نموذج تحليل التباين الأحادي

One Way ANOVA Model

أولا: شكل النموذج وافتراضاته

إذا كان:

k هي عدد المجموعات المكونة للمتغير النوعي محل الدراسة (عدد المجتمعات)

n_i هي حجم عينة المسحوبة من المجتمع (المجموعة) رقم i ، $i = 1,2,...,k$

y_{ij} هي المشاهدة رقم j في العينة المسحوبة من المجتمع رقم i ، $i = 1,2,...,k$

μ_i هو متوسط المجتمع i ، $E(y_{ij}) = \mu_i$ ، $i = 1,2,...,k$.

μ يعبر عن المتوسط العام.

τ_i هي أثر المجموعة (المجتمع) رقم i ، وتعكس الآثار τ_i الاختلافات بين المجموعات $\tau_i = \mu_i - \mu$ ، $i = 1,2,...,k$

ε_{ij} هو الخطأ العشوائي للمشاهدة رقم j في العينة المسحوبة من المجموعة رقم i ، وتعكس الأخطاء الاختلافات داخل المجموعات $\varepsilon_{ij} = (y_{ij} - \mu_i)$.

فإن نموذج تحليل التباين الأحادي، هو النموذج الذي يعبر عن المشاهدة y_{ij} كمتغير تابع، والعوامل المفسرة لها كمتغيرات مستقلة ، ويأخذ الصورة التالية.

$$y_{ij} = \mu + \tau_i + \varepsilon_{ij} \;\;,\;\; i = 1,2,...,k \tag{1}$$

والنموذج أعلاه يأخذ الشكل الخطي ، ويستند هذا النموذج على الافتراضات Assumptions التالية:

$$\sum_{i=1}^{k} \tau_i = 0 \;\; or \;\; \sum_{i=1}^{k} n_i \tau_i = 0 \tag{2}$$

المشاهدات y_{ij} مستقلة، ولها توزيع طبيعي متوسطه μ_i ، وتباينه σ^2 ثابت من مجموعة إلى أخري، أي أن:

$$y_{ij} \sim N(\mu_i, \sigma^2) \;\; for \;\; all \;\; i = 1,2,...,k \tag{3}$$

$$\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2) \;\; for \;\; all \;\; i = 1,2,...,k \tag{4}$$

ثانيا: تقديرات معالم النموذج

يلاحظ أن النموذج (١) أعلاه يحتوي على عدد من المعالم هي: $(\mu, \mu_i, \tau_i, \sigma^2)$ ، ويمكن تقدير هذه المعالم باستخدام بعض طرق التقدير الإحصائي، مثل طريقة المربعات الصغرى الخطي، وطريقة الإمكانية العظمى، ومن ثم يأخذ تقدير المربعات الصغرى للمعالم أعلاه الشكل التالي:

$$\hat{\mu} = \bar{y}_{..} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}}{n.} = \frac{\bar{y}_{..}}{n.} \;\;,\;\; n. = \sum_{i=1}^{k} n_i \tag{5}$$

$$\hat{\mu}_i = \bar{y}_{i.} = \frac{\sum_{i=1}^{k} y_{ij}}{n_i} = \frac{y_{i.}}{n_i} \quad , \quad \hat{\tau}_i = \bar{y}_{i.} - \bar{y}_{..} \tag{6}$$

ومن ثم يكون تقدير أثر المجموعة رقم i هو:

$$\hat{\tau}_i = \hat{\mu}_i - \hat{\mu}$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2_{pooled} = MSE = \frac{\sum_{i=1}^{k} (n_i - 1) s_i^2}{n_. - k} \tag{7}$$

حيث أن s_i^2 هو تباين العينة رقم i ، $i = 1,2,...,k$

ثالثا : اختبارات الفروض

أحد الفروض الأساسية المطلوب اتخاذ قرار بخصوصها، والذي يعتبر غرضا من أغراض استخدام النموذج هو اختبار تساوي آثار المجموعات، حيث يأخذ الفرض العدم والفرض البديل الصورة التالية :

$$\begin{aligned} &H_o : \tau_1 = \tau_2 = ... = \tau_k \\ &H_a : at\ \ least\ \ two\ \ of\ \ \tau_i\ \ different \end{aligned} \tag{8}$$

و إذا عوضنا عن $\tau_i = \mu_i - \mu$ ، فإن الفرض أعلاه يمكن صياغته بشكل آخر هو:

$$H_o : \mu_1 = \mu_2 = ... = \mu_k = \mu$$
$$H_a : at\ least\ tow\ of\ \ \mu_i\ different \qquad (9)$$

وبإتباع نفس الخطوات السابقة، يمكن اختبار الفرض أعلاه .

حيث أن إحصائية الاختبار هي:

$$F^* = \frac{SSB/(k-1)}{SSW/(n_. - k)} = \frac{MSB}{MSW} \sim F_{((k-1),(n_. - k))} \qquad (10)$$

حيث أن:

$$SSTo = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}^2 - \frac{y_{..}^2}{n_.}$$

$$SSB = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_{i.}^2}{n_i} - \frac{y_{..}^2}{n_.}$$

$$SSE = SSW = SSTo - SSB$$

رابعا : تقدير فترة ثقة.

أ – فترة ثقة لمتوسط المجتمع رقم i (μ_i) هي: $\bar{y}_{i.} \pm t_{((1-\alpha/2)\ ,\ (n_. - k))}\sqrt{\frac{MSE}{n_i}}$

ب- فترة ثقة للفرق $(\mu_i - \mu_j)$ **هي:** $(\bar{y}_{i.} - \bar{y}_{j.}) \pm t_{\left((1-\alpha/2)\ ,\ (n_{.}-k)\right)} \sqrt{MSE\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_j}\right)}$