الفصل الأول

بعض المفاهيم الأولية

1.1: المعادلات التفاضلية الجزئية:

الصيغة العامة للمعادلة التفاضلية الجزئية من الرتبة الثانية في متغيرين تكتب على الصورة :

$$F(u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) = f(x, y), \quad (x, y) \in \Omega \tag{1.1}$$

حيث F, f دالتين معطاة, u(x,y) هو المتغير التابع , $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ نطاق (مجموعة مترابطة و مفتوحة).
حل المعادلة (1.1) هو دالة في $C^2(\Omega)$ تحول المعادلة التفاضلية ألي متطابقة.
تكون المعادلة (1.1) متجانسة (homogenous) إذا كانت $f(x, y) = 0$.

مثال 1

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + g(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

حيث $g(x, y)$ اى دالة معطاة.
هذه المعادلة من الرتبة الثانية حيث x, y متغيرين مستقلين و u(x,y) متغير تابع (المجهول) يمكن الحصول علية بحل المعادلة.

مثال 2

$$2y^2 \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 2u$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى و غير متجانسة , x, y متغيرين مستقلين و u(x,y) متغير تابع.

مثال 3

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية , متجانسة (تسمى هذه المعادلة بمعادلة لابلاس في ثلاث متغيرات $(x, y, z$).

تعريف

يقال للمعادلة التفاضلية الجزئية أنها خطية إذا كانت خطية في u و مشتقاتها. أي أن u و مشتقاتها من الدرجة الأولى (أنظر الأمثلة السابقة).

مثال 4

$$u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = u^2$$

معادلة تفاضلية جزئية فى متغيرين غير خطية و غير متجانسة.

تعريف

يقال للمعادلة التفاضلية الجزئية (1.1) أنها شبة خطية (quasi-linear) إذا كانت خطية في أعلى مشتقات u , أي في u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}.

نعلم انه في حالة المعادلات التفاضلية العادية المتجانسة أن أى تركيبة خطية من حلين أو أكثر يكون أيضا حل لنفس المعادلة. نفس النتيجة تطبق في المعادلات التفاضلية الجزئية.

أذا كانت $u_1, u_2, \cdots, u_n$ حيث n عدد منتهى أو غير منتهى, حلول مختلفة للمعادلة تفاضلية خطية متجانسة فى منطقة $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ فان:

$$u(x,y) = c_1 u_1(x,y) + c_2 u_2(x,y) + \cdots + c_n u_n(x,y)$$

تكون أيضا حل للمعادلة, حيث $c_1, c_2, \cdots, c_n$ ثوابت اختيارية.

<u>نظرية</u>

إذا كان L مؤثرا تفاضليا خطيا فان:

(i) أي تركيب خطى من حلول المعادلة $Lu = 0$ هو حل لها.

(ii) الحل العام للمعادلة غير المتجانسة $Lu = f$ هو مجموع الحل العام المتجانس و الحل الخاص.

البرهان:

(i) أفرض ان u, v حلان للمعادلة المتجانسة، اى أن $Lu = 0,\ Lv = 0$.

$$L(au + bv) = L(au) + L(bv) = aL(u) + bL(v) = a(0) + b(0) = 0$$

أي أن $au + bv$ حلا لنفس المعادلة.

(ii) أفرض أن u, v حلان للمعادلة $Lu = f$. أي أن

$$L(u) = f,\ L(v) = f \ \Rightarrow Lu - Lv = 0 \quad \Rightarrow L(u - v) = 0 \quad \Rightarrow L(u_h) = 0$$

حيث $u_h = u - v$.

<u>مثال 5</u>

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1 \qquad (1)$$

هذه معادلة من الرتبة الثانية، خطية، غير متجانسة.

نحصل على الحل المتجانس للمعادلة $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} = 0$ بأجراء التكامل بالنسبة ل x نجد:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = f(y), \qquad (2)$$

حيث $f(y)$ دالة اختيارية.

بإجراء التكامل مرة أخرى بالنسبة ل x نجد:

$$u(x,y) = x f(y) + g(y), \qquad (3)$$

حيث $g(y)$ دالة اختيارية.

أحد الحلول الخاصة للمعادلة (1) يكون على الصورة

$$u = \frac{1}{2} x^2 \qquad (4)$$

باستخدام (3) و(4) يأخذ الحل العام للمعادلة (1) الصورة:

$$u(x,y) = xf(y) + g(y) + \frac{1}{2}x^2$$

حيث $f(y)$ و $g(y)$ دالة اختيارية في y.

1.2 : مصادر المعادلات التفاضلية

(i) القوانين الفيزيائية: لا تهمنا ألان و سنتطرق إليها فيما بعد عند الحديث عن المعادلة الموجية و معادلة الحرارة.

(ii) التخلص من الدوال الاختيارية في معادلات السطوح:

مثال 6

$$u(x,y) = yf(x) \qquad (1)$$

حيث $f(x)$ دالة اختيارية في x. بإجراء التفاضل للمعادلة (1) بالنسبة ل y نحصل على

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f(x) \qquad (2)$$

بحذف $f(x)$ من المعادلتان (1) و (2) نحصل على

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{u}{y} \qquad (3)$$

المعادلة (3) معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولى و حلها العام يعطى بالمعادلة (1) التي تحتوى على دالة اختيارية.

مثال 7

$$u(x,y) = f(2x+3y) \qquad (1)$$

المعادلة (1) تمثل مجموعة غير منتهية من السطوح (من ضمنها السطح المستوى $u = 2x + 3y$).

$$u_x = 2f'(2x+3y), \quad u_y = 3f'(2x+3y) \qquad (2)$$

من المعادلة (2) نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة

$$3u_x - 2u_y = 0 \qquad (3)$$

أي أن السطوح (1) هي حلول للمعادلة (3).

مثال 7

إذا كانت

$$u(x,y) = f(x+y) + g(x-y) \qquad (1)$$

حيث $f(x+y),\ g(x-y)$ دوال اختيارية في $x+y,\ x-y$ فان:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = f'(x+y) + g'(x-y), \qquad (2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x+y) + g''(x-y), \qquad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x+y) - g'(x-y), \qquad (4)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f''(x+y) + g''(x-y), \qquad (5)$$

بمساواة المعادلات (3) و (5) نحصل على المعادلة التفاضلية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (6)$$

<u>مثال 8</u>

$$u(x,y) = x^n f(\frac{y}{x}) \qquad (1)$$

حيث أن المعادلة (1) متجانسة من الدرجة n و ذلك لان $u(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n u(x,y)$ و عليه تكون المعادلة التفاضلية الجزئية المناظرة لمجموعات السطوح (1) على الصورة:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = nu$$

<u>تمارين</u>

1- أثبت أن الدالة $u(x,y) = f(2x+y^2) + g(2x-y^2)$ تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية الآتية

$$y^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1}{y}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

حيث $f,\ g$ دوال اختيارية قابلة للاشتقاق مرتين.

2- تخلص من الدالة الاختيارية في معادلات السطوح الآتية . ثم أوجد المعادلة التفاضلية التي لها الحلول العامة الآتية:

(i) $u(x,y) = f(x+y)$, (ii) $u(x,y,z) = x^n f(\frac{x}{y}, \frac{z}{y})$.

3- اثبت أن

$$u(x,y,t) = f(x+i\beta y - vt) + g(x - i\beta y - vt)$$

حل للمعادلة التفاضلية الجزئية الآتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

حيث $f,\ g$ دوال اختيارية قابلة للاشتقاق مرتين، $\beta = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ ،

$\beta,\ v,\ c$ ثوابت اختيارية.