التوزيعات الاحتمالية المشتركة

Joint distributions

مقدمـــة

فيمـا سـبق تـم عـرض التوزيعـات الاحتماليـة لمتغيـر عشـوائي واحـد، ولكـن فـي كثيـر مـن النـواحي التطبيقية، قد يكون اهتمام الباحث هو دراسة شكل التوزيـع الاحتمـالي بين متغيرين ، لمعرفـة العلاقـة بينـهما، أو التنبؤ بأحدها من الآخر.

أولا: التوزيع الاحتمالي المشترك لمتغيرين متقطعين

Joint distribution for two discrete Variables

بفرض أن (x_2, x_1) متغيرين عشوائيين متقطعين، حيث أن:

$$(x_1, x_2 : (x_{11}, x_{21}), \ldots, (x_{1n}, x_{2n}))$$

فـإن دالـة الاحتمــال المشـترك تكتـب علــي الصـورة $f(x_1, x_2) = P(x_1 = x_1, x_2 = x_2)$ ومـن خصائص هذه الدالة ما يلي:

١- $0 < f(x_1, x_2) < 1$

٢- $\sum_{x_1} \sum_{x_2} f(x_1, x_2) = 1$

ويمكـن مـن خـلال دالـة التوزيـع الاحتمـالي تكـوين جـدول التوزيـع الاحتمـالي المشـترك للمتغيـرين (x_2, x_1)

تطبيق

إذا كانت دالة الاحتمال المشتركة بين عدد أفراد الأسرة (x_1)، وعدد الوحدات المستهلكة من سلعة معينة خلال الأسبوع (x_2) تأخذ الصورة التالية.

$$f(x_1,x_2)=\frac{x_1+x_2}{27} \quad , \quad x_1=1,2,3 \ , \ x_2=0,1,2$$

كون جدول التوزيع الاحتمالي، ثم أوجد الآتي:

١- احتمال أن أسرة ما يكون عدد أفرادها 2، وعدد وحدات استهلاكها الشهري وحدة واحدة أسبوعيا.

٢- إذا كان لدينا 500 أسرة، ما هو عدد الأسر المتوقع أن يكون عدد أفرادها واحد، واستهلاكها 2 وحدة أسبوعيا؟

الحـــل

تكوين جدول التوزيع الاحتمالي المشترك.

يتم التعويض بجميع قيم (x_2,x_1) في الدالة أعلاه كما يلي:

$f(1,0)=(1+0)/27=1/27 \ , \ f(1,1)=(1+1)/27=2/27 \ , \ f(1,2)=(1+2)/27=3/27$

$f(2,0)=(2+0)/27=2/27 \ , \ f(2,1)=(2+1)/27=3/27 \ , \ f(2,2)=(2+2)/27=4/27$

$f(3,0)=(3+0)/27=3/27 \ , \ f(3,1)=(3+1)/27=4/27 \ , \ f(3,2)=(3+2)/27=5/27$

جدول التوزيع الاحتمالي المشترك

		عدد الوحدات المستهلكة (x_2)			$f(x_1)$
		0	**1**	**2**	
عدد أفراد الأسرة (x_1)	**1**	1/27	2/27	3/27	6/27
	2	2/27	3/27	4/27	9/27
	3	3/27	4/27	5/27	12/27
	$f(x_2)$	6/27	9/27	12/27	**1**

١- احتمال أن أسرة عدد أفرادها 2، واستهلاكها الشهري وحدة واحدة أسبوعيا هو.

$$P(x_1=2,x_2=1)=f(2,1)=3/27$$

٢- عدد الأسر المتوقع أن يكون عدد أفرادها واحد واستهلاكها 2 هو:

$$= 500 \times f(1,2)$$
$$= 500 \times (3/27) = 55.6 = 56$$

دوال كثافة الاحتمال الهامشية

هي الدالة الخاصة بمتغير عشوائي واحد، ويمكن اشتقاقها من التوزيع المشترك كما يلي:

إذا كان $f(x_1, x_2)$ هي دالة كثافة الاحتمال المشترك بين المتغيرين (x_1, x_2) فإن دالة كثافة الاحتمال الخاصة بكل متغير على حدة تشتق كما يلي:

$$f(x_2) = \sum_{x_1} f(x_1, x_2) \quad , \quad f(x_1) = \sum_{x_2} f(x_1, x_2)$$

وتسمى الدالة $f(x_1)$ ، الدالة $f(x_2)$ بالدوال الهامشية.

تطبيق

في التطبيق السابق أوجد الآتي:

١- دالة كثافة الاحتمال الهامشية لعدد أفراد الأسرة في المجتمع.

٢- احسب القيمة المتوقعة، والتباين لعدد أفراد الأسرة.

دالة كثافة الاحتمال الشرطية.

في بعض الحالات قد يكون لدينا معلومات عن أحد المتغيرين، ويراد معرفة احتمالات حدوث قيم المتغير الآخر في ظل هذه المعرفة، في هذه الحالة يتم اشتقاق دالة تسمى بدالة الاحتمال الشرطي، كما يلي:

إذا كان $f(x_1, x_2)$ هي دالة كثافة الاحتمال المشترك بين المتغيرين (x_1, x_2) فإن دالة كثافة الاحتمال الشرطي للمتغير (x_1) إذا توافرت لدينا معلومات عن المتغير (x_2) هي:

$$f(x_1|x_2) = \frac{f(x_1, x_2)}{f(x_2)}$$

تطبيق

في التطبيق السابق أوجد الآتي:

١- دالة كثافة الاحتمال الشرطي لعدد الوحدات المستهلكة، إذا كان عدد أفراد الأسرة في المجتمع فردان.

٢- احسب التوقع الشرطي لعدد الوحدات المستهلكة

معامل الارتباط الخطي البسيط

يمكن حساب معامل الارتباط بين المتغيرين (x_1, x_2)، حيث يحسب هذا المعامل بتطبيق المعادلة التالية:

$$\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \sigma_2}, \qquad -1 < \rho < 1$$

حيث أن:

σ_{12} **: هو التغاير بين المتغيرين (x_1, x_2)، ويحسب من التوزيع الاحتمالي المشترك $f(x_1, x_2)$ كما يلي:**

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= E[(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)] \\ &= E(x_1 x_2) - \mu_1 \mu_2\end{aligned}$$

حيث أن $\mathrm{E}(x_1 x_2)$ هو التوقع المشترك بين المتغيرين، ويحسب من التوزيع المشترك $f(x_1, x_2)$ كالتالي:

$$E(x_1 x_2) = \sum_{x_1} \sum_{x_2} x_1 x_2 f(x_1, x_2)$$

أما μ_1, μ_2 فهما متوسطي المتغيرين العشوائيين، ويحسبا من التوزيع الاحتمالي الهامشي:

$$\mu_2 = \sum_{x_2} x_2 f(x_2) \quad ، \mu_1 = \sum_{x_1} x_1 f(x_1)$$

σ_1 **: هو الانحراف المعياري للمتغير العشوائي x_1 ، σ_2 : هو الانحراف المعياري للمتغير العشوائي**

x_2

تطبيق

في التطبيق السابق احسب معامل الارتباط بين المتغيرين.

جدول توزيع احتمالي مشترك بين المتغيرين x_2 , x_1

		x_1			$f(x_2)$	$x_2 \ f(x_2)$	$x_2^2 \ f(x_2)$
		1	**2**	**3**			
x_2	**1**	**0.1**	**0.05**	**0.05**	**0.20**	**0.20**	**0.20**
	2	**0.05**	**0.1**	**0.15**	**0.30**	**0.60**	**1.20**
	3	**0.15**	**0.15**	**0.2**	**0.50**	**1.50**	**4.50**
$f(x_1)$		**0.30**	**0.30**	**0.40**	**1.0**	**2.3**	**5.90**
$x_1 \ f(x_1)$		**0.30**	**0.60**	**1.20**	**2.1**		
$x_1^2 \ f(x_1)$		**0.30**	**1.20**	**3.60**	**5.1**		

$$
\begin{aligned}
E(x_1 x_2) &= 1\times1\times0.10 + 1\times2\times0.05 + 1\times3\times0.05 \\
&\quad + 2\times1\times0.05 + 2\times2\times0.10 + 2\times3\times0.15 \\
&\quad + 3\times1\times0.15 + 3\times2\times0.15 + 3\times3\times0.20 \\
&= 0.1 + 0.10 + 0.15 + 0.10 + 0.40 + 0.90 + 0.45 + 0.90 + 1.80 \\
&= 4.9
\end{aligned}
$$

$$\sigma_{x_1}^2 = E(x_1^2) - \mu_{x_1}^2 = 5.1 - (2.1)^2 = 0.69$$

$$\sigma_{x_2}^2 = E(x_2^2) - \mu_{x_2}^2 = 5.9 - (2.3)^2 = 0.61$$

$$\sigma_{x_1x_2} = E(x_1x_2) - \mu_{x_1}\mu_{x_2} = 4.9 - (2.1 \times 2.3) = 0.07$$

$$\rho_{x_1x_2} = \frac{\sigma_{x_1x_2}}{\sqrt{\sigma_{x_1}^2}\sqrt{\sigma_{x_2}^2}} = \frac{0.07}{\sqrt{0.69}\sqrt{0.61}} = 0.11$$

يوجد ارتباط طردي بين المتغيرين