المتغيرات العشوائية المستمرة

Continuous Random Variables

١ - مقدمـــة

المتغير العشوائي المستمر، هو الذي يأخذ قيما متصلة، ومن ثم له عدد لانهائي من القيم الممكنة داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر، ويقع في المدى **(a,b)**، أي أن: $\{X = x : a < x < b\}$ ، فإن للمتغير **X** عدد لانهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى **(a,b)**، ومن الأمثلة على المتغيرات الكمية المستمرة ما يلي:

- كمية الألبان التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر: $\{X = x : 10 < x < 40\}$
- المساحة المنزرعة بالأعلاف في المملكة بالألف هكتار $\{X = x : 1000 < x < 15000\}$
- فترة صلاحية حفظ الدجاج المبرد بالأيام، $\{X = x : 1 < x < 5\}$
- وزن الجسم بالكيلوجرام للأعمار من **(30-40)**، $\{X = x : 55 < x < 80\}$

وهكذا الأمثلة على المتغير الكمي المستمر كثيرة.

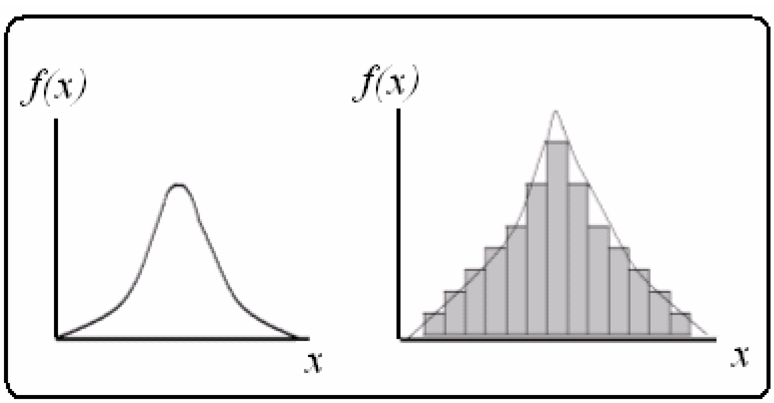
٢ - التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر

Probability Distribution of Continuous Variable

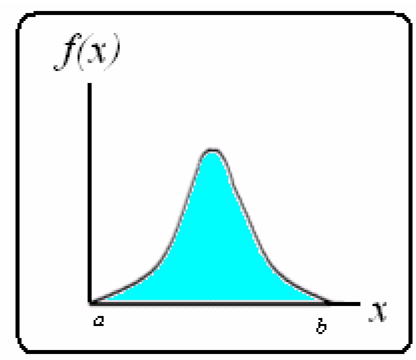
عند تمثيل بيانات المتغير الكمي المستمر في شكل مدرج تكراري نسبي، نجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير المستمر، وكلما ضاقت الفترات بين مراكز الفئات، يمكن الحصول على رسم دقيق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر، كما هو مبين بالشكل التالي:

شكل (١)

شكل منحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المستمر



والمساحة أسفل المنحنى تعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، ولذا تساوي هذه المساحة الواحد الصحيح، وتسمى الدالة $f(x)$ بدالة كثافة الاحتمال **Probability Distribution Function** $(p.d.f)$ ، وبفرض أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى: $X = \{x : a \prec x \prec b\}$ ، وأن منحنى هذه الدالة يأخذ الصورة التالية:



فإن من خصائص دالة كثافة الاحتمال $f(x)$ ما يلي:

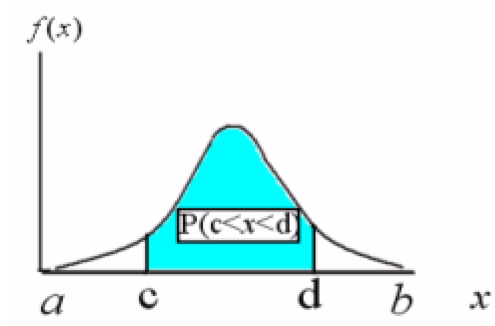
١- الدالة $f(x)$ موجبة داخل المدى (a,b) أي أن: $f(x) \succ 0$ ، $x \in (a,b)$

٢- التكامل على حدود المتغير من الحد الأدنى a حتى الحد الأعلى b يعبر عن مجموع الاحتمالات الكلية، لذا يساوي الواحد الصحيح، أي أن:

$$\boxed{\int_{x=a}^{x=b} f(x)\ dx = 1} \qquad (1)$$

حيث أن الشكل الرياضي أعلاه يسمى بالتكامل المحدد من $x = a$ حتى $x = b$ ، وهذا يعني إيجاد المساحة أسفل المنحني بين (a,b).

٣- لحساب احتمال أن المتغير العشوائي المستمر يقع في المدى (d,c) أي حساب الاحتمال $p(c < x < d)$ ، يجب حساب المساحة أسفل المنحني من $x = c$ حتى $x = d$ كما هي مبينة في الشكل البياني التالي:



ويتم ذلك بإيجاد التكامل المحدد في هذا المدى، كما يلي:

$$\boxed{p(c<x<d)=\int_{x=c}^{x=d} f(x)\,dx=[g(x)]_c^d=g(d)-g(c)} \qquad (2)$$

٤- في المتغير المستمر، يكون الاحتمال $p(x=value)$ مساويا للصفر، أي أن:

$$\boxed{p(x=value)=0} \qquad (3)$$

ولكي يمكننا حساب الاحتمالات، يجب عرض بعض قواعد التكامل:

بعض قواعد التكامل

(1)	$\int x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}$ **and** $\int (a+bx)^n dx=\frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)}$	**integration**
(2)	$\int e^x dx=e^x$ **and** $\int e^{(a+bx)}dx=\frac{1}{b}e^{(a+bx)}$	
(3)	$\int \frac{1}{x}dx=\log_e(x)$ **and** $\int \frac{1}{(a+bx)}dx=\frac{1}{b}\log_{e}{(a+bx)}$	
(4)	$\Gamma(n+1)=\int_0^\infty x^n e^{-x}dx=n!=n(n-1)(n-2)...3\times 2\times 1$	**gamma**
(5)	$I\Gamma(n+1)=\int_0^a x^n e^{-x}dx=n!\left(1-e^{-a}\sum_{i=0}^{n}\frac{a^i}{i!}\right)$	**Incomplete gamma**
(6)	$B(m+1,n+1)=\int_0^1 x^n(1-x)^m dx=\frac{m!n!}{(m+n+1)!}$	**Beta**

تطبيق (١)

إذا كان الإنفاق الشهري للأسرة بالألف ريال على المواد الغذائية له دالة كثافة احتمال تأخذ الصورة التالية:

$$f(x) = \begin{cases} cx(10-x) \ , & 0 < x < 10 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

والمطلوب:

١- **حساب قيمة الثابت** c

٢- **احسب احتمال أن إنفاق الأسرة يتراوح ما بين** *(8,5)* **ألف ريال خلال الشهر.**

٣- **إذا كان لدينا** *600* **أسرة، فما هو عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن** *3* **آلاف خلال الشهر؟**

الحـــل

١- **حساب قيمة** c

من خصائص دالة كثافة الاحتمال:

$$\int_{x=a}^{x=b} f(x) \ dx = 1$$

إذا

$$\int_{x=0}^{x=10} cx(10-x) \ dx = c\int_{x=0}^{x=10} (10x - x^2) \ dx = c\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right) - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10}$$

$$= c\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^{10} = c\left[(5(100) - \frac{(1000)}{3})\right] - 0$$

$$= \frac{500}{3}c = 1$$

$$c = 3/500 = 0.006$$

٢- **حساب أن إنفاق الأسرة يتراوح بين** *(8,5)* **ألف ريال خلا الشهر هو.**

$$p(5 < x < 8) = \int_{x=5}^{x=8} 0.006x(10-x) \ dx = 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_5^8$$

$$= 0.006\left[\left(5(8)^2 - \frac{8^3}{3}\right) - \left(5(5)^2 - \frac{5^3}{3}\right)\right] = 0.006[(149.3333) - (83.3333)]$$

$$= 0.006(66) = 0.396$$

٣- إذا كان لدينا ***600*** أسرة، فإن عدد الأسر المتوقع أن يقل إنفاقها عن 3 آلاف خلال الشهر هو:

$$number\ \ of\ \ \ family = 600\ \ p(x<3)$$

$$= 600\int_{0}^{3} 0.006x(10-x)dx$$

$$= 3.6\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = 3.6[45-9]-0 = 129.6 \approx 130$$

حوالي ***130*** أسرة تقريبا.

٣- المتوسط والتباين في التوزيع الاحتمالي المستمر

إذا كانت $f(x)$ هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير العشوائي x ، $a<x<b$ فإن التوقع الرياضي للدالة $h(x)$ تأخذ الصورة التالية:

$$\boxed{E(h(x)) = \int_{a}^{b} h(x)\ f(x)\ \ dx} \qquad (4)$$

ومن ثم يمكن كتابة معادلة الوسط والتباين كما يلي.

$$\boxed{\begin{array}{l} \mu = E(x) = \int_{a}^{b} xf(x)dx \\ \sigma^2 = E(x^2) - u^2\ ,\ E(x^2) = \int_{a}^{b} x^2 f(x)\ dx \end{array}} \qquad (5)$$

تابع تطبيق (١)

في التطبيق السابق أوجد المتوسط والانحراف المعياري ومعامل الاختلاف النسبي للإنفاق الشهري.

الحـــل

١- حساب المتوسط للتوزيع الاحتمالي للإنفاق الاستهلاكي

$$\mu = E(x) = \int_a^b x f(x) dx = \int_0^{10} x\big(0.006x(10-x)\big) = 0.006\int_0^{10}(10x^2 - x^3)dx$$

$$= 0.006\left[10\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{10} = 0.006\left[\left(\frac{10000}{3} - \frac{10000}{4}\right) - (0)\right]$$

$$= 60\left[\frac{1}{12}\right] = 5$$

متوسط إنفاق الأسرة الشهري *5* آلاف ريال.

٢- حساب الانحراف المعياري

$$\sigma^2 = E(x^2) - u^2 = E(x^2) - (5)^2$$

$$E(x^2) = \int_a^b x^2 f(x)\ dx = 0.006\int_0^{10}(10x^3 - x^4)dx$$

$$= 0.006\left[10\left(\frac{x^4}{4}\right) - \left(\frac{x^5}{5}\right)\right]_0^{10} = 0.006\left[\frac{100000}{4} - \frac{100000}{5}\right] - 0$$

$$= 600\left(\frac{1}{20}\right) = 30$$

إذا التباين هو:

$$\sigma^2 = 30 - 25 = 5$$

ومن ثم يأخذ الانحراف المعياري القيمة التالية:

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{var}iance} = \sqrt{5} = 2.236$$

٣- معامل الاختلاف النسبي

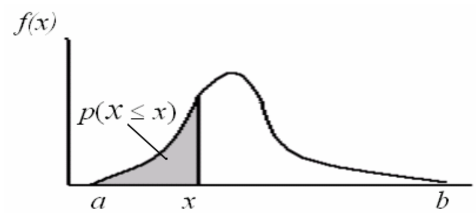
$$C.V = \frac{\sigma}{\mu} \times 100 = \frac{2.236}{5} \times 100 = 44.72\%$$

٤- دالة التوزيع التجميعي *(C.D.F)* Cumulative Distribution Function

يرمز لهذه الدالة بالرمز *(C.D.F)=F(x)* وتحسب بإيجاد الاحتمال:

$$\boxed{C.D.F = F(x) = P(X \le x) = \int_a^x f(x)dx} \qquad (6)$$

ويمكن توضيحها بيانيا بالرسم التالي:



تابع تطبيق (١)

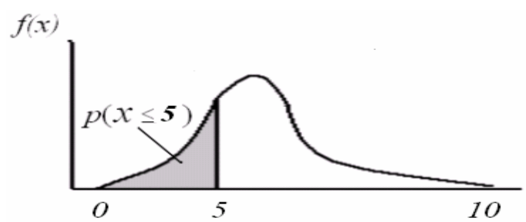
في التطبيق السابق أوجد دالـة التوزيـع التجميعي C.D.F، ثم استخدم هذه الدالـة لحساب احتمال أن إنفاق الأسرة يقل عن 5 آلاف ريال.

الحـل

- **إيجاد دالـة التوزيع التجميعي** $C.D.F$

$$F(x)=\int_0^x f(x)\;dx$$
$$=\int_0^x 0.006x(10-x)dx=0.006\left[10\left(\frac{x^2}{2}\right)-\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]_0^x$$
$$=0.006\left[5x^2-\left(\frac{x^3}{3}\right)\right]$$

- **حساب الاحتمال المطلوب** $F(5)=p(x\le 5)$ **، كما هو مبين بالرسم التالي:**



ويمكن حساب هذا الاحتمال بالتعويض عن $x=5$ **في الدالة** $F(x)$ **التي تم التوصل إليها، أي أن:**

$$F(5) = P(x \le 5) =$$
$$= 0.006\left[5x^2 - \frac{x^3}{3}\right] = 0.006\left[125 - \frac{125}{3}\right]$$
$$= 0.006\left(\frac{250}{3}\right) = 0.5$$

أي أن 50% من الأسر يقل إنفاقها عن 5 آلاف ريال.

خصائص دالة التوزيع التجميعي

١- $F(x) \succ 0$	٢- $F(a) = 0$	٣- $F(b) = 1$	٤- $p(X \succ x) = 1 - F(x)$	٥- $f(x) = dF(x)/dx$