الفصـــل الســــادس

معادلــــة الحــــرارة

6.1 الخلفية الفيزيائية

ندرس في هذا الفصل مسالة انتشار الحرارة داخل قضيب من المعدن. لدراسة هذه المسالة سوف نستنتج المعادلة التفاضلية الجزئية التي تصف المسالة، من اجل ذلك نبسط المسالة بوضع الشروط آلاتية:

1- القضيب ذات مقاطع عرضية منتظمة
2- درجة الحرارة ثابتة داخل المقطع (لا تتغير عند جميع نقاط المقطع)
3- تعتمد درجة الحرارة على الموضع x, y, z، و الزمن t، ($u = u(x, y, z, t)$).

قواعد انتقال الحرارة:

1- تنتقل الحرارة من النقاط ذات درجة الحرارة المرتفعة إلى المنخفضة،
2- معدل تسرب الحرارة من خلال المقطع يتناسب طرديا مع مساحة المقطع و مع $\nabla u.\vec{n} = \frac{\partial u}{\partial n}$ حيث $\vec{n}$ متجهة الوحدة العمودي على المقطع .
3- كمية الحرارة التي يكتسبها الجسم، Q، تتناسب مع كتلة الجسم m و مع تغير درجة الحرارة.

لنفرض أن درجة الحرارة u للكتلة Δm خلال الفترة الزمنية Δt قد تغيرت إلى Δu. أذن طبقا لقواعد انتقال الحرارة (3) نجد

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c\left(\Delta m\right)\left(\Delta u\right) \\ &= c\,\rho(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z)\left(\Delta u\right) \end{aligned}$$

حيث $c > 0$، الحرارة النوعية.

ومعدل التغير في كمية الحرارة هو

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = c\,\rho\left(\Delta x\,\Delta y\,\Delta z\right)\frac{\Delta u}{\Delta t} \tag{6.1.1}$$

من القاعدة (2) نستنتج أن معدل تسرب الحرارة إلى الكتلة Δm من خلال السطح الخارجى S_1 هو

$$-k\left(\Delta y\,\Delta z\right)\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_x\right)$$

حيث $k > 0$ ثابت التوصيل الحراري، الإشارة السالبة لان الحرارة تتسرب إلى داخل الجسم.
من خلال السطح S_2 يكون التسرب إلى الداخل

$$k\left(\Delta y\,\Delta z\right)\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}\right)$$

ويكون التغير في كمية الحرارة Q في الكتلة Δm الناتج عن التسرب في اتجاه x هو

$$k\left(\Delta y\,\Delta z\right)\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right)\right)$$

بالمثل نحصل على التغير في كمية الحرارة Q في الكتلة Δm الناتج عن التسرب في اتجاه y , z على الشكل

$$k\left(\Delta x\,\Delta z\right)\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\Delta y}-\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y}\right)\right) \quad \text{و} \quad k\left(\Delta x\,\Delta y\right)\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}-\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z}\right)\right)$$

ويكون معدل التغير في كمية الحرارة هو

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}=k\left[\Delta y\,\Delta z\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}\right)+\Delta x\,\Delta z\left(\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y+\Delta y}-\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y}\right)+\Delta x\,\Delta y\left(\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}-\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z}\right)\right]$$

باستخدام المعادلة (6.1.1) و القسمة على $c\rho\Delta x\,\Delta y\,\Delta z$ و أخذ النهاية عندما $\Delta t,\ \Delta x,\ \Delta y,\ \Delta z \to 0$ نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=D\nabla^2 u,\qquad D=\frac{k}{c\rho}. \tag{6.1.2}$$

يسمى الثابت D ثابت الانتشار.

إذا كان في الجسم مصدر للحرارة فان المعادلة المتجانسة (6.1.2) تصبح

$$\frac{\partial u}{\partial t}-D\nabla^2 u=q(x,y,z,t)$$

و إذا كانت $\frac{\partial u}{\partial t}=0$ ، أي أن درجة الحرارة لا تتغير مع الزمن (حالة استقرار) فان المعادلة (6.1.2) تتحول إلى معادلة لابلاس.

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)=0.$$

6.2 معادلة الحرارة في بعد واحد

في بعد واحد مسالة الشروط الابتدائية – الحدية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0, \tag{6.2.1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \qquad t > 0, \tag{6.2.2}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{6.2.3}$$

تمثل انتقال الحرارة داخل سلك رفيع طوله L حيث <u>الشرط الحدي المتجانس</u> (6.2.2) يبين أن درجة حرارة السلك عند $x = 0, \ x = L$ تساوى صفر أما <u>الشرط الابتدائي</u> (6.2.3) يبين توزيع الحرارة على طول السلك عند $t = 0$.

لحل المسالة بفصل المتغيرات نفرض أن $u(x,t) = v(x)w(t)$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية و عمل الفصل نحصل على

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{Dw(t)} = -\lambda^2$$

أو

$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = 0, \quad w'(t) + \lambda^2 D w(t) = 0,$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$v(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$
$$w(t) = Ce^{-\lambda^2 D t}.$$

من الشرط الحدي الأول و الثاني نجد

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow v(0)w(t) = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \Rightarrow A = 0,$$
$$u(L,t) = 0 \Rightarrow v(L)w(t) = 0 \Rightarrow v(L) = 0 \Rightarrow B\sin(\lambda L) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

أي أن

$$v_n(x) = B_n \sin(\lambda_n x), \quad w_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 D t}, \quad n \in \mathbb{N}$$

و يكون

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 D t}\sin(\lambda_n x) \tag{6.2.4}$$

حيث $a_n = B_n C_n, \quad n \in \mathbb{N}$.

باستخدام الشرط الابتدائي (6.2.3) نجد

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x),\quad 0<x<L.$$

حيث

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \qquad (6.2.5)$$

ويكون

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (6.2.6)$$

الصورة (6.2.6) و (6.2.5) تمثل حل المسالة بشرط تقارب المتسلسلة.

ملاحظة:

نلاحظ من صورة الحل (6.2.6) أن $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=0$ و هذا يعنى أن الطاقة الحرارية الابتدائية تتسرب مع مرور الوقت من الأطراف.

نظـــرية 6.2.1

لمعادلة الحرارة

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+f(x,t),\quad 0<x<L,\ t>0,$$

بالشروط الحدية-الابتدائية:

$$u(0,t)=g_1(t),\quad u(L,t)=g_2(t),\qquad t>0,$$

$$u(x,0)=h(x),\qquad 0\le x\le L$$

حل وحيد في $C\left([0,L]\times[0,\infty)\right)$ أن وجد.

البرهـــــان

أفرض أن $v(x,t),\ u(x,t)\in C\left([0,L]\times[0,\infty)\right)$ حلان للمسالة و $w(x,t)=v(x,t)-u(x,t)$

أذن

$$\frac{\partial W(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 W(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\ t>0,$$

$$w(0,t)=W(L,t)=0,\qquad t>0$$

$$W(x,0)=0,\qquad 0<x<L$$

عرف الدالة

$$E(t)=\frac{1}{2D^2}\int_0^L w^2(x,t)dx\ \ge 0$$

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{1}{D^2}\int_0^L w(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial t}dx$$
$$= \int_0^L w(x,t)\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2}dx$$
$$= w(x,t)\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\bigg|_0^L - \int_0^L \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx$$
$$= - - \int_0^L \left(\frac{\partial w(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx \le 0$$

وبما أن $E(0) = 0$ فان $E(t) \le 0$. أذن $E(t) \equiv 0$ مما يقتضى أن $w(x,t) = v(x,t) - u(x,t) = 0$ لان $w(x,t)$ دالة متصلة.

مثـــــال 6.2.1

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 7\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = 3\sin(2x) - 6\sin(5x), \qquad 0 < x < \pi.$$

الحـــل

بمقارنة المثال بالمسالة (6.2.1)-(6.2.3) نجد $D = 7, \ L = \pi$. و يكون الحل على الشكل

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-7n^2 t}\sin(nx)$$

نلاحظ أن هذا الحل يحقق الشروط الحدية.

باستخدام الشرط الابتدائي نجد

$$u(x,0) = 3\sin(2x) - 6\sin(5x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx).$$

بمساواة المعاملات في الطرفين نجد $a_2 = 3, \ a_5 = -6$ و يأخذ الحل الصورة

$$u(x,t) = 3e^{-28t}\sin(2x) - 6e^{-175t}\sin(5x).$$

مثـــــال 6.2.2

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = \begin{cases} x, & 0 < x < \pi/2, \\ \pi - x, & \pi/2 < x < \pi. \end{cases}$$

<u>الحـــل</u>

بمقارنة المثال بالمسالة (6.2.1)-(6.2.3) نجد $D = 2, \ \ L = \pi$. و يكون الحل على الشكل

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2n^2 t} \sin(nx)$$

أيضا نلاحظ أن هذا الحل يحقق الشروط الحدية.

باستخدام الشرط الابتدائي نجد

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx), \quad 0 < x < \pi$$

حيث

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} u(x,0)\sin(nx)dx \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2} x\sin(nx)dx + \int_{\pi/2}^{\pi}(\pi - x)\sin(nx)dx\right] \\ &= \frac{4}{\pi n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & n \text{ even}, \\ \dfrac{4(-1)^{(n-1)/2}}{\pi n^2}, & n \text{ odd}, \end{cases} \end{aligned}$$

و يأخذ الحل الصورة

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\left\{e^{-2t}\sin x - \frac{1}{9}e^{-18t}\sin 3x + \frac{1}{25}e^{-50t}\sin 5x + \cdots\right\}.$$

<u>تمرين (واجب)</u>

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 5\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0,$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = 1 - \cos 2x.$$

مثـــــال 6.2.3

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0<x<L, \; t>0, \tag{6.2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0, \qquad t>0, \tag{6.2.8}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0<x<L. \tag{6.2.9}$$

الحـــل

الشرط الحدي (6.2.8) يعنى أنة لا يوجد انتقال للحرارة من الداخل أو الخارج عند نهايتي السلك (نهايتي السلك معزولة). سوف نحل المسالة و ذلك بطريقة فصل المتغيرات:

افرض أن $u(x,t) = v(x)w(t)$ ثم نعوض في المعادلة التفاضلية و عمل الفصل نحصل على

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(t)}{Dw(t)} = -\lambda^2$$

أو

$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = 0, \quad w'(t) + \lambda^2 D w(t) = 0,$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$v(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$
$$w(t) = Ce^{-\lambda^2 Dt},$$
$$v'(x) = -A\sin(\lambda x) + B\cos(\lambda x).$$

من الشرط الحدي الأول و الثاني نجد

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \Rightarrow v'(0)w(t) = 0 \Rightarrow v'(0) = 0 \Rightarrow B = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \Rightarrow v'(L)w(t) = 0 \Rightarrow v'(L) = 0 \Rightarrow A\sin(\lambda L) = 0$$
$$\Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

أي أن

$$v_n(x) = A_n\cos(\lambda_n x), \quad w_n(t) = C_n e^{-\lambda_n^2 Dt}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

و يكون

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n^2 Dt}\cos(\lambda_n x)$$

حيث $n \in \mathbb{N}_0$, $a_n = A_n C_n$.

باستخدام الشرط الابتدائي (6.2.9) نجد

$$u(x,0)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=f(x),\quad 0<x<L.$$

حيث

$$\begin{aligned} a_0&=\frac{1}{L}\int_0^L f(x)dx,\\ a_n&=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,\quad n\in\mathbb{N}\end{aligned} \tag{6.2.10}$$

ويكون

$$u(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{6.2.11}$$

الصورة (6.2.11) و (6.2.10) تمثل حل المسالة بشرط تقارب المتسلسلة .

ملاحظة:

نلاحظ من صورة الحل (6.2.11) أن $\lim_{t\to\infty}u(x,t)=a_0$ و هذا يعنى أن الطاقة الحرارية الابتدائية تظل ثابتة مع مرور الوقت.

مثـــال 6.2.4

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\ t>0,\\ &\frac{\partial u}{\partial x}(0,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(L,t)=0,\qquad t>0,\\ &u(x,0)=x,\qquad 0<x<L.\end{aligned}$$

الحـــل

كما في المثال السابق نحصل على

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x,t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(n\pi/L)^2Dt}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

باستخدام الشرط الابتدائي نجد

$$u(x,0)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=x,\quad 0<x<L.$$

حيث

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_0^L x\,dx = \frac{L}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L x\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx = \frac{2L\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2\pi^2}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

ويكون

$$u(x,t) = \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2L\left[(-1)^n - 1\right]}{n^2\pi^2}\right]e^{-\frac{n^2\pi^2 D}{L^2}t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

$$= \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}\right]e^{-\frac{(2n-1)^2\pi^2 D}{L^2}t}\cos\left(\frac{(2n-1)\pi}{L}x\right).$$

تمرين

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \qquad t > 0,$$

$$u(x,0) = x, \qquad 0 < x < \pi.$$

مثـــال 6.2.5

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0, \tag{6.2.12}$$

$$u(0,t) = U_1, \quad u(L,t) = U_2, \qquad t > 0, \tag{6.2.13}$$

$$u(x,0) = f(x), \qquad 0 < x < L. \tag{6.2.14}$$

الحــل

الشرط الحدي غير المتجانس (6.2.13) يعنى أن درجات الحرارة في بداية و نهاية السلك ثابتة و لا تساوى صفر.

أفرض أن الحل يعطى على الصورة

$$u(x,t) = v(x) + w(x,t) \tag{6.2.15}$$

حيث أن الدالة $w(x,t)$ و مشتقاتها الجزئية تنعدم عندما الزمن يقترب من الملا نهاية.

بالتعويض من (6.2.15) في (6.2.12) – (6.2.14) نجد

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = Dv''(x) + D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0, \tag{6.2.16}$$

$$v(0) + w(0,t) = U_1, \quad v(L) + w(L,t) = U_2, \quad t > 0, \tag{6.2.17}$$

$$v(x) + w(x,0) = f(x), \quad 0 < x < L. \tag{6.2.18}$$

بجعل $t \to \infty$ في المعادلات (6.2.16)-(6.2.18) نحصل على

$$v''(x) = 0, \quad 0 < x < L,$$

$$v(0) = U_1, \quad v(L) = U_2.$$

بحل المعادلة و استخدام الشروط نحصل على

$$v(x) = U_1 + \frac{(U_2 - U_1)}{L}x \tag{6.2.19}$$

نرى الآن أن الدالة $w(x,t)$ تحقق

$$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0, \tag{6.2.20}$$

$$w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad t > 0, \tag{6.2.21}$$

$$w(x,0) = f(x) - U_1 - \frac{(U_2 - U_1)}{L}x, \quad 0 < x < L. \tag{6.2.22}$$

نعلم أن حل المعادلات (6.2.20)-(6.2.22) يكون على الصورة

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-D(n\pi/L)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

حيث

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L \left[f(x) - U_1 - \frac{(U_2 - U_1)}{L}x \right] \sin(\frac{n\pi}{L}x)dx,$$

ويكون

$$u(x,t) = U_1 + \frac{(U_2 - U_1)}{L}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-D(n\pi/L)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x).$$

مثـــال 6.2.6

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + P(x), \quad 0<x<L, \;\; t>0, \tag{6.2.23}$$

$$u(0,t)=U_1, \quad u(L,t)=U_2, \qquad t>0, \tag{6.2.24}$$

$$u(x,0)=f(x), \qquad 0<x<L. \tag{6.2.25}$$

الحـــل

الدالة $P(x)$ الموجودة في المعادلة التفاضلية (6.2.23) تعنى وجود مصدر للحرارة ولكن لا يعتمد على الزمن، أما الشرط الحدي (6.2.24) يعنى أن درجات الحرارة في بداية و نهاية السلك ثابتة و لا تساوى صفر.

كما في المثال السابق، أفرض أن الحل يعطى على الصورة

$$u(x,t)=v(x)+w(x,t) \tag{6.2.26}$$

حيث أن الدالة $w(x,t)$ و مشتقاتها الجزئية تنعدم عندما الزمن يقترب من الملا نهاية.

بالتعويض من (6.2.26) في (6.2.23) – (6.2.25) نجد

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial t}=Dv''(x)+D\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+P(x), \quad 0<x<L, \;\; t>0, \tag{6.2.27}$$

$$v(0)+w(0,t)=U_1, \quad v(L)+w(L,t)=U_2, \quad t>0, \tag{6.2.28}$$

$$v(x)+w(x,0)=f(x), \qquad 0<x<L. \tag{6.2.29}$$

عندما $t \to \infty$ في المعادلات (6.2.27)-(6.2.29) نحصل على

$$v''(x)=-\frac{1}{D}P(x), \qquad 0<x<L, \tag{6.2.30}$$

$$v(0)=U_1, \qquad v(L)=U_2. \tag{6.2.31}$$

بحل مسالة الشروط الحدية (6.2.30)- (6.2.31) نحصل على (أيجاد الحل المتجانس و الحل الخاص استخدام طريقة المؤثر العكسي)

$$v(x)=\left[U_2-U_1+\int_0^L\left(\int_0^z \frac{1}{D}P(s)ds\right)dz\right]\frac{x}{L}+U_1-\int_0^x\left(\int_0^z \frac{1}{D}P(s)ds\right)dz. \tag{6.2.32}$$

نرى الآن أن الدالة $w(x,t)$ تحقق

(6.2.33) $$\frac{\partial w}{\partial t} = D\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ t > 0,$$

(6.2.34) $$w(0,t) = 0, \quad w(L,t) = 0, \quad t > 0,$$

(6.2.35) $$w(x,0) = f(x) - v(x), \quad 0 < x < L.$$

حيث $v(x)$ تعطى من المعادلة (6.2.32).

نعلم أن حل المعادلات (6.2.33)-(6.2.35) يكون على الصورة

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-D(n\pi/L)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

ويكون

$$u(x,t) = v(x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-D(n\pi/L)^2 t} \sin(\frac{n\pi}{L}x),$$

حيث

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - v(x)] \sin(\frac{n\pi}{L}x) dx.$$

تمرين

أوجد حل مسالة الشروط الابتدائية – الحدية الآتية:

-1

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 4x, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0,$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(\pi,t) = 0, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = \sin x, \quad 0 < x < \pi.$$

-2

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = 3\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + 5, \quad 0 < x < \pi, \ t > 0,$$

$$u(0,t) = 1, \quad u(\pi,t) = 1, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = 1, \quad 0 < x < \pi.$$

6.3 معادلة الحرارة على قضيب في بعددين

إذا كانت لدينا صفيحة مستطيل الشكل لها طول L و عرض W و كانت جوانب الصفيحة الأربع لها درجات حرارة ثابتة تساوى صفرية. المسالة الرياضية التي تصف انتقال الحرارة داخل الصفيحة تعطى بمسالة الشروط الابتدائية الحدية الآتية:

(6.3.1) $$\frac{\partial u}{\partial t} = D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \quad 0 < x < L,\ 0 < y < W,\ t > 0,$$

(6.3.2) $$u(0,y,t) = u(L,y,t) = 0, \quad 0 < y < W,\ t > 0,$$

(6.3.3) $$u(x,0,t) = u(x,W,t) = 0, \quad 0 < x < L,\ t > 0,$$

(6.3.4) $$u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0 < x < L,\ 0 < y < W,$$

باستخدام فصل المتغيرات يمكن أيجاد حل المسالة كما يلي:

أفرض أن

$$u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$$XYT' = D(X''YT + XY''T)$$

بعمل فصل للمتغيرات نجد

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{T'(t)}{DT(t)} = -\lambda^2$$

حيث λ^2 ثابت الفصل الأول. و من هذه المعادلة نحصل على

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{T'(t)}{DT(t)} + \lambda^2 = -\mu^2$$

حيث μ^2 ثابت الفصل الثاني. و من هذه المعادلة نحصل على

$$Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0,$$

$$T'(t) + (\lambda^2 + \mu^2)T(t) = 0.$$

بحل المعادلات نحصل على

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x),$$

$$Y(y) = c_3 \cos(\mu y) + c_4 \sin(\mu y),$$

$$T(t) = c_5 e^{-D(\lambda^2+\mu^2)t}.$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 ثوابت اختيارية تحدد من الشروط المفروضة على المسالة كما يلي:

$$\begin{aligned}
&u(0,y,t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0,\\
&u(x,0,t) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0,\\
&u(L,y,t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \Rightarrow \sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L},\ n \in \mathbb{N},\\
&u(x,W,t) = 0 \Rightarrow Y(W) = 0 \Rightarrow \sin(\mu W) \Rightarrow \mu_m = \frac{m\pi}{W},\ m \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

و تأخذ متتابعة الحلول الصورة

$$u_{nm}(x,y,t) = A_{nm}\ e^{-D\left((n\pi/L)^2+(m\pi/W)^2\right)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right),\ n,m \in \mathbb{N}$$

حيث A_{nm} ثوابت اختيارية.

بأخذ متسلسلة لانهائية مزدوجة من هذه الحلول نحصل على

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\ e^{-D\left((n\pi/L)^2+(m\pi/W)^2\right)t} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right), \tag{6.3.5}$$

باستخدام الشرط (6.3.4) نجد

$$f(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{W}y)$$

بضرب طرفي هذه المعادلة بـالدوال $\sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{q\pi}{W}y\right)$ و إجراء التكامل على x, y نحصل على

$$\begin{aligned}
&\int_0^L\int_0^W f(x,y)\sin(\frac{p\pi}{L}x)\sin(\frac{q\pi}{W}y)dydx\\
&\qquad=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\int_0^L\int_0^W \sin(\frac{p\pi}{L}x)\sin(\frac{q\pi}{W}y)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{W}y)dydx
\end{aligned}$$

باستخدام شروط التعامد نجد جميع التكاملات في جهة اليمين تنعدم فيما عدا عندما $p = m,\ q = n$ ، و يكون

$$\int_0^L\int_0^W f(x,y)\sin(\frac{p\pi}{L}x)\sin(\frac{q\pi}{W}y)dydx = A_{pq}\left(\int_0^L \sin^2(\frac{p\pi}{L}x)dx\right)\left(\int_0^W \sin^2(\frac{q\pi}{W}y)dy\right)$$

$$= A_{pq}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{W}{2}\right) = A_{pq}\left(\frac{LW}{4}\right)$$

و هذا يستلزم

$$A_{nm} = \frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{W}y)dydx, \tag{6.3.6}$$

مثـــال 6.3.1

حل مسالة الشروط الابتدائية الحدية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi,\ t > 0, \tag{6.3.13}$$

$$u(0,y,t) = u(\pi,y,t) = 0,\quad 0 < y < \pi,\ t > 0, \tag{6.3.14}$$

$$u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = 0,\quad 0 < x < \pi,\ t > 0, \tag{6.3.15}$$

$$u(x,y,0) = 6,\quad 0 < x < \pi,\ 0 < y < \pi, \tag{6.3.16}$$

الحـــــل

نعلم مما سبق أن الحل يكون على الصورة

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\ e^{-D\left((n\pi/L)^2+(m\pi/W)^2\right)t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right),$$

حيث

$$A_{nm} = \frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)\sin(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{W}y)dydx,$$

$$D = 4,\ L = W = \pi,\ f(x,y) = 6.$$

ويكون

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} A_{nm}\ e^{-4\left(n^2+m^2\right)t}\sin(nx)\sin(my),$$

$$A_{nm}=\frac{24}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi}\sin(nx)\sin(my)dydx$$
$$=\frac{24}{nm\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\left[1-(-1)^m\right]$$

تمرين

أوجد حل مسالة الشروط الابتدائية - الحدية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ t>0,$$
$$u(0,y,t)=u(\pi,y,t)=0,\quad 0<y<\pi,\ \ t>0,$$
$$u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0,\quad 0<x<\pi,\ \ t>0,$$
$$u(x,y,0)=xy(x-\pi)(y-\pi),\quad 0<x<\pi,\ \ 0<y<\pi,$$

مثـــال 6.3.2

حل مسالة الشروط الابتدائية - الحدية الآتية:

(6.3.7) $$\frac{\partial u}{\partial t}=D\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad 0<x<L,\ 0<y<W,\ t>0,$$

(6.3.8) $$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(L,y,t)=0,\quad 0<y<W,\ \ t>0,$$

(6.3.9) $$u(x,0,t)=u(x,W,t)=0,\quad 0<x<L,\ \ t>0,$$

(6.3.10) $$u(x,y,0)=f(x,y),\quad 0<x<L,\ \ 0<y<W,$$

الحـــــل

باستخدام فصل المتغيرات يمكن أيجاد حل المسالة كما يلي:

أفرض أن
$$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$$XYT'=D(X''YT+XY''T)$$

بعمل فصل للمتغيرات نجد

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = -\frac{Y''(y)}{Y(y)} + \frac{T'(t)}{DT(t)} = -\lambda^2$$

حيث λ^2 ثابت الفصل الأول. و من هذه المعادلة نحصل على

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0,$$

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} = \frac{T'(t)}{DT(t)} + \lambda^2 = -\mu^2$$

حيث μ^2 ثابت الفصل الثاني. و من هذه المعادلة نحصل على

$$Y''(y) + \mu^2 Y(y) = 0,$$

$$T'(t) + (\lambda^2 + \mu^2) T(t) = 0.$$

بحل المعادلات نحصل على

$$X(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x),$$

$$Y(y) = c_3 \cos(\mu y) + c_4 \sin(\mu y),$$

$$T(t) = c_5 e^{-D(\lambda^2+\mu^2)t},$$

$$X'(x) = -c_1 \sin(\lambda x) + c_2 \cos(\lambda x).$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 ثوابت اختيارية تحدد من الشروط المفروضة على المسالة كما يلي:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, t) = 0 \Rightarrow X'(0) = 0 \Rightarrow c_2 = 0,$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(L, y, t) = 0 \Rightarrow X'(L) = 0 \Rightarrow \cos(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda_n = \frac{n\pi}{L},\ n \in \mathbb{N}_0,$$
$$u(x, 0, t) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow c_3 = 0,$$
$$u(x, W, t) = 0 \Rightarrow Y(W) = 0 \Rightarrow \sin(\mu W) \Rightarrow \mu_m = \frac{m\pi}{W},\ m \in \mathbb{N}.$$

و تأخذ متتابعة الحلول الصورة

$$u_{nm}(x,y,t)=A_{nm}\quad e^{-D\left((n\pi/L)^2+(m\pi/W)^2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right),\quad m\in\mathbb{N},\ n\in\mathbb{N}_0$$

حيث A_{nm} ثوابت اختيارية.

بأخذ متسلسلة لانهائية مزدوجة من هذه الحلول نحصل على

$$u(x,y,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\quad e^{-D\left((n\pi/L)^2+(m\pi/W)^2\right)t}\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right),\tag{6.3.11}$$

باستخدام الشرط (6.3.10) نجد

$$f(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\cos(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{W}y)$$

بضرب طرفي هذه المعادلة بـالدوال $\cos\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{q\pi}{W}y\right)$ و إجراء التكامل على x,y نحصل على

$$\begin{aligned}&\int_0^L\int_0^W f(x,y)\cos(\frac{p\pi}{L}x)\sin(\frac{q\pi}{W}y)dydx\\&\quad=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}A_{nm}\int_0^L\int_0^W\cos(\frac{p\pi}{L}x)\sin(\frac{q\pi}{W}y)\cos(\frac{n\pi}{L}x)\sin(\frac{m\pi}{W}y)dydx\,.\end{aligned}$$

باستخدام شروط التعامد نجد جميع التكاملات في جهة اليمين تنعدم فيما عدا عندما $p=m,\ q=n$ ، و يكون

$$\begin{aligned}\int_0^L\int_0^W f(x,y)\cos(\frac{p\pi}{L}x)\sin(\frac{q\pi}{W}y)dydx&=A_{pq}\left(\int_0^L\cos^2(\frac{p\pi}{L}x)dx\right)\left(\int_0^W\sin^2(\frac{q\pi}{W}y)dy\right)\\&=\begin{cases}A_{pq}\left(\dfrac{LW}{4}\right), & p\neq 0,\\[2mm] A_{pq}\left(\dfrac{LW}{2}\right), & p=0.\end{cases}\end{aligned}$$

و هذا يستلزم

$$\begin{aligned}A_{0q}&=\frac{2}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)\sin(\frac{q\pi}{W}y)dydx\,,\qquad q\in\mathbb{N},\\A_{pq}&=\frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)\cos(\frac{p\pi}{L}x)\sin(\frac{q\pi}{W}y)dydx\,,\qquad p,q\in\mathbb{N}.\end{aligned}\tag{6.3.12}$$

ويعطى حل المسالة (6.3.7)-(6.3.10) بالصورة (6.3.11) و (6.3.12) .

تمرين

حل مسالة الشروط الابتدائية - الحدية الآتية:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),\quad 0<x<\pi,\ 0<y<\pi,\ t>0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,y,t)=\frac{\partial u}{\partial x}(\pi,y,t)=0,\quad 0<y<\pi,\quad t>0,$$

$$u(x,0,t)=u(x,\pi,t)=0,\quad 0<x<\pi,\quad t>0,$$

$$u(x,y,0)=f(x,y),\quad 0<x<\pi,\quad 0<y<\pi,$$

حيث

i) $f(x,y)=\cos 6x\ \sin 4y-3\cos x\ \sin 11y$,
ii) $f(x,y)=y$.

شكل الحل في الحالتين على الترتيب هو:

$$u(x,y,t)=e^{-52t}\cos 6x\ \sin 4x-3e^{-122t}\cos x\ \sin 11y,$$

$$u(x,y,t)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}e^{-n^2 t}\sin ny.$$

6.4 معادلة الحرارة على قضيب غير محدود

أفرض أن قضيب طوله لانهائي درجة حرارته الابتدائية $f(x)$ ، $-\infty<x<\infty$. مسالة الشروط الابتدائية التي تحدد درجة الحرارة $u(x,t)$ في القضيب هي:

(6.4.1) $$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2},\qquad -\infty<x<\infty,\quad t>0,$$

(6.4.2) $$u(x,0)=f(x),\qquad -\infty<x<\infty.$$

$$|u(x,t)|\quad \text{bounded}\quad \text{as}\ x\to\pm\infty$$

باستخدام طريقة فصل المتغيرات كما سبق وذلك بفرض أن $u(x,t)=v(x)w(t)$ و اختيار ثابت الفصل λ^2 بحيث تكون الدالة $v(x)$ محدودة نحصل على

$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = 0, \qquad -\infty < x < \infty$$
$$w'(t) + \lambda^2 D w(t) = 0, \qquad t > 0.$$

ويكون

$$v(x) = A\cos(\lambda x) + B\sin(\lambda x),$$
$$w(t) = e^{-\lambda^2 Dt}.$$

و نحصل على حل للمسالة على شكل التكامل

$$u(x,t) = \int_0^\infty e^{-D\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right]d\lambda \tag{4.6.3}$$

حيث $A(\lambda),\ B(\lambda)$ تحدد من الشروط الابتدائية كما يلي:

$$f(x) = \int_0^\infty \left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin(\lambda x)\right]d\lambda, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{4.6.4}$$

من نظرية تكامل فوريير نستنتج

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda\xi)d\xi, \qquad B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin(\lambda\xi)d\xi.$$

أذن

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-D\lambda^2 t}\left[\left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda\xi)d\xi\right)\cos\lambda x + \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin(\lambda\xi)d\xi\right)\sin(\lambda x)\right]d\lambda \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left(\int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(\xi)\left[\cos(\lambda\xi)\cos\lambda x + \sin(\lambda\xi)\sin(\lambda x)\right]\Big)d\xi e^{-D\lambda^2 t}\right)d\lambda \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty\int_{-\infty}^{\infty}\Big(f(\xi)\left[\cos[\lambda(\xi - x)]\right]\Big)d\xi\ e^{-D\lambda^2 t}d\lambda \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\int_0^\infty\left[\cos[\lambda(\xi - x)]\right]\ e^{-D\lambda^2 t}d\lambda\ d\xi
\end{aligned}$$

يمكن حساب التكامل الداخلي باستخدام التكامل المركب (تمرين)

$$\int_0^\infty\left[\cos[\lambda(\xi - x)]\right]\ e^{-D\lambda^2 t}d\lambda = \sqrt{\frac{\pi}{4Dt}}\exp\left(\frac{-(\xi - x)^2}{4Dt}\right), \quad t > 0.$$

و يعطى حل المسالة في صورة تكامل وحيد على الشكل

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\ \exp\left(\frac{-(\xi - x)^2}{4Dt}\right)d\xi. \tag{4.6.5}$$

تعريف

تعرف دالة الخطاء و يرمز لها بالرمز

$$erf(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-p^2)dp \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

من الواضح أن

$$erf(0) = 0, \quad \lim_{x \to \infty} erf(x) = 1, \quad erf(-x) = -erf(x)$$

مثـــــال 4.6.1

أوجد حل مسالة الشروط الابتدائية الآتية:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \qquad -\infty < x < \infty, \quad t > 0,$$

$$u(x,0) = f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < a, \\ 0, & |x| > a. \end{cases}$$

الحـــل

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-a}^{a} \exp\left(\frac{-(\xi - x)^2}{4Dt}\right) d\xi.$$

بأخذ التعويض $p = \frac{(\xi - x)}{2\sqrt{Dt}}$ نحصل على

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \int_{-a}^{a} \exp\left(\frac{-(\xi - x)^2}{4Dt}\right) d\xi \\ &= \frac{1}{2}\left[erf\left(\frac{a+x}{2\sqrt{Dt}}\right) - erf\left(\frac{a-x}{2\sqrt{Dt}}\right)\right] \end{aligned}$$