الفصل الثالث

المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية ذات الرتبة الثانية فى متغيرين

3.1 تصنيــف المعـــادلات

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية في متغيرين مستقلين x, y هي:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \tag{3.1.1}$$

حيث $A, B, C, \cdots, F \in C^2(\Omega)$ دوال في $x\,,\ y$ ، $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

باستخدام الرموز

$$D_x = \frac{\partial}{\partial x},\ D_y = \frac{\partial}{\partial y},\ D_x^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ D_y^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2},\ D_x D_y = \frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y},\cdots,$$

يمكن كتابة المعادلة (3.1.1) على الصورة المبسطة

$$Lu(x,y) = G(x,y) \tag{3.1.2}$$

حيث

$$L = AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2 + DD_x + ED_y + F \tag{3.1.3}$$

مؤثر خطى تفاضلي من الرتبة الثانية .

يسمى الجزء $AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2$ ***الجزء الرئيسى*** **(principle part)** للمؤثر L ، و هو الذي يبنى علية تصنيف المعادلة (3.1.1)

تسمى الدالة

$$\Delta(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y) \tag{3.1.4}$$

بمميز(discriminate) المؤثر L .

تعريــــف

تسمى المعادلة (3.1.1) عند النقطة (x,y)

1- *زائدية* (hyperbolic) إذا كان $\Delta(x,y) > 0$ ،
2- *مكافئة* (parabolic) إذا كان $\Delta(x,y) = 0$ ،
3- *ناقصية* (elliptic) إذا كان $\Delta(x,y) < 0$ ،

كما تسمى المعادلة زائدية على Ω إذا كانت زائدية عند نقطة $(x,y) \in \Omega$ ،.....، ألخ.

واضح أن تصنيف المعادلة ذات المعاملات الثابتة لا يتغير من نقطة إلى أخرى.

مثـــال 3.1.1

صنف المعادلة التفاضلية

$$(1-x^2)u_{xx} - 2xyu_{xy} + (1-y^2)u_{yy} + xu_x + 3x^2yu_y - 2u = 0$$

الحـــل

$$\Delta(x,y) = (-xy)^2 - (1-x^2)(1-y^2) = -1 + x^2 + y^2$$

المعادلة تكون زائديه في المنطقة $\Omega_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 1\}$ ،خارج الدائرة، و تكون مكافئة في المنطقة $\Omega_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$، على الدائرة، و تكون ناقصية في المنطقة $\Omega_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ ، داخل الدائرة.

نظــرية 3.1.1

أشارة الدالة $\Delta(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y)$ لا تتأثر بالتحويل $(x,y) \mapsto (\xi,\eta)$ حيث $\xi = \xi(x,y), \eta = \eta(x,y) \in C^2(\Omega)$ تحقق $J = \dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$ في Ω.

البرهــــــان

لمعرفة شكل الدالة $\Delta(x,y) = B^2(x,y) - 4A(x,y)C(x,y)$ في المتغيرات الجديدة $\xi,\ \eta$ نقوم بحساب التفاضلات التالية

$$\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,\\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,\\
u_{xx} &= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi\xi_{xx} + u_\eta\eta_{xx},\\
u_{yy} &= u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi\xi_{yy} + u_\eta\eta_{yy},\\
u_{xy} &= u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi\xi_{xy} + u_\eta\eta_{xy}.
\end{aligned}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية

$$\begin{aligned}
&Lu = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu\\
&= [A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2]u_{\xi\xi} + [2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + 2C\xi_y\eta_y]u_{\xi\eta}\\
&+[A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2]u_{\eta\eta} + \text{first order derivative of } u.
\end{aligned}$$

أي أن

$$Lu = A'u_{\xi\xi} + B'u_{\xi\eta} + C'u_{\eta\eta} + \text{first order derivative of } u$$

حيث

$$A' = A\xi_x^2 + B\xi_x\xi_y + C\xi_y^2,$$
$$B' = 2A\xi_x\eta_x + B(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y) + 2C\xi_y\eta_y,$$
$$C' = A\eta_x^2 + B\eta_x\eta_y + C\eta_y^2.$$

ويكون

$$\Delta'(\xi,\eta) = B'^2 - 4A'C' = \left[\frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\right]^2 \Delta(x,y)$$

باختيار التحويل المناسب من (x,y) إلى (ξ,η) يمكن وضع المعادلة $(3.1.1)$ في أحدى الصور القياسية الآتية:

$u_{\xi\eta} + \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0,$	$\Delta' = 1 > 0,$	زائدية
$u_{\xi\xi} + \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0,$	$\Delta' = 0,$	مكافئة
$u_{\xi\xi} + \Phi(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta) = 0,$	$\Delta' = -1 < 0,$	ناقصية

3.2 طرائق الحـــل

(i) تحليل المؤثر:

لإيجاد الحل المتجانس للمعادلة $(3.1.2)$ يجب حل المعادلة

$$Lu(x,y) = 0 \tag{3.2.1}$$

إذا كانت معاملات L ثابتة ويمكن تحليلية إلى مؤثرات خطية من الرتبة الأولى على الصورة

$$L = L_1L_2 = (A_1D_x + B_1D_y + C_1)(A_2D_x + B_2D_y + C_2) \tag{3.2.2}$$

حيث أن المعاملات في $(3.2.2)$ ثوابت و $D_xD_y = D_yD_x$، المؤثرات L_1, L_2 تكون أبدالية، أي أن $L_1L_2 = L_2L_1$. إذا كان u_1 حل للمعادلة الخطية من الرتبة الأولى $L_1u = 0$ فان:

$$Lu_1 = (L_1L_2)(u_1) = (L_2L_1)(u_1) = L_2(L_1u_1) = 0$$

بنفس الطريقة، إذا كان u_2 حل للمعادلة الخطية من الرتبة الأولى $L_2u = 0$ فان u_2 يكون حل للمعادلة $(3.2.1)$. و حيث أن L مؤثر خطى فيكون $u = u_1 + u_2$ أيضا حلا للمعادلة $(3.2.1)$.

توجد طرق عديدة لإيجاد الحل الخاص للمعادلة $(3.1.2)$، هذه الطرق مشابهة للطرق المستخدمة في إيجاد الحلول الخاصة للمعادلات التفاضلية العادية ذات معاملات ثابتة (أنظر الصفحة رقم 83 من كتاب Deenemeyer).

مثـــــال 3.2.1

أوجد الحل العام للمعادلة

$$u_{xx} - u_{yy} = 4x + 3\cos(2y)$$

الحـــــل:

يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$Lu = 4x + 3\cos(2y)$$

إيجاد الحل المتجانس، أي حل المعادلة

$$Lu(x,y) = 0$$

حيث L يمكن تحليله على الصورة

$$L = D_x^2 - D_y^2 = (D_x + D_y)(D_x - D_y) = (D_x - D_y)(D_x - D_y)$$

نعلم أن حل المعادلة $(D_x + D_y)u = 0$ هو $u = f(x-y)$ كما أن حل المعادلة $(D_x - D_y)u = 0$ هو $u = g(x+y)$ و بذلك يكون الحل العام للمعادلة المتجانسة هو

$$u(x,y) = f(x-y) + g(x+y)$$

حيث f, g دوال اختيارية.

أيجاد الحل الخاص:

لإيجاد الحل الخاص المناظر للجزء $4x$ نعتبر y ثابت في المعادلة و نجرى التكامل للمعادلة $u_{xx} = 4x$ $(u = \frac{2}{3}x^3)$، بالمثل بالنسبة للجزء $3\cos(2y)$ نعتبر x ثابت و نجرى التكامل للمعادلة $-u_{yy} = 3\cos(2y)$ $(u = \frac{3}{4}\cos(2y))$. إذا الحل العام للمعادلة المطلوبة هو:

$$u(x,y) = f(x-y) + g(x+y) + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}\cos(2y)$$

عندما تكون المعاملات في معادلة الرتبة الثانية المتجانسة ثابتة فان بالا مكان تحويل المعادلة إلى الصيغة

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} = 0 \qquad (3.2.3)$$

أو

$$(AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2)u = 0$$

لنفرض أن $A \neq 0$ و أن جزري المعادلة $Am^2 + Bm + C = 0$ هما m_1, m_2 فنستنتج أن

$$L = AD_x^2 + BD_xD_y + CD_y^2 = A(D_x - m_1D_y)(D_x - m_2D_y) \quad (3.2.4)$$

و أن الحل العام للمعادلة (3.2.3) في حالة $m_1 \neq m_2$ هو

$$u(x,y) = f(y + m_1x) + g(y + m_2x)$$

حيث f, g دوال اختيارية.

أما إذا كان $m_1 = m_2 = m$ فان المعادلة (3.2.4) تصبح

$$L = A(D_x - m_1D_y)^2$$

و يأخذ الحل الصورة

$$u(x,y) = f(y + mx) + xg(y + mx)$$

عندما $A = 0$ فان المعادلة (3.2.4) تصبح

$$L = D_y(BD_x + CD_y)$$

و نحصل على الحل العام في الصورة

$$u(x,y) = f(x) + g(Cx - By)$$

<u>مثـــــال (3.2.2)</u>

حدد نوع المعادلة من حيث زائدية، ناقصية أم مكافئة ثم أوجد الحل العام للمعادلة

$$u_{yy} - c^2u_{xx} = 0$$

<u>الحـــــل</u>

بمقارنة معاملات المعادلة المطلوب تصنفها بمعاملات المعادلة (3.1.1)، نجد $A = -c^2,\ B = 0,\ C = 1$ ويكون $\Delta(x,y) = B^2 - 4AC = 4c^2 > 0$ ، أي أن المعادلة زائدية.

حيث أن جذري المعادلة $Am^2 + Bm + C = 0$ ، أي $c^2m^2 - 1 = 0$ ، هما $m_1 = \frac{1}{c},\ m_2 = -\frac{1}{c}$ (مختلفان) فان الحل العام للمعادلة يكون على الصورة

$$u(x,y) = f(y + \frac{1}{c}x) + g(y - \frac{1}{c}x)$$

<u>مثـــــال (3.2.3)</u>

حدد نوع المعادلة من حيث زائدية، ناقصية أم مكافئة ثم أوجد الحل العام للمعادلة

$$u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0$$

الحـــــل

بمقارنة معاملات المعادلة المطلوب تصنفها بمعاملات المعادلة (3.1.1)، نجد $A = 1,\ B = 4,\ C = 4$
ويكون $\Delta(x, y) = B^2 - 4AC = 0$ ، أي أن المعادلة مكافئة.
حيث أن جذري المعادلة $Am^2 + Bm + C = 0$ ، أي $(m+2)^2 = 0$ ، هما $m_1 = m_2 = -2$ (متساويان)، فان الحل العام للمعادلة يكون على الصورة

$$u(x, y) = f(y - 2x) + xg(y - 2x)$$

تمرين

1- صنف المعادلات الآتية ثم أوجد الحل العام لها:

$a)\quad 3u_{xx} + 4u_{xy} - u_{yy} = 0,$

$b)\quad u_{xx} - 2u_{xy} + u_{yy} = 0,$

$c)\quad 4u_{xx} + u_{yy} = 0,$

$d)\quad u_{xx} + 4u_{xy} + 4u_{yy} = 0,$

$e)\quad u_{yy} + 2u_{xx} = 0,$

2- الدالة $u(r,t)$ تحقق المعادلة $\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial u}{\partial r}) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ حيث c عدد ثابت. باستخدام المتغير التابع الجديد $v(r,t) = ru(r,t)$ ، $\xi = r + ct,\ \eta = r - ct$ حول المعادلة السابقة إلى الصورة $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0$ ثم بين أن الحل يعطى على الصورة

$$u(r,t) = \frac{1}{r}[f(r + ct) + g(r - ct)], \quad f, g \in C^2(\mathbb{R})$$

(ii) ***طريقة فصل المتغيرات (Separation of variables)***

هذه هي الطريقة الثانية لحل المعادلة الخطية من الرتبة الثانية في متغيرين مستقلين x, y ، و هي الأهم لأغراض هذه الدراسة، وتستند إلى الفرضية التالية

$$u(x, y) = v(x)w(y) \qquad (3.2.5)$$

ثم التعويض في المعادلة $Lu = 0$ و الخروج بمعادلتين عاديتين يسهل حل كلا منهما بالطرق المعروفة في حل المعادلات التفاضلية العادية.

مثـــــال (3.2.4)

أوجد الحل العام للمعادلة

$$u_{xx} - u_y = 0$$

الحــــل:

أفرض أن $u(x, y) = v(x)w(y)$ ثم عوض في المعادلة التفاضلية للحصول على

$$v''(x)w(y) = v(x)w'(y)$$
$$\Rightarrow \frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(y)}{w(y)}$$

و لان أطراف المعادلة في متغيرات مختلفة لابد أن كل طرف يساور ثابت، نفرض أن هذا الثابت هو λ (يسمى ثابت الفصل). أي أن

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{w'(y)}{w(y)} = \lambda$$

المعادلة الأولى $v''(x) - \lambda v(x) = 0$ و يكن لها الحل التالي:

$$v_\lambda(x) = \begin{cases} ae^{\sqrt{\lambda}x} + be^{-\sqrt{\lambda}x} & \lambda \neq 0 \\ ax + b & \lambda = 0 \end{cases}$$

حيث a, b دوال اختيارية(تعتمد على λ).

المعادلة الثانية $w'(x) - \lambda w(x) = 0$ و يكن لها الحل التالي:

$$w_\lambda(y) = ce^{\lambda y}$$

و بذلك نحصل على حلول المعادلة $u_{xx} - u_y = 0$:

$$u(x, y) = \{v_\lambda(x)w_\lambda(y) : \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

و بما أن المعادلة خطية فان الحل العام هو تركيب خطى من هذه الحلول, أي يكون على الصورة:

$$u(x, y) = \sum_\lambda v_\lambda(x)w_\lambda(y)$$

و سنرى فيما بعد أن المعاملات الثابتة $A = ac,\ B = bc$ ، و هي أيضا تعتمد على λ ، تتحد بمعرفة الشروط الحدية على الحل u.

3.3 مسـألة كوشي:

لنفرض أن u تحقق المعادلة $(3.1.1)$، أي أن

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G$$

حيث $F, \cdots, C, B, A \in C^2(\Omega)$ دوال في x, y ، $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

و لنفرض أن Γ_0 منحنيا في Ω معرفا بالمعادلات:

$$x = f(s),\ y = g(s), \qquad s \in [a,b] \tag{3.2.6}$$

حيث $f, g \in C^1(a,b) \quad g'(s) \neq 0, f'(s) \neq 0,$.

المطلوب في مسألة كوشي هو إيجاد حل المعادلة $(3.1.1)$ ، و ليكن $u(x,y)$ ، الذي يحقق الشرطين:

$$(i): \qquad u(f(s), g(s)) = h(s), \qquad (ii): \qquad \frac{\partial u}{\partial n}(f(s), g(s)) = \varphi(s).$$

حيث $\frac{\partial u}{\partial n}$، أو u_n، هي مشتقة u في اتجاه العمودي $\vec{n}$ على Γ_0 و التي تعرف بالشكل $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u.\vec{n}$ باعتبار $\|\vec{n}\| = 1$.

تسمى الدوال φ, h, g, f *المعلومات الابتدائية* *(Cauchy initial data)* كما يسمى Γ_0 *المنحنى الابتدائي.*
و بالنظر إلى أن المعادلات

$$x = f(s),\ y = g(s),\ h(s) \qquad s \in [a,b]$$

تمثل منحنيا أملسا (smooth curve) في $\mathbb{R}^3$، نرمز له بالرمز Γ، فمن الواضح إننا نسعى في مسالة كوشي إلى إيجاد السطح التكاملي للمعادلة (3.1.1) الذي يمر بالمنحنى Γ، و يحقق الشرط $\frac{\partial u}{\partial n} = \varphi$ على Γ_0. و هذا الشرط الأخير يحدد اتجاه العمودي على السطح عند كل نقطة في Γ:

يعتمد وجود حل وحيد لمسالة كوشي على أمور عديدة: منها نوع المعادلة (ناقصية، زائدية، مكافئة)، و نوع المنحنى (أن كان مماسا لمنحنى ذاتي أم لا)، و خواص المعاملات. في هذا الصدد هناك نظرية وجود لمسألة كوشي تسمى(Cauchy-Kowalewski theorem) تحت شروط معينة يمكن الإطلاع عليها في (Dennenmeyer ص 64). لكننا سنتعامل مع هذه المسألة من خلال النماذج الكلاسيكية (معادلة لابلاس، التموج، الحرارة)، و هي تشكل بقية هذا المقرر.