)، ومن الأمثلة علـى ا ـتغ ات الكمية ا ستمرة ما يلي:

- كمية الألبان ال تنتجها البقرة اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- ا ساحة ا رعة بالأعلاف ا ملكة بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج ا د بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن ا سم بالكيلوجرام للأعمار من $(30\text{-}40)$، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

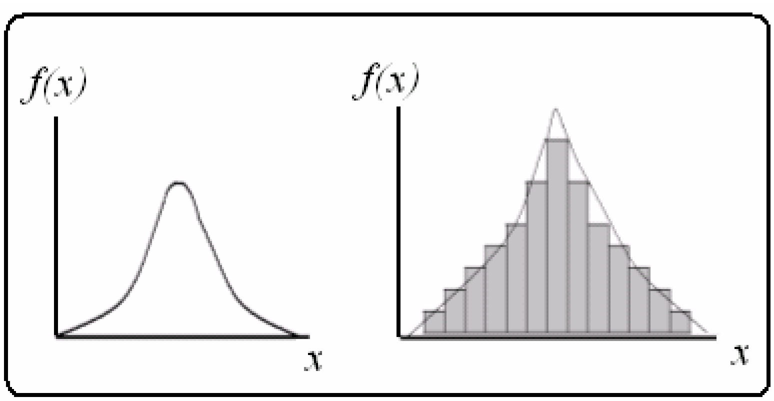
وهكذا الأمثلة على ا تغ الكمي ا ستمر كث ة.

١/٥/٨ التوزيع الاحتما للمتغ ا ستمر Continuous Probability

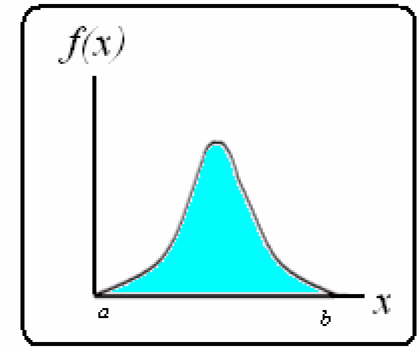
عند ثيل بيانات ا تغ الكمي ا ستمر شكل مدرج تكراري النس ، د أن شكل هذا ا درج هـو أقرب وصف نحـ التوزيع الاحتما للمتغ ا ستمر، وكلما ضاقت الفترات ب مراكز الفئـات، كـن ا صول على رسم دقيق للمنحـ ا اص بدالة احتمال ا تغ ا ستمر، كما هو مب بالشكل التا :

شكل (٨-١)

شكل منحـ التوزيع الاحتما للمتغ العشوائي ا ستمر



وا ساحة أسفل ا نحـ تع عن موع الاحتمالات الكلية، ولذا تسـاوي هـذه ا سـاحة الواحـد الصحيح، ونسمى الدالة $f(x)$ بدالة كثافة الاحتمال Probability Distribution Function$(p.d.f)$، وبفرض ا تغ العشوائي ا ستمر يقع ا دى: $X = \{x : a \prec x \prec b\}$، وأن منحـ هذه الدالـة يأخـذ الصورة التالية:



فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

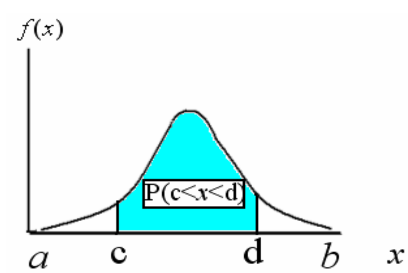
١- الدالة $f(x)$ موجبة داخل ا دى (a,b) أي أن: $f(x) \succ 0$ ، $x \in (a,b)$

٢- التكامل على حدود ا تغ من ا د الأد a حـ ا د الأعلى b يعـ عن موع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح ، أي أن:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1 \qquad (١٠-٨)$$

حيث أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل ا دد من $x=a$ حـ $x=b$ ، وهذا يعـ إ ـاد ا ساحة أسفل ا نحـ بـ (a,b).

٣- ساب احتمال أن ا تغ العشوائي ا ستمر يقع ا ـدى (d,c) أي حسـاب الاحتمـال $p(c<x<d)$ ، ب حساب ا ساحة أسفل ا نحـ من $x=c$ حـ $x=d$ كما هي مبينة الشكل البيا التا :



ويتم ذلك بإ اد التكامل ا دد هذا ا دى، كما يلي:

$$p(c<x<d) = \int_{x=c}^{x=d} f(x)\ dx = [g(x)]_c^d = g(d) - g(c) \qquad (١١-٨)$$

٤- ا تغ ا ستمر، يكون الاحتمال $p(x = value)$ مساويا للصفر، أي أن:

$$p(x = value) = 0 \qquad (٨-١١)$$

ولكي كننا حساب الاحتمالات، ب عرض بعض قواعد التكامل التالية:

جدول (٨-٢)
بعض قواعد التكامل

(1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}$ and $\int (a+bx)^n dx = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$ (2) $\int e^x dx = e^x$ and $\int e^{(a+bx)} dx = \frac{1}{b} e^{(a+bx)}$ (3) $\int \frac{1}{x} dx = \log_e(x)$ and $\int \frac{1}{(a+bx)} dx = \frac{1}{b} \log_e(a+bx)$	integration
(4) $\Gamma(n+1) = \int_0^\infty x^n e^{-x} dx = n! = n(n-1)(n-2)...3 \times 2 \times 1$	gamma
(5) $I\Gamma(n+1) = \int_0^a x^n e^{-x} dx = n!\left(1 - e^{-a} \sum_{i=0}^{n} \frac{a^i}{i!}\right)$	Incomplete gamma
(6) $B(m+1, n+1) = \int_0^1 x^n (1-x)^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+1)!}$	Beta

مثـال (٨-٥)

إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بالألف ريال على ا واد الغذائية له دالة كثافة احتمـال تأخـذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) , & 0 < x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

وا طلوب:

١- حساب قيمة الثابت c

٢- احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما ب (8,5) ألف ريال خلال الشهر.

٣- إذا كان لدينا 600 أسرة، فما هو عدد الأسر ا توقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر؟

ا ـ ـ ـل

١- حساب قيمة c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1$$

إذا

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x)\ dx = c\int_{x=0}^{x=10}(10x-x^2)\ dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100)-\frac{(1000)}{3})\right]-0$$

$$=\frac{500}{3}c=1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

٢- حساب أن إنفاق الأسرة يتراوح بـ $(8,5)$ **ألف ريال خلا الشهر هو.**

$$p(5<x<8)=\int_{x=5}^{x=8}0.006x(10-x)\ dx = 0.006\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$=0.006\left[\left(5(8)^2-\frac{8^3}{3}\right)-\left(5(5)^2-\frac{5^3}{3}\right)\right]=0.006[(149.3333)-(83.3333)]$$

$$=0.006(66)=0.396$$

٣- إذا كان لدينا 600 **أسرة، فإن عدد الأسر ا توقع أن يقل إنفاقها عن** 3 **آلاف خلال الشهر هو:**

$$number\ of\ \ family = 600\ \ p(x<3)$$

$$=600\int_0^3 0.006x(10-x)dx$$

$$=3.6\left[5x^2-\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.6[45-9]-0=129.6\approx 130$$

حوا 130 **أسرة.**

٢/٥/٨ ا توسط والتباين التوزيع الاحتما ا ستمر

إذا كانت $f(x)$ **هي دالة كثافة الاحتمال للمتغ العشوائي** x **،** $a<x<b$ **فإن التوقع الرياضي للدالة** $h(x)$ **تأخذ الصورة التالية:**

$$E(h(x))=\int_a^b h(x)\ dx \qquad (١٢-٨)$$

ومن كن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يلي.

$$\mu = E(x) = \int_a^b x f(x) dx$$
$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 \ , \ E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x) \ dx \qquad (١٣-٨)$$

تابع مثال (٨-٥)

ا ثال السابق أوجد ا توسط والا راف ا عياري ومعامل الاختلاف النس للإنفاق الشهري.

ا ـ ـ ـ ل

١- ا توسط ا سا

$$\mu = E(x) = xf(x)dx = \int_0^{10} x(0.006x(10-x)) = 0.006\int_0^{10}(10x^2 - x^3)dx$$
$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$
$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري 5 **آلاف ريال.**

٢- الا راف ا عياري

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 = E(x^2) - (5)^2$$
$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x) \ dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$
$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$
$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذا التباين هو : $\sigma^2 = 30 - 25 = 5$ **، ومن يأخذ الا راف ا عياري القيمة التالية:**

$$\sigma = \sqrt{\text{variance}} = \sqrt{5} = 2.236$$

٣- معامل الاختلاف النس

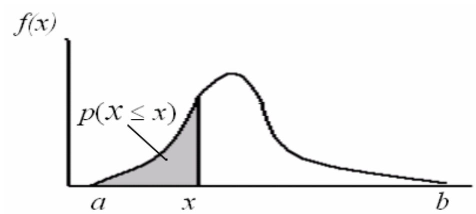
$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{2.236}{5} \times 100 = 44.72\%$$

دالة التوزيع التجميعي (C.D.F) Cumulative Distribution Function

يرمز ذه الدالة بالرمز $(C.D.F) = F(x)$ **و سب بإ اد الاحتمال:**

$$C.D.F = F(x) = P(X \le x) = \int_a^x f(x)dx \qquad (١٤-٨)$$

و كن توضيحها بيانيا بالرسم التا :



تابع مثال (٨-٥)

ا ثال (٨-٥) أوجد دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$، استخدم هذه الدالة ساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 آلاف جنيه.

ا ـ ـل

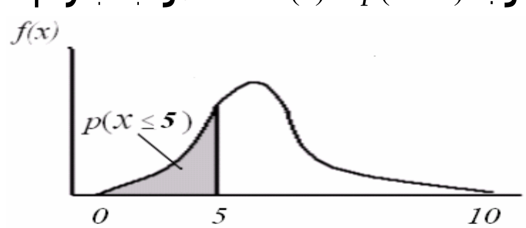
- **إ اد دالة التوزيع التجميعي** $C.D.F$

$$F(x) = \int_0^x f(x)\ dx$$

$$= \int_0^x 0.006x(10-x)dx = 0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$

- **حساب الاحتمال ا طلوب** $F(5) = p(x \le 5)$ **، كما هو مب بالرسم التا :**



و كن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x = 5$ **الدالة** $F(x)$ **ال التوصل إليها، أي أن:**

$$F(5) = P(x \le 5) =$$

$$= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right] = 0.006\left[125 - \frac{125}{3}\right]$$

$$= 0.006\left(\frac{250}{3}\right) = 0.5$$

أي أن 50% من الأسر يقل إنفاقها عن 5 آلاف ريال.

خصائص دالة التوزيع التجميعي

١- $F(x) \succ 0$	**٢-** $F(a) = 0$	**٣-** $F(b) = 1$	**٤-** $p(X \succ x) = 1 - F(x)$
٥- $f(x) = dF(x)/dx$			

٦/٨ التوزيعات الاحتمالية ا ستمرة ا اصة

Continuous Probability Distributions

هناك بعض التوزيعات الاحتمالية ا ستمرة ا اصة، و ا دوال كثافة احتمال دة، وفيما يلي بعض هـذه التوزيعات:

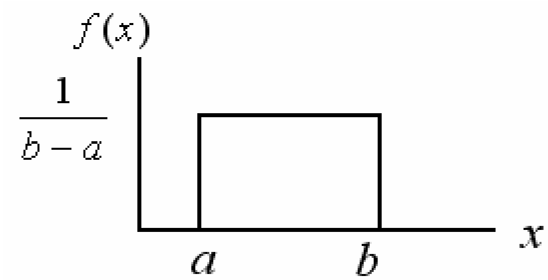
١/٦/٨ التوزيع ا نتظم Uniform distribution

شكل دالة كثافة الاحتمال *p.d.f*

هو توزيع له دالة احتمال ثابتة، ويستخدم حالة الظواهر ا كن أن دث بشكل منتظم، فإذا كان ا تغ x متغ عشوائي له توزيع منتظم *Uniform*، مداه هو $a < x < b$ فإن دالة كثافة احتمالـه هي:

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad , \quad a < x < b \qquad (١٥-٨)$$

و كن ثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معا هذا التوزيع

توجد معلمتان ذا التوزيع ا (b,a)، ولذا يكتب رمز ذا التوزيع الصورة $x \sim U(a,b)$

خصائص التوزيع ا ستطيل

الوسط ا سا μ ، والتباين σ^2 ذا ا تغ ا :

$$\mu = E(x) = \frac{a+b}{2} \;,\quad \sigma^2 = \frac{(b-a)^2}{12}$$

على الطالب إثبات ذلك:

دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآ

$$F(x) = p(X \le x) = \int_a^x f(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^x dx = \frac{x-a}{b-a} \qquad (١٦-٨)$$

مثـال (٨-٦)

استورد أحد ا راكز التجارية 1500 طن بطاطس، ووضعها زن، وقام ببيعها بكميات متساوية على مدار شهور السنة. إذا كانت الفترة الزمنية للبيع تتبع توزيع منتظم، فأوجد الآ :

- دالة كثافة الاحتمال ا ع ة عن الفترة الزمنية للبيع.
- بعد مرور سبعة أشهر من بداية البيع، ما هي الكمية ا وجودة با خزن؟

ا ـ ـ ـل

- دالة كثافة الاحتمال ا ع ة عن الزمن:

بفرض أن ا تغ x يع عن الفترة الزمنية للبيع مقاسة بالشهر، أي أن $0 < x < 12$، ومن تأخذ دالة كثافة الاحتمال ا ع ة عن الزمن الصورة التالية:

$$f(x) = \frac{1}{12-0} = \frac{1}{12} \;,\; 0 < x < 12$$

- حساب الكمية ا وجودة با خزن بعد سبعة أشهر من بداية البيع.

بفرض أن Q هي كمية البطاطس ا ستوردة ، تكون الكية ا تبقية با خزن بعد مرور سـبعة أشهر من بداية البيع هي :

$$Q \times p(x > 7) = Q \times (1 - F(7)) = 1500(1 - \frac{7-0}{12-0}) = 625 \;\; Ton$$

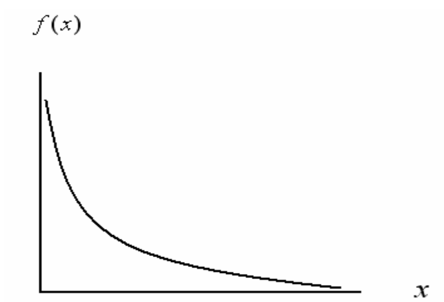
٢/٦/٨ التوزيع الأسي السالب Negative Exponential distribution

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان ا تغ x متغ عشوائي له توزيع أسي سالب ، مداه هو $0 < x < \infty$ فإن دالة كثافـة احتماله هي:

$$f(x) = \theta\, e^{-\theta x} \;,\; 0 < x < \infty \;,\; \theta \succ 0 \qquad (١٧-٨)$$

و كن ثيل هذه الدالة بيانيا كما يلي:



معا هذا التوزيع

توجد معلمة واحدة هي (θ)

خصائص التوزيع الأسى السالب

الوسط ا سا μ ، والتباين σ^2 ذا ا تغ ا:

$$\mu = E(x) = \frac{1}{\theta} \;,\;\; \sigma^2 = \frac{1}{\theta^2}$$

دالة التوزيع التجميعي $C.D.F$

تأخذ دالة التوزيع التجميعي $F(x)$ الشكل الآ

$$F(x) = p(X \le x) = \int_0^x f(x)dx = \left(1 - e^{-\theta x}\right)$$

مثــال (٨-٧)

إذا كانت الفترة الزمنية لإ اء خدمة العميل البنك تتبع توزيع أسي توسط 2 دقيقة، فأوجد ما يلي.

- دالة كثافة الاحتمال ا ة عن الفترة الزمنية لإ اء خدمة العميل.
- ما احتمال إ اء خدمة العميل أقل من دقيقة.

ا ـ ـ ـل

- دالة كثافة الاحتمال ا ة عن الزمن:

بفرض أن ا تغ x يع عن الفترة الزمنية لإ اء خدمة العميل بالدقيقة، أي أن $0 < x < \infty$ ، فإن ا توسط $1/\theta = 2$ ، ومن تصبح قيمة (θ) هي: $(\theta = 0.5)$ ، وتكتب دالة كثافة الاحتمال ا ة عن الزمن على الصورة التالية:

$$f(x) = 0.5\ e^{-0.5\ x},\ 0 < x < \infty$$

- حساب احتمال إ اء خدمة العميل أقل من دقيقة.

$$p(x \le 1) = (1 - e^{-0.5x}) = (1 - e^{-0.5(1)}) = 0.3935$$

٣/٦/٨ التوزيع الطبيعي The Normal Distribution

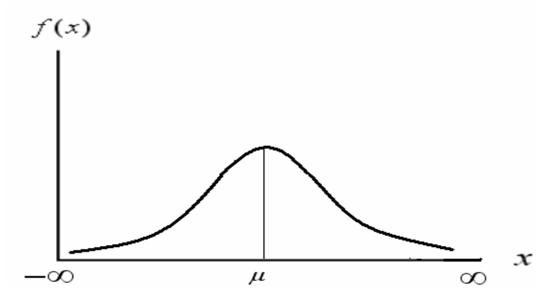
يعتَ هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما النواحي التطبيقية، ومنها الاستدلال الإحصائي شاملا التقدير، واختبارات الفروض، كما أن معظم التوزيعات كن تقريبها إ هـذا التوزيــع، وفيما يلي عرض ذا التوزيع.

شكل دالة كثافة الاحتمال $p.d.f$

إذا كان ا تغ x متغ عشوائي له توزيع طبيعي ، مداه هو $-\infty < x < \infty$ فإن دالــة كثافــة احتماله هي:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\ e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2},\ -\infty < x < \infty\ ,\ \pi = 22/7 \qquad (١٨-٨)$$

وهذا التوزيع له منحـ متماثل يأخذ الصورة التالية:



فهذا ا نحـ متماثل على جانـ الوسط ا سا μ .

معا هذا التوزيع

توجد معلمتـ ـذا التوزيع ا :

الوسط ا سا : $E(x)=\mu$ والتباين : $\text{var}(x)=\sigma^2$

ومن يعـ عن توزيع ا تغـ x بالرموز : $x \sim N(\mu,\sigma^2)$ ويعـ ذلك أن ا تغـ العشوائي x يتبـع التوزيع الطبيعي ـتوسط μ ، وتباين σ^2 .

خصائص التوزيع الطبيعي

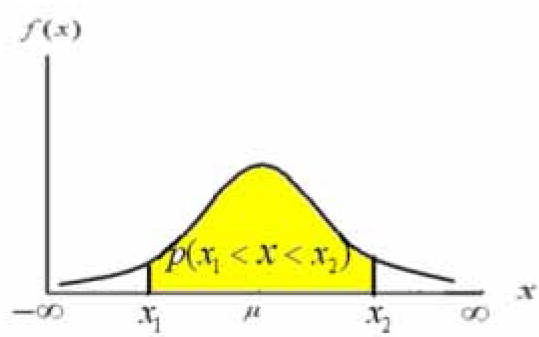
هذا التوزيع من أكثر التوزيعات الاحتمالية استخداما، بل يشتق منه كل التوزيعات الاحتمالية الأخرى ا ستخدمة الاستدلال الإحصائي، ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

١- الوسط ا سا μ ٢- والتباين σ^2

٣- منحـ هذا التوزيع متماثل على جانـ الوسط μ

كيفية حساب الاحتمالات $p(x_1 < X < x_2)$

بفرض أن الاحتمال ا طلوب حسابه هو $p(x_1 < X < x_2)$ ، وهذا الاحتمال ـدد با ساحة التالية:



وحيث أن هذا التوزيع من التوزيعات ا ستمرة، فإن هذه ا ساحة (الاحتمال) ـسب بإ اد التكامل التا :

$$p(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} dx$$

وهذا التكامل يصعب حسابه، ومن أ الإحصائي إ عمل ويلة رياضية Transform، كن استخدام توزيعها الاحتما حساب مثل هذه الاحتمالات، وهذه التحويلة هي:

$$z = \left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

ويعرف ا تغ ا ديد z با تغ الطبيعي القياسي Standard Normal Variable ، وهذا ا تغ له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

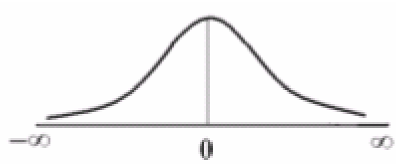
$$f(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}Z^2} \,, -\infty < z < \infty \,,\ \pi = 22/7 \qquad (١٩-٨)$$

ومن خصائص هذا التوزيع ما يلي:

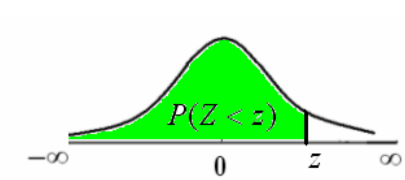
١- متوسطه هو: $E(z) = 0$ **٢- تباينه هو:** $\mathrm{var}(z) = 1$

ومن يع عن توزيع ا تغ z بالرموز : $z \sim N(0,1)$ **ويع ذلك أن ا تغ العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي القياسي توسط (0) ، وتباين (1) .**

٣- يأخذ ا نح الشكل الناقوس ا تماثل على جان الصفر:



وصمم الإحصائيون جداول إحصائية ساب دالة التوزيع التجميعي: $F(z) = P(Z < z)$ **، كما هو مب بالرسم التا :**

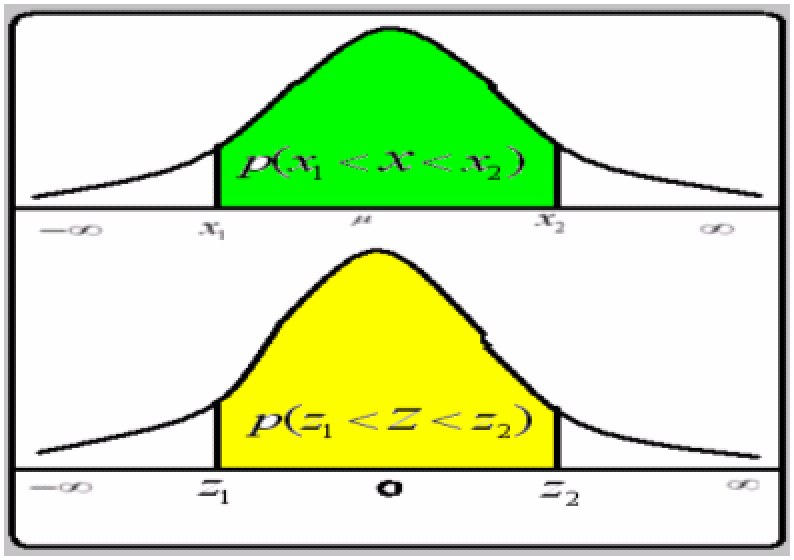


ونعود الآن إ خطوات حساب الاحتمال $p(x_1 < X < x_2)$ **باستخدام التحويلة** $z = (x-\mu)/\sigma$ **:**

١- يتم ويل القيم الطبيعية (x_1, x_2) **إ قيم طبيعية قياسية:**

$z_1 = (x_1 - \mu)/\sigma \ ,\ z_2 = (x_2 - \mu)/\sigma$ **.**

٢- ومن يكون الاحتمال: $p(x_1 < X < x_2) = p(z_1 < Z < z_2)$ **:**



٣- تستخدم جداول التوزيع الطبيعـي القياسـي، والـذي يعطـي ا سـاحة ا اصـة بالاحتمـال
$F(z) = P(Z < z)$

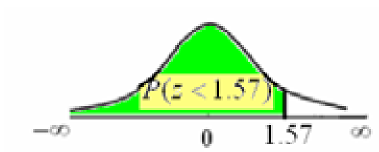
٤- طريقة استخدام جدول التوزيع الطبيعي القياسي حساب الاحتمالات

أوجد الاحتمالات التالية:

أ- $P(z < 1.57)$ **ب-** $P(z < -2.33)$ **ج-** $P(z > 1.96)$ **د-** $P(-2.01 < z < 1.28)$

ا ل

أ- دد ا ساحة ا ة عن الاحتمال $P(z < 1.57) = F(1.57)$ **أسفل ا نح كما يلي**



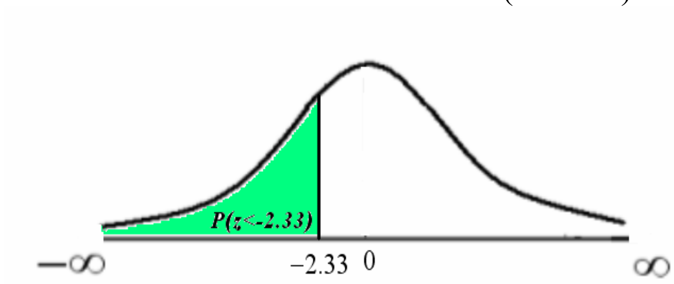
ويتم استخدام ا دول كما هو مب :

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
⋮										
1.00										
1.10										
1.20										
1.30										
1.40										
1.50								0.9418		
⋮										

ويكون الاحتمال ا طلوب هو: $P(z < 1.57) = F(1.57) = 0.9418$

ب- ا ساحة أسفل ا نحـ ا ع ة عن الاحتمال $P(z<-2.33)=F(-2.33)$ موضحة كالتا :

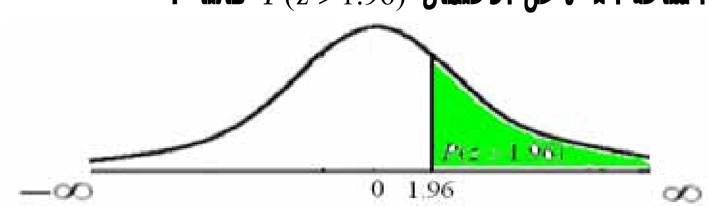
P(z<-2.33)



z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.										
.										
.										
.										
-2.70										
-2.60										
-2.50										
-2.40										
-2.30				0.0099						
.										
.										
.										

ومن يكون : $P(z<-2.33)=0.0099$

ج- دد ا ساحة ا ع ة عن الاحتمال $P(z>1.96)$ كالتا :



وهذا الاحتمال سب باستخدام خصائص دالة التوزيع التجميعي ، حيث أن :

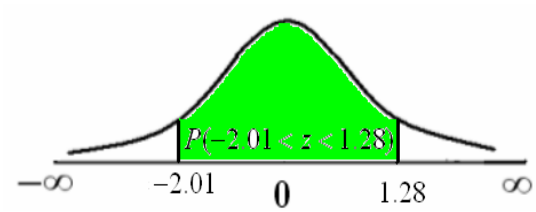
$$P(z > 1.96) = 1 - p(z < 1.96) = 1 - F(1.96)$$

وبالكشـف ا ـدول بـنفس الطريقـة السـابقة علـى القيمـة 1.96 **ـد أن :**

$p(z < 1.96) = 0.9750$ **، ومـن يكـون الاحتمـال ا طلـوب هـو:**

$$P(z > 1.96) = 1 - 0.9750 = 0.0250$$

د- ا ساحة أسفل ا نحـ ا ة عن الاحتمال $P(-2.01 < z < 1.28)$ **هي:**



وباستخدام أيضا خصائص دالة التوزيع التجميعي كن حساب هذا الاحتمال ، حيث أن :

$$P(-2.01 < z < 1.28) = F(1.28) - F(-2.01)$$

وبالكشف ا دول عن هاتين القيمتين ، د أن:

$$P(-2.01 < z < 1.28) = 0.8997 - 0.0222 = 0.8775$$

مثـال(٨-٨)

إذا كان الدخل السنوي للأسرة أحد مناطق ا ملكة يتبع توزيع طبيعي متوسطه 80 **ألف ريال، وتباينه** 900**. وا طلوب:**

١- كتابة قيمة معا التوزيع الاحتما للدخل السنوي.

٢- كتابة شكل دالة كثافة الاحتمال.

٣- ما هي نسبة الأسر ال يقل دخلها عن60 **ألف ريال ؟**

٤- ما هو الدخل الذي أقل منه 0.975 **من الدخول؟**

ا ـل

١- كتابة قيمة معا التوزيع الاحتما للدخل السنوي.

بفرض أن x **متغ عشوائي يع عن الدخل السنوي بالألف ريال، وهو يتبع التوزيع الطبيعي، ومعا ـه هي:**

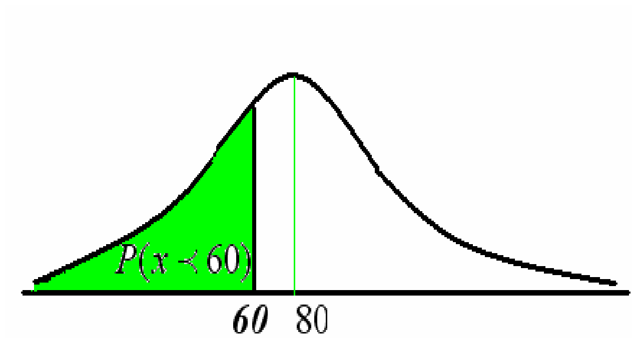
أ- ا توسط $E(x) = \mu = 80$ **ب- التباين هو:** $Var(x) = \sigma^2 = 900$

أي أن : $x \sim N(80,900)$

٢- شكل دالة كثافة الاحتمال

$$f(x)=\frac{1}{30\sqrt{2\pi}}\;e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-80}{30}\right)^2}\;,\;-\infty<x<\infty\;,\;\pi=22/7$$

٣- نسبة الأسر ال   يقل دخلها عن60 **ألف ريال هي:** $P(x \prec 60)$



ويتبع ا طوات ا ذكورة سابقا   حساب الاحتمال كما يلي:

$$P(x<60)=p\left(z<\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$=P\left(z<\frac{60-80}{30}\right)=P(z<-0.67)=F(-0.67)$$

وبالكشف مباشرة عن هذه القيمة   جدول التوزيع الطبيعي القياسي ، د أن

$$P(x<60)=P(z<-0.67)=0.2514$$

٤- الدخل الذي أقل منه 0.975 **من الدخول: هذه ا الة يبحث عن قيمة ا تغ** (x) **الذي أقل منـه** 0.975 **، بفرض أن هذا ا تغ هو** (x_1) **، فإن :**

$$P(x<x_1)=p\left(z<\frac{x_1-80}{30}\right)=0.975$$

بالكشف بطريقة عكسية ، حيث نبحث عن ا ساحة 0.9750 **دها تقع عند تقاطع الصف** 1.9 **، والعمود** .06 **أي أن قيمة** $z=1.96$ **، ويكون :**

$$1.96=\frac{x_1-80}{30}\;,\;Then\quad x_1=30(1.96)+80=138.8$$

إذا الدخل هو 138.8 **ألف ريال   السنة.**