الفصل الثاني

معادلة الرتبة الأولى (Linear first order equation)

2.1 : المعادلة الخطية:

الصورة العامة لمعادلة الرتبة الأولى الخطية في متغيرين $x,\ y$ تعطى بالصورة الآتية:

$$A(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}+B(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}+C(x,y)u=f(x,y) \tag{2.1.1}$$

حيث $u(x,y)$، $x,\ y\in\Omega$ و الدوال $A(x,y),\ B(x,y),\ C(x,y)$ تنتمي إلى $C^1(\Omega)$.

يمكن كتابة المعادلة (2.1.1) على الصورة الآتية:

$$\left(A\frac{\partial}{\partial x}+B\frac{\partial}{\partial y}+C\right)u(x,y)=f(x,y) \tag{2.1.2}$$

أو

$$Lu(x,y)=f(x,y) \tag{2.1.3}$$

حيث $L=\left(A\frac{\partial}{\partial x}+B\frac{\partial}{\partial x}+C\right)$ مؤثر تفاضلي خطى (Linear differential operator).

تعريـــــف

يسمى السطح (x,y,u) في $\mathbb{R}^3$ الذي يتولد من الحل u *سطحا تكامليا* للمعادلة.

الحل العام للمعادلة (2.1.3) هو مجموع الحل المتجانس u_h الذي يحقق المعادلة $Lu_h=0$ و أي حل أخر يحقق المعادلة $Lu_p=f$. أي أن $u=u_h+u_p$.

مع التغير في الحل المتجانس u_h نجد أن المعادلة $Lu=f$ يتولد منها مجموعة غير منتهية من السطوح التكاملية، و كل سطح يتحدد باختيار الحل المتجانس u_h.

مثال 2.1.1

$$u_x+ku=x^2,\qquad k=\text{const.}\neq 0$$

الحــــــل:

للحصول على الحل الخاص للمعادلة، نفرض أن $u(x,y)=ax^2+bx+c$ حيث a,b,c ثوابت. بالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل على a,b,c و يكون الحل الخاص على الصورة:

$$u_p(x,y)=\frac{1}{k}x^2-\frac{2}{k^2}x+\frac{2}{k^3}.$$

للحصول على الحل المتجانس للمعادلة، نضرب طرفي المعادلة في e^{kx} لنحصل على:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(e^{kx}u\right) = 0$$

بأجراء التكامل بالنسبة ل x نحصل على:

$$e^{kx}u(x, y) = f(y)$$

حيث f دالة اختيارية في y أي أن

$$u_h(x, y) = e^{-kx}f(y)$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$u(x, y) = e^{-kx}f(y) + \frac{1}{k}x^2 - \frac{2}{k^2} + \frac{2}{k^3}.$$

مع كل اختيار للدلة $f(y)$ نحصل على سطح تكاملي للمعادلة التفاضلية.

مثال 2.1.2

أوجد الحل العام للمعادلة

$$Au_x + Bu_y + Cu = 0 \tag{2.1.4}$$

حيث A, B, C ثوابت تحقق $A^2 + B^2 \neq 0$ ، $f(x, y) \in C^1(\Omega)$.

الحـــــل:

يمكن كتابة المعادلة (2.1.4) في صورة بسيطة وذلك بعمل تبديل للمتغيرات باستخدام التحويل الخطى التالي:

$$\begin{aligned} \xi(x, y) &= c_{11}x + c_{12}y \\ \eta(x, y) &= c_{21}x + c_{22}y \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

وحيث أن $u = u(x, y)$ ، باستخدام قاعدة السلسلة في التفاضل الجزئي و التحويل (2.1.5) نحصل على:

$$\begin{aligned} u_x &= c_{11}u_\xi + c_{21}u_\eta, \\ u_y &= c_{12}u_\xi + c_{22}u_\eta. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

بالتعويض من (2.1.6) في (2.1.4) نحصل على:

$$\left(Ac_{11} + Bc_{12}\right)u_\xi + \left(Ac_{21} + Bc_{22}\right)u_\eta + Cu = 0$$

بفرض أن $A \neq 0$ و باختيار $c_{11} = 1,\ c_{12} = 0,\ c_{21} = B,\ c_{22} = -A$ لكي نتخلص من معامل u_η نجد أن:

$$\begin{aligned} \xi &= x, \\ \eta &= Bx - Ay \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

و تتحول المعادلة (2.1.4) إلى الصورة

$$Au_{\xi} + Cu = 0$$

أي أن

$$u_{\xi} + \frac{C}{A}u = 0, \qquad A \neq 0 \tag{2.1.8}$$

بضرب طرفي المعادلة في $e^{\frac{C}{A}\xi}$ نحصل على

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(e^{\frac{C}{A}\xi}u(\xi,\eta)\right) = 0$$

بإجراء التكامل بالنسبة لـ ξ نجد

$$u(\xi,\eta) = e^{-\frac{C}{A}\xi} f(\eta) \tag{2.1.9}$$

أي أن حل المعادلة (2.1.4) يكون على الصورة

$$u(x,y) = e^{-\frac{C}{A}x} f(Bx - Ay) \tag{2.1.10}$$

حيث f دالة اختياريه في C^1.

أما إذا كان $A = 0$ فان $B \neq 0$ و نحصل على الحل في الصورة

$$u(x,y) = e^{-\frac{C}{B}y} f(x)$$

من تطبيق المثال (2.1.1) على المعادلة (2.1.4) في صورتها الأصلية.

يمكن إيجاد حلا للمعادلة (2.1.4) عندما يكون $A = A(x,y), \;\; B = B(x,y), \;\; C = C(x,y)$ و ذلك باستخدام التحويل

$$\xi = \xi(x,y), \quad \eta = \eta(x,y) \tag{2.1.11}$$

حيث

$$J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \end{vmatrix} \neq 0$$

على الصورة الآتية

$$u(\xi,\eta) = e^{-\int \frac{C(\xi,\eta)}{A(\xi,\eta)} d\xi}.$$

لكننا لن نتبع هذه الطريق لان المعادلة الخطية

$$A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = 0$$

حالة خاصة من المعادلة شبة الخطية التي سنعالجها في البند التالي.

<u>2.2 : المعادلة شبه الخطية (طريقة لاجرانج)</u>

<u>Quasi-linear first order equation (Lagrange method):</u>

الصورة العامة للمعادلة شبه الخطية هي:

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u) \tag{2.2.1}$$

لإيجاد حل المعادلة (2.2.1) سوف نستخدم طريقة لاجرانج.

ليكن $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ (نطاق)، $P,\ Q,\ R\in C^1(\Omega)$ بحيث $P\neq 0,\quad Q\neq 0$. ليكن Ω_0 هو مسقط Ω على المستوى $u=0$.

أي أن:

$$\Omega_0=\{(x,y):\exists\, u,\ (x,y,u)\in\Omega\}.$$

يقال أن $u=\varphi(x,y)$ حيث $\varphi\in C(\Omega_0)$ حلا للمعادلة (2.2.1) إذا كان

$$P(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial x}+Q(x,y,\varphi(x,y))\frac{\partial\varphi}{\partial y}=R(x,y,\varphi(x,y))\quad\forall(x,y)\in\Omega_0$$

وكان

$$(x,y,\varphi(x,y))\in\Omega\qquad\forall(x,y)\in\Omega_0$$

بهذه المعطيات سوف نبين في البند (2.3) أن للمعادلة (2.2.1) حلا، بل مجموعة غير منتهية من الحلول. و لكن ذلك قد لا يتحقق إذا خففنا الشروط المذكورة، كأن نكتفي باتصال الدوال $P,\ Q,\ R$ على سبيل المثال.

<u>طريقة لاجرانج</u>

من المعادلة (2.2.1) نكون المعادلة الآتية:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{R} \tag{2.2.2}$$

التي تسمى المعادلات ألمساعده (subsidiary equation) و تكافئ نظام المعادلات التالي:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q}{P},\qquad\frac{du}{dx}=\frac{R}{P} \tag{2.2.3}$$

حيث x هو المتغير المستقل.

الحل العام للنظام (2.2.3) يكون على الصورة

$$y = y(x, c_1, c_2), \qquad u = u(x, c_1, c_2) \tag{2.2.4}$$

حيث $c_1,\ c_2$ ثوابت اختيارية.

بحل المعادلات (2.2.4) بالنسبة لـ $c_1,\ c_2$، يمكن كتابة الحل العام للمعادلات المساعدة (2.2.3) على الشكل

$$v(x, y, u) = c_1, \qquad w(x, y, u) = c_2 \tag{2.2.5}$$

العلاقات (2.2.5) عبارة عن سطوح تكاملية للمعادلات المساعدة (2.2.2) في النطاق Ω. سنفترض أن الدوال $v,\ w$ مستقلة خطيا في Ω ، مما يستوجب أن تكون دوال الجكوبيان الآتية

$$\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)},\quad \frac{\partial(v,w)}{\partial(x,u)},\quad \frac{\partial(v,w)}{\partial(y,u)}$$

ليست جميعها أصفار عند أي نقطة في Ω. عندئذ يكون الحل العام للمعادلة شبة الخطية (2.2.1) يعطى بالعلاقة:

$$F(v,w) = 0 \quad \text{or} \quad v = f(w) \quad \text{or} \quad w = g(v)$$

حيث $F,\ f,\ g$ دوال اختيارية.

<u>نظرية (2.2.1)</u>

الحل العام للمعادلة شبة الخطية (2.2.1) هو

$$F(v,w) = 0 \tag{2.2.6}$$

حيث F داله اختيارية في C^1 و السطوح

$$v(x, y, u) = c_1, \qquad w(x, y, u) = c_2 \tag{2.2.7}$$

تشكل حلولا للمعادلتين

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{du}{R} \tag{2.2.8}$$

<u>سوف نعطى أمثلة عديدة لتبين طريقة استخدام طريقة لاجرانج.</u>

<u>مثال (2.2.1)</u>

حل المعادلة

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - xy \frac{\partial u}{\partial y} + u = 0 \tag{2.2.9}$$

المعادلة (2.2.9) معادلة تفاضلية خطية ذات معاملات متغيرة

الحـــــل:

بمقارنة المعادلة (2.2.9) بالصورة العامة للمعادلة شبة الخطية نجد:

$$P(x,y,u)=x^2 \quad ,Q(x,y,u)=-xy, \quad R(x,y,u)=-u$$

المعادلات المساعدة تأخذ الصورة:

$$\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{-xy}=\frac{du}{-u} \qquad (2.2.10)$$

المعادلات المكافئة للمعادلات المساعدة تأخذ الصورة :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx}&=-\frac{y}{x}, \\ \frac{du}{dx}&=-\frac{u}{x^2} \end{aligned} \qquad (2.2.11)$$

بإجراء التكامل للمعادلة الأولى في (2.2.11) نحصل على

$$v(x,y,u)=xy=c_1 \qquad (2.2.12)$$

بإجراء التكامل للمعادلة الثانية في (2.2.11) نحصل على

$$w(x,y,u)=e^{-\frac{1}{x}}u=c_2 \qquad (2.2.13)$$

$$J_1=\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}u & 0 \end{vmatrix}=-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}u\neq 0,$$

$$J_2=\frac{\partial(v,w)}{\partial(x,u)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial u} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y & x \\ \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}u & e^{-\frac{1}{x}} \end{vmatrix}=\left(ye^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}}u\right)\neq 0,$$

$$J_3=\frac{\partial(v,w)}{\partial(y,u)}=\begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial u} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial u} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x & 0 \\ 0 & e^{-\frac{1}{x}} \end{vmatrix}=\left(xe^{-\frac{1}{x}}\right)\neq 0.$$

كل الجاكوبيان مختلفة عن الصفر و علية يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (2.2.9) على الصورة الآتية:

$$F(v,w)=F(xy,e^{-\frac{1}{x}}u) \qquad (2.2.14)$$

حيث F دالة اختيارية في متغيرين.

يمكن كتابة الحل (2.2.14) على أحدى الصورتين:

$$u = e^{\frac{1}{x}} f(xy) \quad \text{or} \quad xy = g(e^{-\frac{1}{x}} u)$$

حيث f, g دوال اختيارية. و بالا مكان التحقق من صحة الحل بالتعويض فى المعادلة (2.2.9).

<u>مثال (2.2.2)</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$$xu\frac{\partial u}{\partial x} + yu\frac{\partial u}{\partial y} = -(x^2 + y^2) \tag{2.2.15}$$

<u>الحـــــل:</u>

بمقارنة المعادلة (2.2.15) بالصورة العامة للمعادلة شبة الخطية نجد:

$$P(x, y, u) = xu \quad ,Q(x, y, u) = yu, \quad R(x, y, u) = -(x^2 + \mathrm{y}^2)$$

المعادلات المساعدة تأخذ الصورة:

$$\frac{dx}{xu} = \frac{dy}{uy} = \frac{du}{-(x^2 + y^2)} \tag{2.2.16}$$

المعادلات المكافئة للمعادلات المساعدة تأخذ الصورة :

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{y}{x}, \\ \frac{du}{dx} &= -\frac{(x^2 + y^2)}{xu} \end{aligned} \tag{2.2.17}$$

بإجراء التكامل للمعادلة الأولى في (2.2.17) نحصل على

$$v(x, y, u) = \frac{y}{x} = c_1 \tag{2.2.18}$$

بالتعويض من المعادلة (2.2.18) في المعادلة الثانية في (2.2.14) و إجراء التكامل نحصل على

$$w(x, y, u) = \left(1 + \frac{y^2}{x^2}\right) x^2 + u^2 = x^2 + y^2 + u^2 = c_2 \tag{2.2.19}$$

و يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية (2.2.15) على الصورة

$$F(\frac{y}{x}, x^2+y^2+u^2)=0 \tag{2.2.20}$$

حيث F دالة اختيارية في متغيرين.

يمكن كتابة الحل (2.2.20) على أحدى الصورتين:

$$x^2+y^2+u^2=f(\frac{y}{x}) \quad \text{or} \quad \frac{y}{x}=g(x^2+y^2+u^2).$$

حيث $f,\ g$ دوال اختيارية. و بالا مكان التحقق من صحة الحل بالتعويض في المعادلة (2.2.15).

ملاحظة هامة:

نعلم من دراستنا للجبر أنة إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}$ ، فان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{\lambda a+\mu c+\nu e}{\lambda b+\mu d+\nu f}$ لقيم اختيارية لـ $\lambda,\ \mu,\ \nu$. و بناء على ذلك يمكن كتابة المعادلة (2.2.2) على الصورة الآتية:

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{R}=\frac{\lambda dx+\mu dy+\nu du}{\lambda P+\mu Q+\nu R}$$

لقيم اختيارية لـ $\lambda,\ \mu,\ \nu$. و بهذه الطريقة يمكن تكوين المعادلات التفاضلية ذات الصلة، بعض هذه المعادلات يمكن إيجاد حلولها مباشرة. خاصة إذا تم اختيار $\lambda,\ \mu,\ \nu$ بحيث $\lambda P+\mu Q+\nu R=0$ فأنة يجب آن يكون $\lambda dx+\mu dy+\nu du=0$. إذا وجدت دالة $v=v(x,y,u)$ بحيث $dv=\lambda dx+\mu dy+\nu du=0$ فان $v(x,y,u)=c_1$ تكون حل للمعادلات المساعدة.

مثال (2.2.3)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(y-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(y+x)\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2+y^2}{u}$$

الحـــــل:

المعادلات ألمساعده هي

$$\frac{dx}{(y-x)}=\frac{dy}{(y+x)}=\frac{udu}{(x^2+y^2)}$$

حيث $P=(y-x),\ Q=(y+x),\ R=\frac{(x^2+y^2)}{u}$.

من الملاحظ أن $P+Q=2y$ و علية يمكن اختيار $\lambda=\mu=1,\ \ \nu=0$ بحيث

$$\frac{dx+dy}{2y}=\frac{dy}{(y+x)}\Rightarrow (y+x)(dx+dy)=2ydy$$

ويكون التكامل الأول على الصورة

$$v(x,y,u)=x^2+xy-y^2=c_1$$

حيث أن

$$\frac{xdx-ydy+udu}{xP-yQ+uR}=\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{du}{R}$$

ومن الملاحظ أن $xP-yQ+uR=0$ و علية يكون $xdx-ydy+udu=0$ و يأخذ التكامل الثاني الصورة

$$w(x,y,u)=x^2-y^2+u^2=c_2$$

و يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية على الصورة

$$F(x^2+xy-y^2,\ x^2+u^2-y^2)=0$$

حيث F دالة اختيارية.

<u>مثال (2.2.4)</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(u^2-2yu-y^2)\frac{\partial u}{\partial x}+(xy+xu)\frac{\partial u}{\partial y}=xy-xu$$

<u>الحـــــل:</u>

المعادلات ألمساعده هي

$$\frac{dx}{(u^2-2yu-y^2)}=\frac{dy}{(xy+xu)}=\frac{du}{(xy-xu)}$$

حيث $P=(u^2-2yu-y^2),\ Q=(xy+xu),\ R=(xy-xu)$.

من المعادلات المساعدة نجد

$$\frac{du}{dy}=\frac{y-u}{y+u}\Rightarrow(y+u)du=(y-u)dy\Rightarrow d(yu)+udu-ydy=0$$

$$\Rightarrow yu+\frac{u^2}{2}-\frac{y^2}{2}=\frac{c_1}{2}\Rightarrow u^2+2yu-y^2=c_1$$

ويكون التكامل الأول على الصورة

$$v(x,y,u)=u^2+2uy-y^2=c_1$$

ومن الملاحظ أن $xP+yQ+uR=0$ و علية يكون $xdx+ydy+udu=0$ و يأخذ التكامل الثاني الصورة

$$w(x,y,u)=x^2+y^2+u^2=c_2$$

و يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية على الصورة

$$F(u^2+2uy-y^2,\ x^2+u^2+y^2)=0$$

حيث F دالة اختيارية.

نظرية (2.2.2) (بدون برهان)

الحل العام للمعادلة شبة الخطية

$$P_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+P_2\frac{\partial u}{\partial x_2}+\cdots+P_n\frac{\partial u}{\partial x_n}=R$$

حيث $(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)\in\Omega\subset\mathbb{R}^{n+1}$, $P_i,R\in C^1(\Omega)$, $i=1,2,\cdots n$ هو

$$F(v_1,v_2,\cdots,v_n)=0$$

حيث $F\in C^1$ دالة اختيارية و الدوال

$$v_i(x_1,x_2,\cdots,x_n,u)=c_i,\quad 1\le i\le n$$

حلول مستقلة للمعادلات المساعدة

$$\frac{dx_1}{P_1}=\frac{dx_2}{P_2}=\cdots=\frac{dx_n}{P_n}=\frac{du}{R}$$

حيث c_i ثوابت اختيارية.

مثال (2.2.5)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(y-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x-y)\frac{\partial u}{\partial z}=0$$

الحـــــل:

المعادلات المساعدة

$$\frac{dx}{(y-z)}=\frac{dy}{(z-x)}=\frac{dz}{(x-y)},\quad du=0$$

و منها نحصل على

$$\begin{aligned}&du=0,\\&dx+dy+dz=0,\\&xdx+ydy+zdz=0\end{aligned}$$

بأجراء التكامل للمعادلات نحصل على

$$\begin{aligned}&v_1(x,y,z,u)=u=c_1,\\&v_2(x,y,z,u)=x+y+z=c_2,\\&v_3(x,y,z,u)=x^2+y^2+z^2=c_3.\end{aligned}$$

و يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية على الصورة

$$F(u, x+y+z,\ x^2+u^2+y^2)=0$$

حيث F دالة اختيارية.

يمكن أيضا كتابة الحل على الصورة الآتية

$$u=f(x+y+z, x^2+y^2+z^2)$$

حيث f دالة اختيارية.

<u>مثال (2.2.6)</u>

أوجد الحل العام للمعادلة

$$(x+z)\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}-2\frac{\partial u}{\partial z}=4e^z$$

<u>الحـــــل:</u>

المعادلات المساعدة

$$\frac{dx}{(x+z)}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{-2}=\frac{du}{4e^z}$$

حيث $P_1=(x+y),\ P_2=y,\ P_3=-2,\ R=4e^z$.

من المعادلات ألمساعده نحصل على

$$\frac{du}{dz}=-2e^z \Rightarrow v_1(x,y,z,u)=u-2e^z=c_1,$$
$$\frac{dz}{dy}=\frac{-2}{y} \Rightarrow v_2(x,y,z,u)=z+2\ln(y)=c_2,$$
$$\frac{dz}{dx}=\frac{-2}{x+z} \Rightarrow v_3(x,y,z,u)=z+2\ln(x+z-2)=c_3.$$

و يكون الحل العام على الصورة

$$F(u-2e^z, z+2\ln(y), z+2\ln(x+z-2))=0$$

يمكن كتابة الحل على الصورة

$$u=f(z+2\ln(y), z+2\ln(x+z-2))+2e^z$$

<u>2.3 مسألة كوشي للمعادلة شبة الخطية من الرتبة الأولى</u>

نعلم من نظرية المعادلات التفاضلية العادية أن المعادلة التفاضلية شبة الخطية من الرتبة الأولى $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$ تحت الشرط $y(x_0) = y_0$ يكون لها حل وحيد $y(x)$ في جوار النقطة x_0 إذا كان كل من $f, \frac{\partial f}{\partial y}$ دوال متصلة على مستطيل مغلق يحتوى (x_0, y_0) كنقطة داخلية.

و بالمثل هناك مسألة مناظرة، تسمى **<u>مسألة كوشي</u>** في المعادلات التفاضلية الجزئية. في حالة المعادلات ذات الرتبة الأولى في متغيرين، يكون المطلوب إيجاد حل المعادلة، و هو سطح في $\mathbb{R}^3$، يمر بمنحنى معين $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$.

<u>مثال (2.3.1)</u>

أوجد حل المعادلة

$$u(3u+1)\frac{\partial u}{dx} + u(3u+1)\frac{\partial u}{dy} = x + y$$

الذي يمر بالدائرة $x^2 + y^2 = 1$ في المستوى $u = 1$.

<u>الحـــــل:</u>

المعادلات المساعدة

$$\frac{dx}{u(3u+1)} = \frac{dy}{u(3u+1)} = \frac{du}{(x+y)}$$

حيث $P = u(3u+1),\ Q = u(3u+1),,\ R = (x+y)$.

من المعادلات المساعدة نجد

$$\frac{du}{dy} = 1 \Rightarrow (y - x) = c_1$$

ويكون التكامل الأول على الصورة

$$v(x,y,u) = (y - x) = c_1$$

ومن الملاحظ أن

$$\frac{xdx + ydy}{xu(3u+1) + yu(3u+1)} = \frac{du}{(x+y)}$$
$$\Rightarrow xdx + ydy = u(3u+1)du$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = u^3 + \frac{u^2}{2} + \frac{c_2}{2}$$

و يأخذ التكامل الثاني الصورة

$$w(x,y,u)=x^2+y^2-2u^3-u^2=c_2$$

و يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية على الصورة

$$F(y-x,\ x^2+y^2-2u^3-u^2)=0$$

حيث F دالة اختيارية.

يمكن كتابة الحل على الصورة

$$x^2+y^2-2u^3-u^2=f(y-x)$$

حيث f دالة اختيارية

عندما $u=1$ فان

$$x^2+y^2=3+f(x-y)$$

و عندما $x^2+y^2=1$ فان

$$f(y-x)=-2$$

إذا الحل الذي يحقق الشروط، أي يمر بالمنحنى Γ، هو

$$x^2+y^2=2u^3+u^2-2\ .$$

مثال (2.3.2)

أوجد حل المعادلة

$$y\frac{\partial u}{dx}-x\frac{\partial u}{dy}=0$$

الذي يمر بالمنحنى $y=0\ ,\ u=x^4$.

الحـــــل:

المعادلات المساعدة

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{-x},\quad du=0$$

بأجراء التكامل للمعادلات نحصل على

$$v(x,y,u)=u=c_1,$$
$$w(x,y,u)=x^2+y^2=c_2$$

و يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية الجزئية على الصورة

$$F(u,x^2+y^2)=0$$

حيث F دالة اختيارية.

يمكن أيضا كتابة الحل على الصورة الآتية

$$u = f(x^2 + y^2)$$

حيث f دالة اختيارية.

عندما $y = 0$ فان $u = f(x^2)$
عندما $u = x^4$ فأن $f(x^2) = x^4$

إذا الحل الذي يحقق الشروط، أي يمر بالمنحنى $u = x^4$, $y = 0$. ، هو

$$u = (x^2 + y^2)^2 .$$

<u>مثـــال (2.3.3)</u>

أوجد حل المعادلة (السطح التكاملي)

$$(y + xu)\frac{\partial u}{dx} + (x + yu)\frac{\partial u}{dy} = u^2 - 1$$

الذي يمر بالمنحنى $x = t,\ y = 1,\ u = t^2$.

<u>الحــــــل:</u>

المعادلات المساعدة هي

$$\frac{dx}{y + xu} = \frac{dy}{x + y} = \frac{du}{u^2 - 1}$$

من المعادلات ألمساعده نحصل على

$$\frac{dx + dy}{x + y} = \frac{du}{u - 1} \Rightarrow v(x, y, u) = \frac{u - 1}{x + y} = c_1,$$
$$\frac{dx - dy}{x - y} = \frac{du}{u + 1} \Rightarrow w(x, y, u) = \frac{u + 1}{x - y} = c_2.$$

أي أن

$$v(x, y, u) = \frac{t^2 - 1}{t + 1} = c_1,$$
$$w(x, y, u) = \frac{t^2 + 1}{t - 1} = c_2.$$

من المعادلة الأولى نحصل على $t = c_1 + 1$. بالتعويض في المعادلة الثانية نجد،

$$(c_1 + 1)^2 = c_1 c_2 - 1$$

و يكون الحل العام للمعادلة على الصورة

$$\left(\frac{u-1+x+y}{x+y}\right)^2+1=\frac{u^2-1}{x^2-y^2}$$

نظرية (2.3.1) (نظرية وجود و وحدانية الحل)

أفرض أن Ω نطاق في $\mathbb{R}^3$ وأن Ω_0 مسقط Ω على المستوى $u=0$. إذا كانت المعادلة شبة الخطية

$$P(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial x}+Q(x,y,u)\frac{\partial u}{\partial y}=R(x,y,u)$$

و المنحنى

$$\Gamma=\{(x,y,u)\in\Omega : x=f(s),\ y=g(s),\ u=h(s),\ s\in[a,b]\}$$

تحقق الشروط التالية

(i) $P\neq 0,\ Q\neq 0,\ R\in C^1(\Omega)$

(ii) $f,\ g,\ h\in C^1(a,b)$ و الدوال f^{-1},g^{-1},h^{-1} موجودة

(iii) $f'(s)\neq 0,\ g'(s)\neq 0$ على الفترة (a,b)

(iv) يوجد نقطة $(x_0,y_0,u_0)=(f(s_0),g(s_0),h(s_0))$ على Γ حيث

$$\left(P(x_0,y_0,u_0)g'(s_0)-Q(x_0,y_0,u_0)f'(s_0)\right)\neq 0$$

فان للمعادلة حل وحيد $u=u(x,y)$ في جوار النقطة $(x_0,y_0)\in\Omega_0$ بحيث $h(s)=u(f(s),g(s))$ في جوار النقطة s_0.

لبرهان هذه النظرية أنظر (Dennemeyr).

ملاحظات:

(1) الشرط (iv) يعنى أن المنحنى Γ ليس منحنيا ذاتيا للمعادلة. عندما يكون Γ منحنيا ذاتيا فقد يكون للمسألة أكثر من حل.

(2) تسمى النقطة (x_0,y_0,u_0) و الدوال $f,\ g,\ h$ التي تحدد المنحنى Γ بيانات كوشي (Cauchy data) و هي تعطى في المسألة.

في كثير من التطبيقات يمثل المتغير y الزمن، ويكون $\Gamma=\{(s,0,h(s):s\in[a,b]\}$ و من الطبيعي عندئذ أن يطلق على مسألة كوشي *المسألة الابتدائية* (Initial Value Problem (IVP)) ، حيث نبحث عن حل المعادلة $Pu_x+Qu_y=R$ الذي يحقق المساواة $u(x,0)=h(x)$ حيث h دالة معلومة. و تسمى المسألة حدية (Boundary Value Problem (BVP)) إذا كان y متغير الموقع المكاني.

مثـــــال (2.3.4)

أوجد حل المعادلة

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial y} + k\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \\ &u(x,0) = \sin(x) \end{aligned} \qquad \text{(IVP)}$$

الحـــــل:

الحل العام للمعادلة هو

$$u(x, y) = f(x - y)$$

حيث f دالة اختيارية. بتطبيق الشرط الابتدائي نحصل على

$$\begin{aligned} &u(x,0) = f(x) = \sin(x) \\ &\Rightarrow u(x, y) = \sin(x - ky) \end{aligned}$$