# الفصـــــــل الخامـــــس

## المعادلات الزائدية ( المعادلة الموجية)

### 5.1 المعادلة الموجية في بعد واحد

افرض أن لدينا خيط مرن طوله $L$ قد تم شدة و تثبيته من طرفية في نقطتين ثابتتين و ليكن التثبيت على محور $ox$ عند النقطتين $x = 0,\ x = L$. بفرض انه قد تم جذب الخيط في اتجاه عمودي على الخيط عند $t = 0$ ثم ترك الخيط لكي يتذبذب، في هذه الحالة المعادلات التي تصف حركة الخيط تعطى بمسالة الشروط الابتدائية- الحدية الآتية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L,\ t > 0 \tag{5.1.1}$$

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t \geq 0 \tag{5.1.2}$$

$$u(x,0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq L, \tag{5.1.3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq L \tag{5.1.4}$$

المعادلة التفاضلية الجزئية (5.1.1) تسمى المعادلة الموجية، و الثابت $c^2 = (k/\rho) > 0$ ، $k$ ثابت الشد في الخيط ، $\rho$ الكثافة الخطية. الشروط الحدية (5.1.2) تبين أن الخيط مثبت من البداية و النهاية عند $x = 0,\ x = L$ على الترتيب. الشرطين الابتدائيين (5.1.3)، (5.1.4) يمثلان الإزاحة و السرعة الابتدائية عند أي موضع $x$ على الخيط، لكي تكون الشروط الابتدائية و الحدية متوافقة نفرض أن $f(0) = f(L) = 0,\ g(0) = g(L) = 0$.

**<u>لحل المسالة سوف نستخدم طريقة فصل المتغيرات</u>.**

أفرض أن

$$u(x,t) = v(x)w(t)$$

بالتعويض في المعادلة لتفاضلية ثم عمل فصل للمتغيرات نجد

$$\frac{w''(t)}{c^2 w(t)} = \frac{v''(t)}{v(t)} = -\lambda^2 \tag{5.1.5}$$

حيث $\lambda^2$ ثابت الفصل.

من المعادلة (5.1.5) نحصل على المعادلتين التفاضليتين العاديتين

$$v''(x) + \lambda^2 v(x) = 0, \quad w'''(t) + c^2\lambda^2 w(t) = 0.$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$v(x) = a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x), \quad w(t) = d\cos(\lambda ct) + h\sin(\lambda ct).$$

حيث $a, b, d, h$ ثوابت اختيارية.

و يكون الحل على الصورة

$$u(x,t) = \left[a\cos(\lambda x) + b\sin(\lambda x)\right]\left[d\cos(\lambda ct) + h\sin(\lambda ct)\right] \tag{5.1.6}$$

من الشرط الحدي الأول نجد

$$u(0,t) = 0 \Rightarrow v(0)w(t) = 0 \Rightarrow v(0) = 0 \Rightarrow a = 0, \tag{5.1.7}$$

من الشرط الحدي الثاني نجد

$$u(L,t) = 0 \Rightarrow v(L)w(t) = 0 \Rightarrow v(L) = 0 \Rightarrow b\sin(\lambda L) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{n\pi}{L},\ n \in \mathbb{N}$$

أي أن

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \tag{5.1.8}$$

باستخدام (5.1.7) و (5.1.8) في (5.1.6) نجد

$$u_n(x,t) = \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\ n \in \mathbb{N} \tag{5.1.9}$$

حيث $a_n, b_n$ ثوابت اختيارية.

ويكون التركيب الخطى من الحلول (5.1.9) أيضا حل للمعادلة و يكتب على الصورة.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \tag{5.1.10}$$

باستخدام الشرط الابتدائي (5.1.3) نجد

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right), \quad 0 \le x \le L.$$

حيث

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \tag{5.1.11}$$

وذلك بفرض أن الدالة $f(x)$ دالة متصلة مقطعيا و يمكن عمل امتداد لها على الفترة $[0, L]$ كدالة دورية فردية ذات دورة $2L$.

من المعادلة (5.1.10) نجد

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi c}{L}\right)\left[-a_n\sin\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)+b_n\cos\left(\frac{n\pi c}{L}t\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

باستخدام الشرط الأخير نجد

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n\pi c}{L}\right)b_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)=g(x),$$

حيث

$$b_n=\frac{2}{n\pi c}\int_0^L g(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx. \tag{5.1.12}$$

وذلك بفرض أن الدالة $g(x)$ دالة متصلة مقطعيا و يمكن عمل امتداد لها على الفترة $[0,L]$ كدالة فردية دورية ذات دورة $2L$.

باستخدام (5.1.11) و (5.1.12) نحصل على الحل الشكلي للمسألة في الصورة (5.1.10) و إذا اقتربت المتسلسلة إلى دالة ذات مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متصلة في هذه الحالة نحصل على الحل الحقيقي للمسالة.

## مثال 5.1.1

أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<\pi,\ \ t>0\\
&u(0,t)=u(\pi,t)=0,\quad t\ge 0\\
&u(x,0)=\sin(3x)-4\sin(10x),\quad 0\le x\le\pi,\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=2\sin(4x)+\sin(6x),\quad 0\le x\le\pi.
\end{aligned}$$

**الحـــل**

بمقارنة المسالة بمسالة المعادلة الموجيه في بعد واحد ذات الشروط الابتدائية-الحدية نجد:

$$\begin{aligned}
&c=2,\ \ L=\pi,\\
&u(x,0)=\sin(3x)-4\sin(10x)=f(x),\\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=2\sin(4x)+\sin(6x)=g(x)
\end{aligned}$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cos(2nt)+b_n\sin(2nt)\right]\sin(nx)$$

باستخدام الشرط الابتدائي الأول نجد

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\left(nx\right) = \sin(3x) - 4\sin(10x)$$

و يكون

$$a_3 = 1, \quad a_{10} = -4, \quad a_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} - \{3,10\}$$

أيضا

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} 2n\left[-a_n \sin\left(2nt\right) + b_n \cos\left(2nt\right)\right]\sin\left(nx\right)$$

باستخدام الشرط الابتدائي الثاني نجد

$$2\sin(4x) + \sin(6x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2nb_n \sin\left(nx\right)$$

و يكون

$$b_4 = 1/4, \quad a_6 = 1/12, \quad \mathrm{b}_n = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} - \{4,6\}.$$

و يكون الحل على الصورة

$$u(x,t) = \cos(6t)\sin(3x) + \frac{1}{4}\sin(8t)\sin(4x) + \frac{1}{12}\sin(12t)\sin(6x) - 4\cos(20t)\sin(10x).$$

## <u>تمرين:</u>

1- أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \ \ t > 0 \\
&u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \ge 0 \\
&u(x,0) = x(1-x), \quad 0 < x < 1, \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \sin(7\pi x), \qquad 0 < x < 1.
\end{aligned}$$

2- أوجد حل مسالة الشروط الحدية-الابتدائية الآتية:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \ \ t > 0 \\
&u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0 \\
&u(x,0) = x^2(\pi - x), \quad 0 < x < \pi, \\
&\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0, \qquad 0 < x < \pi.
\end{aligned}$$

## صيغة دالمبيرت للمعادلة الموجية فى بعد واحد

للحصول على صيغة دالمبيرت للمعادلة الموجية (5.1.1) نستخدم التحويل الخطى للمتغيرات

$$\varsigma = x + ct, \qquad \eta = x - ct$$

و يكون

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \varsigma}\frac{\partial \varsigma}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \varsigma} + \frac{\partial u}{\partial \eta},$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \varsigma}\frac{\partial \varsigma}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = c\left(\frac{\partial u}{\partial \varsigma} - \frac{\partial u}{\partial \eta}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \varsigma \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right).$$

بالتعويض في المعادلة الموجيه (5.1.1) نحصل على

$$\frac{\partial^2 u(\varsigma,\eta)}{\partial \varsigma \partial \eta} = 0$$

بإجراء التكامل بالنسبة $\varsigma$ نحصل على

$$\frac{\partial u(\varsigma,\eta)}{\partial \eta} = b(\eta)$$

حيث $b(\eta)$ دالة اختيارية في $\eta$. بإجراء التكامل مرة أخرى بالنسبة لـ $\eta$ نجد

$$u(\varsigma,\eta) = F(\varsigma) + G(\eta)$$

حيث $G(\eta) = \int b(\eta) d\eta$.

و يكون الحل على الصورة

$$u(x,t) = F(x+ct) + G(x-ct) \qquad (5.1.13)$$

هذه الصيغة تسمى صيغة دالمبيرت (d Alembert’s formula) حيث كلا من $F$, G دوال اختيارية.

باستخدام الشروط الابتدائية (5.1.3) و (5.1.4) يمكن تحديد الدوال $F$, G كما يلى:

من الشروط الابتدائية و الصيغة (5.1.13) نجد

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x), \qquad (5.1.14)$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=F'(x)-G'(x)=\frac{1}{c}g(x) \tag{5.1.15}$$

بإجراء التكامل للمعادلة (5.1.15) من النقطة $x_0$ إلى النقطة $x$ حيث $x_0$ نقطة اختيارية نجد

$$F(x)-G(x)=\frac{1}{c}\int_{x_0}^{x}g(y)dy+A \tag{5.1.16}$$

حيث $A$ ثابت اختياري.

بحل النظام (5.1.14) و (5.1.16) نحصل على

$$F(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}g(y)dy+\frac{A}{2},$$
$$G(x)=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x}g(y)dy-\frac{A}{2}.$$

بالتعويض في صيغة دالميرت (5.1.13) نحصل على

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\left[\int_{x_0}^{x+ct}g(y)dy-\int_{x_0}^{x-ct}g(y)dy\right]$$

أي أن

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct}g(y)dy. \tag{5.1.17}$$

## ملاحظات

1- صورة الحل (5.1.17) لا تمثل حل كامل لمسالة الشروط الابتدائية-الحدية (5.1.1)-(5.1.4) وذلك لأننا نحصل على الحل بدون استخدام الشروط الحدية على المسالة. و السبب في ذلك أن الدالتين $f(x),\ g(x)$ معرفتين فقط على الفترة $[0,L]$ و لكن الحل في صيغة دالمبيرت معرف لأي $x$, $t$.
الشروط الحدية المفروضة على المسألة سوف تبين لنا كيفية عمل امتداد لتعريف الدوال $f(x),\ g(x)$ على الفترة $[0,L]$.

من الشرط الحدي الأول، $u(0,t)=0$، و صيغة الحل (5.1.17) نجد:

$$0=\left[f(ct)+f(-ct)\right]+\frac{1}{c}\int_{-ct}^{ct}g(y)dy$$
$$\Rightarrow -f(ct)=f(-ct),\qquad \int_{-ct}^{ct}g(y)dy=0$$

أي أن الدوال $f(x),\ g(x)$ يجب آن تكون دوال فردية ، أي يجب عمل امتداد لتعريف الدول لكي يصبح $[-L, L]$ .

من الشرط الحدي الثاني، $u(L,t)=0$، و صيغة الحل (5.1.17) نجد:

$$0=\left[f(L+ct)+f(L-ct)\right]+\frac{1}{c}\int_{L-ct}^{L+ct} g(y)dy$$

$$\Rightarrow -f(L+ct)=f(L-ct), \qquad \int_{L-ct}^{L+ct} g(y)dy=0$$

أي أن الدوال $f(x),\ g(x)$ يجب آن تكون دوال فردية دورية و دورتها $2L$.

و بذلك نكون قد قمنا بتعريف كلا من الدالتين $f(x),\ g(x)$ و في هذه الحالة يمكن استخدام صيغة دالميرت لحساب $u(x,t)$ عند أي نقطة $0\le x\le L$، $t>0$.

2- تستخدم صيغة دالميرت (5.1.13) حل المعادلة الموجية لخيط مرن طوله لانهائي كما سوف نرى في المثالين التاليين:

**تمرين**

تأكد من أن الصيغة (5.1.17) تمثل حل لمسالة الشروط الابتدائية (5.1.1) - (5.1.4) حيث كلا من الدالتين $f(x),\ g(x)$ فردية و دورية و دورتهما $2L$.

## مثال 5.1.3

أستخدم صيغة دالمبيرت (5.1.13) لإيجاد حل لمسالة الشروط الابتدائية ( لخيط مرن طوله لانهائي) الآتية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad -\infty<x<\infty,\ t>0, \tag{5.1.18}$$

$$u(x,0)=f(x), \quad -\infty<x<\infty, \tag{5.1.19}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x), \quad -\infty<x<\infty. \tag{5.1.20}$$

## الحـــل

حل المعادلة (5.1.18) يعطى بالصورة

$$u(x,t)=F(x+ct)+G(x-ct)$$

حيث كلا من $F$, G دوال اختيارية.

باستخدام الشروط الابتدائية (5.1.19) و (5.1.20) يمكن تحديد الدوال $F$, G كما يلي:

من الشروط الابتدائية و الصيغة (5.1.19) نجد

$$u(x,0) = F(x) + G(x) = f(x), \tag{5.1.21}$$

$$\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = F'(x) - G'(x) = \frac{1}{c}g(x)$$

بإجراء التكامل للمعادلة من النقطة $x_0$ إلى النقطة $x$ حيث $x_0$ نقطة اختيارية نجد

$$F(x) - G(x) = \frac{1}{c}\int_{x_0}^{x} g(y)dy + A \tag{5.1.22}$$

حيث $A$ ثابت اختياري .

بحل النظام (5.1.20) و (5.1.22) نحصل على

$$F(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(y)dy + \frac{A}{2},$$
$$G(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2c}\int_{x_0}^{x} g(y)dy - \frac{A}{2}.$$

بالتعويض في صيغة دالمبيرت نحصل على الحل

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+ct) + f(x-ct)\right] + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy. \tag{5.1.23}$$

تأكد من أن هذه الصورة تحقق المعادلة و الشروط الابتدائية بفرض أن $f(x)$ لها مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متصلة و أن $g(x)$ لها مشتقه من الرتبة الأولى متصلة و ذلك بالتعويض المباشر في المعادلات (تمرين) .

## مثال 5.1.4

أوجد حل لمسالة الشروط الابتدائية آلاتية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < \infty, \ t > 0, \tag{5.1.24}$$

$$u(x,0) = \sin(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{5.1.25}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 1, \quad -\infty < x, \infty. \tag{5.1.26}$$

**الحـــــل**

كما في المثال السابق يمكن استنتاج شكل الحل باستخدام صيغة دالمبيرت و الشروط الابتدائية نحصل على

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+ct)+f(x-ct)\right]+\frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)dy.$$

حيث

$$c=2,\quad f(x)=\sin(x),\quad g(x)=1.$$

أذن

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[f(x+2t)+f(x-2t)\right]+\frac{1}{4}\int_{x-2t}^{x+2t} dy$$
$$=\sin(x)\cos(2t)+t.$$

**تمرين**

أوجد حل لمسالة الشروط الابتدائية آلاتية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=4\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad -\infty<x<\infty,\quad t>0,$$
$$u(x,0)=f(x),\quad -\infty<x<\infty,)$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x),\quad -\infty<x<\infty.$$

عندما تكون كلا من $f(x),\ g(x)$ على إحدى الصور الآتية،

$i)\quad f(x)\equiv 0,\qquad g(x)=\cos(x),$

$ii)\quad f(x)\equiv x,\qquad g(x)=x,$

$iii)\quad f(x)\equiv e^{-x^2},\qquad g(x)=\sin(x).$

**نظرية (5.1.1) نظرية وجود ووحدانية الحل لمسالة الخيط المهتز فى بعد واحد:**

مسالة الشروط الابتدائية- الحدية

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\ t>0 \tag{5.1.27}$$
$$u(0,t)=u(L,t)=0,\quad t\geq 0 \tag{5.1.28}$$
$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L, \tag{5.1.29}$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=g(x),\quad 0<x<L. \tag{5.1.30}$$

لها على الأكثر حل واحد  متصل ذات مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الثانية.

**البرهان**

أفرض أن $u(x,t),\ v(x,t)$ حلان للمسالة متصلان و قابلان للاشتقاق مرتين. و أفرض أن

$$w(x,t)=u(x,t)-v(x,t) \tag{5.1.31}$$

من الواضح أن $w(x,t)$ يحقق المعادلة التفاضلية و كذلك الشروط، أي أن

$$\begin{aligned} &w(x,0)=0,\\ &\frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=0,\\ &w(0,t)=w(L,t)=0, \qquad t\ge 0,\\ &\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}}(0,t)=\frac{\partial \mathrm{w}}{\partial \mathrm{t}}(L,t)=0, \quad t\ge 0. \end{aligned} \tag{5.1.32}$$

المطلوب إثبات أن

$$w(x,t)\equiv 0 \quad \forall\ x\in[0,L],\ \ t\ge 0$$

إذا كانت $w(x,t)$ تمثل الإزاحة للخيط المهتز عند الموضع $x$ و الزمن $t$، تعرف الطاقة الكلية للخيط $E(t)$ بالتكامل

$$E(t):=\frac{1}{2}\int_0^L\left[c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dx \tag{5.1.33}$$

حيث الجزء الأول تحت علامة التكامل يمثل طاقة الوضع عند أي نقطة $x$، و الجزء الثاني يمثل طاقة الحركة.

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt}&=\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_0^L\left[c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dx\right]=\frac{1}{2}\int_0^L\frac{d}{dt}\left[c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dx\\ &=\int_0^L\left[c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]dx \end{aligned}$$

بما أن الدالة $w(x,t)$ لها مشتقات جزئية من الرتبة الثانية متصلة، فان $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t\,\partial x}=\dfrac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}$ و يكون

$$\frac{dE(t)}{dt}=\int_0^L\left[c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\right)+\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right)\right]dx \tag{5.1.34}$$

باستخدام التكامل بالتجزيء يمكن كتابة

$$\int_0^L c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\right)dx = \int_0^L c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)dx$$
$$= c^2\left(\frac{\partial w(L,t)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w(L,t)}{\partial t}\right) - c^2\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial w(0,t)}{\partial t}\right) - \int_0^L c^2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx$$

من الشروط (5.1.32) نجد

$$\int_0^L c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial t}\right)dx = -\int_0^L c^2\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)dx \qquad (5.1.35)$$

بالتعويض من (5.1.35) في (5.1.34) نجد

$$\frac{dE(t)}{dt} = \int_0^L \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)\left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}\right) - c^2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right]dx$$

و حيث أن $w(x,t)$ تحقق المعادلة التفاضلية (5.1.27) فان $\frac{dE(t)}{dt} = 0$ و بذلك يكون

$$E(t) \equiv C \qquad (5.1.36)$$

حيث $C$ عدد ثابت.

من المعادلة (5.1.33) والشروط (5.1.32) نجد

$$E(0) \equiv 0 \qquad (5.1.37)$$

من المعادلة (5.1.36) و (5.1.37) نجد $C = 0$ و يكون

$$E(t) := \frac{1}{2}\int_0^L \left[c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2\right]dx \equiv 0$$
$$\Rightarrow c^2\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 = 0, \quad 0 \le x \le L$$
$$\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x}(x,t) = 0 \quad , \quad \frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = 0, \quad \forall \quad 0 \le x \le L,\ t \ge 0$$
$$\Rightarrow w(x,t) = K \qquad \forall \quad 0 \le x \le L,\ t \ge 0$$

حيث $K$ عدد ثابت و هذه النتيجة تفسر فيزيائيا أنة لا يوجد اهتزازات في الخيط.

و حيث أن $w(x,0) = 0$ فأنة يجب أن يكون $w(x,t) \equiv 0$ أي أن $u(x,t) = v(x,t)$ وبذلك يكون للمسالة حل وحيد.

## 5.2 المعادلة الموجية في بعددين

أفرض انه يوجد لدينا غشاء مرن مستطيل الشكل طوله $L$ و عرضة $W$ كما هو مبين في الشكل. المسألة الرياضية التي تصف اهتزاز هذا الغشاء تعطى بالمعادلة التفاضلية الجزئية ذات الشروط الابتدائية – الحدية الآتية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial y^2}\right), \quad 0<x<L,\ 0<y<W,\ t>0, \tag{5.2.1}$$

$$u(0,y,t) = u(L,y,t) = 0, \quad 0<y<W,\ t>0, \tag{5.2.2}$$

$$u(x,0,t) = u(x,W,t) = 0, \quad 0<x<L,\ t>0, \tag{5.2.3}$$

$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0<x<L,\ 0<y<W, \tag{5.2.4}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,y,0) = f(x,y), \quad 0<x<L,\ 0<y<W. \tag{5.2.5}$$

باستخدام فصل المتغيرات يمكن أيجاد حل المسالة كما يلي:

أفرض أن

$$u(x,y,t) = V(x,y)T(t)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية و عمل فصل للمتغيرات نجد

$$\frac{T''(t)}{c^2 T(t)} = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)}{V} = \lambda^2$$

حيث $\lambda^2$ ثابت الفصل الأول. و نحصل على المعادلتين

$$T''(t) + c^2\lambda^2 T(t) = 0, \tag{5.2.6}$$

$$\frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x,y)}{\partial y^2} + \lambda^2 V(x,y) = 0 \tag{5.2.7}$$

بفصل المتغيرات في المعادلة (5.2.7) و ذلك بفرض $V(x,y) = X(x)Y(y)$ نحصل على

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \left(-\lambda^2 - \frac{Y''(y)}{Y(y)}\right) = -\mu^2$$

حيث $\mu^2$ ثابت الفصل الثاني. و نحصل على المعادلتين

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0, \tag{5.2.8}$$

$$Y''(y) + (\lambda^2 - \mu^2)Y(y) = 0. \tag{5.2.9}$$

بحل المعادلات (5.2.5)، (5.2.8)، (5.2.9) نحصل على

$$T(t) = A\cos(\lambda ct) + B\sin(\lambda ct),$$

$$X(x) = C\cos(\mu x) + D\sin(\mu x),$$

$$Y(y) = E\cos(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\, y) + F\sin(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2}\, y).$$

حيث $A, B, C, D, E, F$ ثوابت اختيارية تحدد من الشروط المفروضة على المسالة كما يلي:

$$u(0, y, t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0 \Rightarrow C = 0,$$
$$u(x, 0, t) = 0 \Rightarrow Y(0) = 0 \Rightarrow E = 0,$$
$$u(L, y, t) = 0 \Rightarrow X(L) = 0 \Rightarrow D\sin(\mu L) = 0 \Rightarrow \mu_n = \frac{n\pi}{L},\ n \in \mathbb{N},$$
$$u(x, W, t) = 0 \Rightarrow Y(W) = 0 \Rightarrow F\sin(\sqrt{\lambda^2 - \mu^2} W) \Rightarrow \lambda_{mn} = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{W^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}},\ m \in \mathbb{N}.$$

و يكون

$$T_{nm}(t) = A_{nm}\cos(\lambda_{nm} ct) + B_{nm}\sin(\lambda_{nm} ct),$$
$$X_n(x) = D_n \sin(\mu_n x),$$
$$Y_{nm}(y) = F_{nm}\sin(\sqrt{\lambda_{nm}{}^2 - \mu_n^2}\, y) = F_{nm}\sin(\frac{m\pi}{W} y).$$

و تأخذ متتابعة الحلول الصورة

$$u_{nm}(x, y, t) = \left[ a_{nm}\cos(\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{W^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} ct) + b_{nm}\sin(\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{W^2} + \frac{n^2\pi^2}{L^2}} ct) \right] \sin(\frac{n\pi}{L} x)\sin(\frac{m\pi}{W} y),$$

حيث $a_{nm} = A_{nm} D_n F_{nm},\ b_{nm} = B_{nm} D_n F_{nm}$ .

بأخذ متسلسلة لانهائية مزدوجة من هذه الحلول نحصل على

$$u(x,y,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\left[a_{nm}\cos\left(\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{W^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}}ct\right)+b_{nm}\sin\left(\sqrt{\frac{m^2\pi^2}{W^2}+\frac{n^2\pi^2}{L^2}}ct\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right)$$

باستخدام الشرط (5.2.3) نجد

$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right) \qquad (5.2.10)$$

بإجراء الاشتقاق بالنسبة للزمن و استخدام الشرط الأخير نحصل على

$$g(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}b_{nm}\left(\pi c\sqrt{\frac{m^2}{W^2}+\frac{n^2}{L^2}}\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right) \qquad (5.2.11)$$

نحصل على حل المسالة وذلك بحساب $a_{nm}, b_{nm}$ من متسلسلات فورييه اللانهائية المزدوجة (5.2.10) و (5.2.11) كما يلي:

بضرب طرفي المعادلة (5.2.10) بـالدوال $\sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{q\pi}{W}y\right)$ و إجراء التكامل بالنسبة على $x,y$ نحصل على

$$\int_0^L\int_0^W f(x,y)\sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{q\pi}{W}y\right)dydx$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}a_{nm}\int_0^L\int_0^W\sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{q\pi}{W}y\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right)dydx$$

باستخدام شروط التعامد نجد جميع التكاملات في جهة اليمين تنعدم فيما عدا عندما $p=m,\ q=n$ ، و يكون

$$\int_0^L\int_0^W f(x,y)\sin\left(\frac{p\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{q\pi}{W}y\right)dydx=a_{pq}\left(\int_0^L\sin^2\left(\frac{p\pi}{L}x\right)dx\right)\left(\int_0^W\sin^2\left(\frac{q\pi}{W}y\right)dy\right)$$
$$=a_{pq}\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{W}{2}\right)=a_{pq}\left(\frac{LW}{4}\right)$$

و هذا يستلزم

$$a_{nm}=\frac{4}{LW}\int_0^L\int_0^W f(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right)dydx,$$

بنفس الطريقة يمكن حساب

$$b_{nm}=\frac{4}{LWc\pi\sqrt{\frac{m^2}{W^2}+\frac{n^2}{L^2}}}\int_0^L\int_0^W g(x,y)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)\sin\left(\frac{m\pi}{W}y\right)dydx.$$

## **مثال 5.2.1:**

باستخدام طريقة فصل المتغيرات أوجد حل مسالة التلغراف الآتية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u(x,t)=c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<L,\ t>0$$
$$u(0,t)=u(L,t)=0,\quad t>0$$
$$u(x,0)=f(x),\quad 0<x<L,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\qquad 0<x<L.$$

## **الحـــل:**

أفرض أن $u(x,t)=v(x)w(t)$، بالتعويض في المعادلة التفاضلية و عمل فصل للمتغيرات نحصل على المعادلتين

$$w''(t)+w(t)+(1+\lambda^2c^2)w(t)=0,$$
$$v''(x)+\lambda^2 v(x)=0.$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$w(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[A\cos(\beta t)+B\sin(\beta t)\right],\quad \beta=\sqrt{\frac{3}{4}+\lambda^2c^2}$$
$$v(x)=\left[D\cos(\lambda x)+H\sin(\lambda x)\right].$$

من الشرط الحدي الأول و الثاني نجد $D=0$، $\lambda_n=\frac{n\pi}{L}$، $n\in\mathbb{N}$ ، أي أن $\beta_n=\sqrt{\frac{3}{4}+\frac{n^2\pi^2c^2}{L^2}}$ ويكون

$$w_n(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[A_n\cos(\beta_n t)+B_n\sin(\beta_n t)\right],\qquad v_n(x)=H_n\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

و تأخذ متتابعة الحلول الصورة

$$u_n(x,t)=v_n(x)w_n(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[a_n\cos(\beta_n t)+b_n\sin(\beta_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),\quad n\in\mathbb{N}$$

حيث $a_n=A_nH_n,\ b_n=B_nH_n$.

ويأخذ الحل الشكل النهائي الأتي إذا كانت المتسلسلة تقاربيه

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t}\left[a_n\cos(\beta_n t)+b_n\sin(\beta_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

من الشرط الابتدائي الأول نجد

$$a_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx,$$

من الشرط الابتدائي الأخير نجد

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}t}\left[a_n\cos(\beta_n t)+\frac{a_n}{2\beta_n}\sin(\beta_n t)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

**تمرين:**

باستخدام طريقة فصل المتغيرات أوجد حل مسالة التلغراف الآتية:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}+\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+u(x,t)=16\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2},\quad 0<x<1,\ t>0$$
$$u(0,t)=u(1,t)=0,\quad t>0$$
$$u(x,0)=x,\quad 0<x<1,$$
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\quad 0<x<1.$$