الفصـــــــل الرابـــع

المـــــعادلات الناقصــــــية

4.1 هندســـة المنحنيـــــات و الســـــطوح فى ثلاث أبعاد

(i) معادلة المنحنى Γ في المستوى $\mathbb{R}^2$ يعرف كما يلي:

$$\Gamma = \{(x,y) : x = x(s),\ y = y(s),\ \ s \in [a,b]\}$$

و المتجه المماس للمنحنى Γ:

$$\vec{T} = (x'(s), y'(s))$$

و المتجه العمودي على للمنحنى Γ في $\mathbb{R}^2$:

$$\vec{N} = \vec{k} \times \vec{T} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ x' & y' & 0 \end{vmatrix} = \left(-y', x'\right)$$

و متجه الوحدة العمودي على Γ:

$$\vec{n} = \frac{\vec{N}}{\|\vec{N}\|} = \frac{(-y', x')}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}$$

تعـــريف (4.1.1)

لأي $u \in C^1(\Gamma)$، $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u . \vec{n}$

(ii) معادلة المنحنى Γ في الفراغ الثلاثي، $\mathbb{R}^3$ يعرف كما يلي:

$$\Gamma = \{(x,y,z) : x = x(s),\ y = y(s),\ \mathrm{z{=}z(s)},\ \ s \in [a,b]\}$$

و المتجه المماس للمنحنى Γ في الفراغ الثلاثي، $\mathbb{R}^3$ يعرف كما يلي:

$$\vec{T} = (x'(s), y'(s), z'(s))$$

إذا كان $\Gamma \subset S$ فان:

$$F(x(s), y(s), z(s)) = c$$
$$\Rightarrow \frac{dF}{ds} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{ds} = 0$$
$$\Rightarrow (F_x, F_y, F_z).(x', y', z') = 0 \ \Rightarrow \nabla F.\vec{T} = 0$$

هذه النتيجة صحيحة لكل المنحنيات التي تتقاطع عند النقطة $p \in S$ ، مما يعني أن المتجه ∇F يتعامد على المستوى المتماس للسطح S عند النقطة p ، أي أن $grad(F) = \nabla F$ عمودي على السطح S.

نظـــرية التبـاعـــد :(divergence theorem) بدون برهان:

ليكن Ω نطاقا محدودا بسيط الترابط **(simply connected)** في الفراغ الثلاثي $\mathbb{R}^3$ محدودا بسطح أملس مغلق $\partial\Omega$. لأي متجه دالي $\vec{F}$ في $C^1(\Omega)$

$$\iiint_{\Omega} (\nabla.\vec{F})dw = \iint_{\partial\Omega} (\vec{F}.\vec{n})d\sigma$$

حيث $\vec{n}$ متجه الوحدة على $\partial\Omega$ الموجة إلى الخارج.

نتـــــائج:

(i) في حالة $\vec{F} = \nabla u$ نظرية تأخذ الصورة

$$\iiint_{\Omega} (\nabla^2 u)dw = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} d\sigma$$

(ii) متطابقة جرين الأولى:

$$\iiint_{\Omega} (u\nabla^2 v + \nabla u.\nabla v)dw = \iint_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial n})d\sigma \quad \forall u \in C^1(\overline{\Omega}),\ v \in C^2(\overline{\Omega})$$

(iii) متطابقة جرين الثانية:

$$\iiint_{\Omega} (u\nabla^2 v + v\nabla^2 u)dw = \iint_{\partial\Omega} (u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n})d\sigma \quad \forall u, v \in C^2(\overline{\Omega})$$

(iv) نظرية التباعد تطبق أيضا في المستوى حيث تصبح Ω نطاقا مستويا و يصبح $\partial\Omega$ منحنيا مغلقا حول Ω. كذلك متطابقات جرين الأولى و الثانية تظل صحيحة في $\mathbb{R}^2$.

4.2 معادلـــــــة لابـــلاس:

سندرس في هذا البند خواص المعادلة الناقصية من خلال دراسة خواص معادلة بواسون

(4.2.1) $$\nabla^2 u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = f(x,y)$$

أو صيغتها المتجانسة

(4.2.2) $$\nabla^2 u(x,y) = u_{xx} + u_{yy} = 0$$

المعادلة (4.2.2) تسمى معادلة لابلاس ، و تسمى حلولها في C^2 دوال توافقية (harmonic functions) .

سندرس هنا خواص الحل (4.2.1) في نطاق محدود $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ تحت أحد الشروط الحدية التالية:

(أ) شرط ديرشلية (Dirchlet B.C)

$$u(x,y) = g(x,y) \qquad \forall\ (x,y) \in \partial\Omega$$

(ب) شرط نويمان (Neumann B.C)

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} = g(x,y) \qquad \forall\ (x,y) \in \partial\Omega$$

(ت) شرط مختلط (Mixed (Rdain)

$$a\frac{\partial u(x,y)}{\partial n} + bu(x,y) = g(x,y) \qquad \forall\ (x,y) \in \partial\Omega$$

لاحظ إننا نشترط ضمنا أن المحيط $\partial\Omega$ منحنى أملس لضمان وجود العمودي $\vec{n}$ علية. و بذلك نحصل على المسائل الثلاث

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u(x,y) = f(x,y), \quad u(x,y) = g(x,y) \quad \text{on } \partial\Omega \qquad \text{(Dirichlet problem)}\\
&\nabla^2 u(x,y) = f(x,y), \quad u_n(x,y) = g(x,y) \quad \text{on } \partial\Omega \qquad \text{(Neumann problem)}\\
&\nabla^2 u(x,y) = f(x,y), \quad au_n(x,y) + bu(x,y) = g(x,y) \quad \text{on } \partial\Omega \qquad \text{(Mixed problem)}
\end{aligned}$$

تعريف 4.2.1

لتكن $\varphi(x,y)$ دالة متصلة على $\Omega \in \mathbb{R}^2$، و لتكن $C(p,r)$ محيط الدائرة التي مركزها $p = (x_0, y_0)$ و نصف قطرها ، أي

$$c(p,r) = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2\right\}$$

إذا كانت $C(p,r) \subset \Omega$ فأن الدالة

$$\bar{\varphi}(r) = \frac{1}{2\pi r}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(r,\theta) r d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(r,\theta) d\theta$$

تمثل متوسط الدالة φ على الدائرة $C(p,r)$، و هي دالة في المتغير .

أما إذا كان $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ فأن متوسط الدالة $\varphi \in C(\Omega)$ على سطح الكرة

$$c(p,\rho) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0) = \rho^2\right\}$$

يعطى بالصيغة

$$\bar{\varphi}(\rho) = \frac{1}{2\pi\rho^2}\iint_S \varphi(x,y,z) d\sigma$$

حيث

$$x = x_0 + \rho\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y = y_0 + \rho\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = z_0 + \rho\cos\varphi.$$

و عنصر السطح على S، $d\sigma$ يعطى بالصورة

$$d\sigma = \rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$$

إذا يمكن كتابة متوسط الدالة $\varphi \in C(\Omega)$ على سطح الكرة على الصورة

$$\bar{\varphi}(\rho) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi(x_0 + \rho\sin\varphi\cos\theta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\theta, z_0 + \rho\cos\varphi)\rho^2 \sin\varphi d\varphi d\theta$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi} \varphi(x_0 + \rho\sin\varphi\cos\theta, y_0 + \rho\sin\varphi\sin\theta, z_0 + \rho\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi d\theta$$

خـــــواص الـــــدوال التوافقية:

نظرية (4.2.1) (نظرية القيمة المتوسطة للدوال التوافقية)

لتكن u دالة توافقية في $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. لأي نقطة $p \in \Omega$ إذا كانت $S(p,\rho) \subset \Omega$ فان

$$u(p) = \bar{u}(p) = \frac{1}{4\pi\rho^2}\iint_{S(p,\rho)} u(x,y,z) d\sigma .$$

نظرية(4.2.2) (مبدأ القيمة العظمى و الصغرى)

لتكن u دالة توافقية في $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ و متصلة على $\overline{\Omega}$. أما ان u ثابتة أو انها تأخذ قيمتها العظمى و قيمتها الصغرى على $\partial\Omega$.

نتيجة (4.2.1) :

لتكن u دالة توافقية في النطاق المحدد Ω و متصلة على $\overline{\Omega}$. إذا كان $|u(p)| \le k$ لكل $p \in \partial\Omega$ فان $|u(p)| \le k$ لكل $p \in \overline{\Omega}$. و بصفة خاصة، إذا كان $u \equiv 0$ على $\partial\Omega$ فان $u \equiv 0$ على $\overline{\Omega}$ بكاملها.

نظرية 4.2.3 (وحدانية الحل لمسألة ديريشلية)

لأي دالتين $f \in C(\Omega),\ \ g \in C(\Omega)$ فان مسالة ديريشلية

$$\nabla^2 u(x,y) = f(x,y) \ \text{ in } \ \Omega, \quad u(x,y) = g(x,y) \ \text{ on } \partial\Omega$$

لها حل وحيد في $C(\overline{\Omega})$، إن وجد.

البرهـــــان:

أفرض أن $u_1(x,y),\ u_2(x,y)$ حلان للمسألة. عندئذ نجد أن الفرق $u(x,y) = u_2(x,y) - u_1(x,y)$ دالة توافقية على Ω و متصلة على $\overline{\Omega}$، كما أن $u(x,y) \equiv 0$ على $\partial\Omega$. إذا لا بد أن $u(x,y) \equiv 0$ على $\overline{\Omega}$ (نتيجة (4.2.1)).

ملاحــــظات:

-1 بالا مكان تخفيف شرط اتصال الدالة g على $\partial\Omega$ إلى اتصال مقطعي و تبقى النظرية صحيحة.

-2 في مسالة نويمان نفرض أن $u(x,y) = u_2(x,y) - u_1(x,y)$ حيث $u_1(x,y),\ u_2(x,y)$ أي حلين للمسألة في $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ فنستنتج أن u تحقق

$$\nabla^2 u = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega$$

و من متطابقة جرين الأولى

$$\iiint_{\Omega} u \nabla^2 u + \iiint_{\Omega} \nabla u . \nabla u = \iint_{\partial\Omega} u u_n$$

نرى أن

$$\iiint_{\Omega} |\nabla u|^2 = 0$$

من أنصال $|\nabla u|$ على Ω نستنتج أن

$$\nabla u \equiv 0 \ \text{ in } \ \Omega \Rightarrow u = \text{constant on } \Omega$$

و من اتصال u على $\overline{\Omega}$ فان $u = \text{constant}$ على $\overline{\Omega}$.
إذا مسالة نويمان ليست وحيدة الحل، بل أن إضافة ثابت إلى أي حل يعطى حلا أخر (كما هو متوقع).

-3 في مسالة نويمان

$$\nabla^2 u = f \ \text{ in } \ \Omega, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} = g \ \text{ on } \ \partial\Omega$$

نلاحظ من نظرية التباعد أن

$$\iiint_{\Omega} f = \iiint_{\Omega} \nabla^2 u = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = \iint_{\partial\Omega} g$$

مما يعنى أن العلاقة $\iiint_{\Omega} f = \iint_{\partial\Omega} g$ بين الدالتين f, g شرط لازم لإمكانية حل مسالة نويمان. وبصفة خاصة فان الحالة الخاصة $f \equiv 0$ تقتضى أن يكون $\iint_{\partial\Omega} g = 0$، أي أن الدالة التوافقية يكون فيضها (flux) خلال السطح $\partial\Omega$، $\iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n}$، صفرا.

-4 في المسالة المختلطة

$$\nabla^2 u = f \ \text{ in } \ \Omega, \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{n}} + bu = g \ \text{ on } \ \partial\Omega$$

حيث b دالة معرفة على $\partial\Omega$ تعتمد وحدانية الحل على الدالة b. فعندما تكون $b = 0$ نعلم أنة لا يوجد حل وحيد. لاحظ أن الدالة $v = u_2 - u_1$، حيث $u_1(x, y),\ u_2(x, y)$ اى حلان للمسألة المختلطة تحقق

$$\nabla^2 v = 0 \ \text{ in } \ \Omega, \quad \frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{n}} + bv = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega$$

و من متطابقة جرين الأولى

$$\iiint_{\Omega} \left|\nabla^2 v\right|^2 = \iint_{\partial\Omega} v v_n = -\iint_{\partial\Omega} b v^2$$

و بما أن الطرف الأيسر غير سالب، كما أن $v^2 \geq 0$، فان طرفي المعادلة يساويان الصفر في حالة أن b دالة موجبة و متصلة على $\partial\Omega$، و عندئذ

$$bv^2 = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega \Rightarrow v = 0 \ \text{ on } \ \partial\Omega$$

كما أن

$$\nabla v = 0 \ \text{ in } \ \Omega \Rightarrow v = \begin{cases} \text{constant} & \text{on } \ \Omega \\ 0 & \text{in } \ \overline{\Omega} \end{cases}$$

وبذلك نحصل على حل وحيد للمسالة المختلطة في حالة $b > 0$ متصلة. ويمكن الحصول على هذه النتيجة تحت شروط أخف على الدالة b، إذا يكفى أن تكون b متصلة قطعيا و أن تكون $b \geq 0$، $b \neq 0$ (أثبت ذلك !!!).

مثـــــال 4.2.1

بين أن معادلة لابلاس $\nabla^2 u(x,y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ في الإحداثيات القطبية (r,θ) تكتب على الصورة ألأتيه:

$$\nabla^2 u(r,\theta) = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0 \tag{4.2.3}$$

الحـــــل

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{4.2.4}$$

من المعادلات (4.2.4) نحصل على

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \theta = \tan^{-1}(\frac{y}{x}). \tag{4.2.5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= u_r \cos\theta - u_\theta\left(\frac{1}{r}\sin\theta\right), \\
\frac{\partial u}{\partial y} &= u_r \sin\theta + u_\theta\left(\frac{1}{r}\cos\theta\right), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= u_{rr}\cos^2\theta - 2u_{r\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + u_r\frac{\sin^2\theta}{r} + u_{\theta\theta}\frac{\sin^2\theta}{r^2} + 2u_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}, \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= u_{rr}\sin^2\theta + 2u_{r\theta}\frac{\sin\theta\cos\theta}{r} + u_r\frac{\cos^2\theta}{r} + u_{\theta\theta}\frac{\cos^2\theta}{r^2} - 2u_\theta\frac{\sin\theta\cos\theta}{r^2}.
\end{aligned}$$

باستخدام التفاضلات نحصل على المطلوب.

بنفس الطريقة نحصل على معادلات لابلاس في الإحداثيات الكروية (r,θ,φ) و الاسطوانية (r,φ,z) على الترتيب (تمرين).

$$\nabla^2 u(r,\theta,\varphi) = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2} + \frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right] = 0 \tag{4.2.6}$$

$$\nabla^2 u(r,\varphi,z) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{4.2.7}$$

4.3 مسائل في المستوى:

مثال 4.3.1

أستخدم فصل المتغيرات لحل المسألة

$$\nabla^2 u(x,y)=0, \quad (x,y)\in(0,2)\times(0,1)$$
$$u(0,y)=0, \quad u_x(2,y)=0$$
$$u(x,0)=0, \quad u(x,1)=\sin\left(\frac{5\pi}{4}x\right).$$

الحـــــل:

أفرض أن الحل يعطى كما يلي:

$$u(x,y)=v(x)w(y) \tag{4.3.1}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ثم عمل فصل للمتغيرات نحصل على

$$\frac{v''(x)}{v(x)}+\frac{w''(y)}{w(y)}=0 \tag{4.3.2}$$

إذا

$$\frac{v''(x)}{v(x)}=-\frac{w''(y)}{w(y)}=-\lambda^2 \tag{4.3.3}$$

من المعادلة (4.3.3) نحصل على

$$v''(x)+\lambda^2 v(x)=0, \quad w''(y)-\lambda^2 w(y)=0 \tag{4.3.4}$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$v(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x), \tag{4.3.5}$$

$$w(y)=C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y). \tag{4.3.6}$$

يمكن كتابة الحل (4.3.1) على الشكل التالي

$$u(x,y)=\big(A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)\big)\big(C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y)\big) \tag{4.3.7}$$

باستخدام الشروط نحصل على

$$u(0,y)=0 \Rightarrow A\big[C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y)\big]=0 \Rightarrow A=0,$$
$$u(x,0)=0 \Rightarrow CB\sin(\lambda x)=0 \Rightarrow C=0 \ \text{ or } \ B=0 \ \text{(refused)}$$

أذن

$$u(x,y)=H\sin(\lambda x)\sinh(\lambda y), \quad H=BD$$

$$u_x(x,y)=\lambda H\cos(\lambda x)\sinh(\lambda y)$$

أيضا

$$u_x(2,y)=0 \Rightarrow \lambda H\cos(2\lambda)\sinh(\lambda y)=0 \quad \forall\ y\in(0,1)$$
$$\Rightarrow \lambda=0 \text{ (refused)} \quad \text{or} \quad H=0 \text{ (refused)} \quad \text{or} \quad \cos(2\lambda)=0$$
$$\Rightarrow \lambda_n=\left(\frac{2n+1}{4}\right)\pi, \quad n=0,1,2,\cdots,$$

وبذلك نحصل على متتالية من الحلول التي تحقق كل الشروط باستثناء الشرط على $y=1$.

$$u_n(x,y)=H_n\sin(\lambda_n x)\sinh(\lambda_n y)$$
$$\Rightarrow u_n(x,1)=H_n\sin(\lambda_n x)\sinh(\lambda_n)$$
$$\Rightarrow \sin(\frac{5\pi}{4}x)=H_n\sin((\frac{2n+1}{4})\pi x)\sinh((\frac{2n+1}{4})\pi)$$
$$\Rightarrow H_n=\begin{cases}\dfrac{1}{\sinh(\frac{5\pi}{4})} & n=2\\ 0 & n\neq 2\end{cases}$$

و يكون الحل على الصورة

$$u(x,y)=u_2(x,y)=\sin(\frac{5\pi}{4}x)=\frac{1}{\sinh(\frac{5\pi}{4})}\sin(\frac{5\pi}{4}x)\sinh(\frac{5\pi}{4}y)$$

ملحوظة:

لاحظ إننا بعد الحصول على الحل العام للمعادلة التفاضلية، بدأنا بتطبيق الشروط المتجانسة عند $x=0,\ y=0$ ، ثم الشرط الحدي عند $x=2$ و أخيرا الشرط غير المتجانس عند $y=1$ ، أي من الأبسط إلى الأعقد.

مثـــــال 4.3.2

أستخدم فصل المتغيرات لحل

$$\nabla^2 u(x,y)=0, \qquad (x,y)\in(0,a)\times(0,b)$$
$$u(0,y)=0, \qquad 0\le y\le b$$
$$u(a,y)=0 \qquad 0\le y\le b$$
$$u(x,b)=0, \qquad 0\le x\le a$$
$$u(x,0)=f(x), \qquad 0\le x\le a$$

الحـــــل:

أفرض أن الحل يعطى كما يلي:

$$u(x,y)=v(x)w(y) \tag{4.3.8}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ثم عمل فصل للمتغيرات نحصل على

$$\frac{v''(x)}{v(x)}+\frac{w''(y)}{w(y)}=0 \tag{4.3.9}$$

إذا

$$\frac{v''(x)}{v(x)}=-\frac{w''(y)}{w(y)}=-\lambda^2 \tag{4.3.10}$$

من المعادلة (4.3.10) نحصل على

$$v''(x)+\lambda^2 v(x)=0,\quad w''(y)-\lambda^2 w(y)=0 \tag{4.3.11}$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$v(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x), \tag{4.3.12}$$

$$w(y)=C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y). \tag{4.3.13}$$

يمكن كتابة الحل (4.3.8) على الشكل التالي

$$u(x,y)=\big(A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)\big)\big(C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y)\big) \tag{4.3.14}$$

باستخدام الشروط نحصل على

$$\begin{aligned}&u(0,y)=0\Rightarrow A\big[C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y)\big]=0\Rightarrow A=0,\\&u(a,y)=0\Rightarrow B\sin(\lambda a)=0\Rightarrow \sin(\lambda a)=0\Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{a},\ n=1,2,\cdots\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

$$u(x,y)=B\sin(\lambda x)\big(C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y)\big) \tag{4.3.16}$$

$$\begin{aligned}&u(x,b)=0\Rightarrow B\sin(\lambda x)\big(C\cosh(b\lambda)+D\sinh(b\lambda)\big)=0\\&\Rightarrow \frac{C}{D}=-\tanh(b\lambda)\end{aligned} \tag{4.3.17}$$

بالتعويض من (4.3.17) و (4.3.15) في (4.3.16) نجد

$$u(x,y)=B\sin(\frac{n\pi}{a}x)\left(-D\tanh(\frac{n\pi b}{a})\cosh(\frac{n\pi}{a}y)+D\sinh(\frac{n\pi}{a}y)\right)$$

$$\Rightarrow u(x,y)=\frac{-BD}{\cosh(\frac{n\pi b}{a})}\sin(\frac{n\pi}{a}x)\left[\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}-\frac{n\pi y}{a}\right)\right]$$

$$\Rightarrow u(x,y)=E_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)\left[\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}-\frac{n\pi y}{a}\right)\right],\quad E_n=\frac{-BD}{\cosh(\frac{n\pi b}{a})}\ ,n=\in\mathbb{N}_0$$

حيث E_n ثوابت اختيارية.

بأخذ تركيبة خطية من هذه الحلول نحصل على الحل العام للمعادلة على الصورة

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)\left[\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}-\frac{n\pi y}{a}\right)\right] \tag{4.3.18}$$

باستخدام الشرط الأخير، $u(x,0)=f(x)$، نجد

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right) \tag{4.3.19}$$

بضرب طرفي المعادلة (4.3.19) في $\sin(\frac{m\pi x}{a})$

$$\sin(\frac{m\pi}{a}x)f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)$$

بإجراء التكامل للطرفين على الفترة (0,a) مع الوضع في الاعتبار أن

$$\int_0^a\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sin(\frac{m\pi}{a}x)dx=\begin{cases}0 & n\neq m\\ \frac{a}{2} & n=m\end{cases}$$

نحصل على

$$E_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\sin(\frac{n\pi}{a}x)d(x) \tag{4.3.20}$$

بالتعويض من (4.3.20) في (4.2.19) نحصل على الحل النهائي على الصورة

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{2}{a}\int_0^a f(x')\sin(\frac{n\pi}{a}x')d(x')\right]\frac{\sin(\frac{n\pi}{a}x)\sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\right\}$$

مثـــــال 4.3.3

باستخدام فصل المتغيرات أوجد حل مسألة دريشلية الآتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \tag{4.3.21}$$

$$u(x,0)=f_1(x),\qquad 0<x<a \tag{4.3.22}$$

$$u(x,b)=f_2(x),\qquad 0<x<a \tag{4.3.23}$$

$$u(0,y)=0,\qquad 0<y<b \tag{4.3.24}$$

$$u(a,y)=0,\qquad 0<y<b \tag{4.3.25}$$

الحــــل:

افرض أن

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \tag{4.3.26}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

بالقسمة على XY نحصل على

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\lambda^2 \tag{4.3.27}$$

من الشرطين (4.3.24) و (4.3.25) و الحل (4.3.26) نحصل على

$$X(0)=0, \qquad \mathrm{X}(a)=0 \tag{4.3.28}$$

من المعادلة (4.3.27) نحصل على المعادلتين التفاضليتين العاديتين

$$X''(x)-\lambda^2X(x)=0, \quad Y''(y)+\lambda^2Y(y)=0.$$

ويكون الحل للمعادلتين على الصورة

$$X(x)=A\cosh(\lambda x)+B\sinh(\lambda x), \quad \mathrm{Y(y)=Ccos(}\lambda\mathrm{y)+Dsin(}\lambda\mathrm{y).}$$

لكي يحقق الحل $X(x)$ الشرطين (4.3.28) يجب أن يكون $A=B=0$ ، أي أن $u(x,y)=0$ و هذا مرفوض. لذلك نأخذ ثابت الفصل بالإشارة السالبة في المعادلة (4.3.27). في هذه الحالة نحصل على معادلتين على الصورة

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0, \quad Y''(y)-\lambda^2Y(y)=0. \tag{4.3.29}$$

ويكون الحل على الصورة

$$X(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x), \quad \mathrm{Y(y)=Ccosh(}\lambda\mathrm{y)+Dsinh(}\lambda\mathrm{y).}$$

من المعادلة الأولى نجد

$$X_n(x)=B\sin(\lambda_n x), \qquad \lambda_{\mathrm{n}}=\frac{n\pi}{a}$$

ويكون

$$\begin{aligned}u_n(x,y)=X_n(x)Y_n(y)&=B\sin(\lambda_n x)[C\cosh(\lambda_n y)+D\sinh(\lambda_n y)]\\&=[a_n\cosh(\lambda_n y)+b_n\sinh(\lambda_n y)]\sin(\lambda_n x)\end{aligned}$$

و يكون مجموع هذه الدوال أيضا يحقق نفس الشروط و المعادلات. و بذلك يكون الحل على الشكل

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cosh(\lambda_n y)+b_n\sinh(\lambda_n y)]\sin(\lambda_n x) \tag{4.3.30}$$

باستخدام الشرط غير المتجانس الأول (4.3.23) نحصل على

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=f_1(x),\qquad 0<x<a \tag{4.3.31}$$

من الواضح أن a_n معامل فوريية للدالة $f_1(x)$

$$a_n=\frac{2}{a}\int_0^a f_1(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx.$$

من الشرط غير المتجانس (4.3.23) نجد

$$u(x,b)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)+b_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)=f_2(x),\qquad 0<x<a.$$

أيضا

$$\left[a_n\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)+b_n\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)\right]=c_n=\frac{2}{a}\int_0^a f_2(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)dx,$$

$$b_n=\frac{c_n-a_n\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}. \tag{4.3.32}$$

بالتعويض من (4.3.32) في (4.3.30) نحصل على حل المسألة

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_n\frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}+a_n\left[\cosh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)-\frac{\cosh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)\right]\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_n\frac{\sinh\left(\frac{n\pi y}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}+a_n\left[\frac{\sinh\left(\frac{n\pi(b-y)}{a}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi b}{a}\right)}\right]\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

على سبيل المثال، إذا كانت

$$f_1(x)=f_2(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{a} & 0<x<\dfrac{a}{2}\\[2ex] 2\left(\dfrac{1-x}{a}\right) & \dfrac{a}{2}<x<a.\end{cases}$$

فان

$$c_n=a_n=\frac{8\sin(n\pi/2)}{\pi^2n^2}.$$

ويكون الحل الذي يحقق هذه الشروط على الصورة

$$u(x,y)=\frac{8}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n\pi/2)}{n^2}\left\{\frac{\sinh[(n\pi/a)y]+\sinh[(n\pi/a)(b-y)]}{\sinh[(n\pi b/a)}\right\}\sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right)$$

<u>مثـــــال 4.3.3</u>

باستخدام فصل المتغيرات أوجد حل مسألة دريشلية الآتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \tag{4.3.33}$$

$$u(x,0)=f_1(x),\quad 0<x<a \tag{4.3.34}$$

$$u(x,b)=f_2(x),\quad 0<x<a \tag{4.3.35}$$

$$u(0,y)=g_1(y),\quad 0<y<b \tag{4.3.36}$$

$$u(a,y)=g_2(y),\quad 0<y<b \tag{4.3.37}$$

<u>الحــــــل:</u>

من الملاحظ في هذا المثال أن جميع الشروط الحدية غير متجانسة على الجوانب الأربع للمستطيل. يمكن تقسيم المسألة إلى مسالتين شبيهتين للمثال السابق.

نفرض أن حل المسالة يكتب على الصورة $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ حيث كل من الحلين $u_1(x,y),\ u_2(x,y)$ يحقق مسالة دريشلية مختلفة كما هو موضح

$$\begin{array}{ll}
\nabla^2 u_1(x,y)=0, & \nabla^2 u_2(x,y)=0\\
u_1(x,0)=f_1(x), & u_2(x,0)=0\\
u_1(x,b)=f_2(x), & u_2(x,b)=0\\
u_1(0,y)=0, & u_2(0,y)=g_1(y),\\
u_1(a,y)=0, & u_2(a,y)=g_2(y).
\end{array}$$

من الواضح أن $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ حل للمعادلة الأصلية. أيضا كلا من $u_1(x,y),\ u_2(x,y)$ يحقق شروط غير متجانسة على جانبان متوازيان من مستطيل. في المثال (4.3.2) قمنا بإيجاد $u_1(x,y)$. يمكن أيجاد $u_2(x,y)$ (تمرين) على الصورة

$$u_2(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{A_n\sinh[(n\pi/b)x]+B_n\sinh[(n\pi/b)(a-x)]}{\sinh[(n\pi a/b)}\right\}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

حيث

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b g_2(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy,$$
$$B_n = \frac{2}{b}\int_0^b g_1(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy.$$

الحـــــل

نفرض أن $u_2(x,y) = v(x)w(y)$ ، بالتعويض فى المعادلة و عمل فصل للمتغيرات مع وضع ثابت الفصل موجب λ^2 نحصل على معادلتين تفاضليتين على الشكل:

$$v''(x) - \lambda^2 v(x) = 0, \quad w''(y) + \lambda^2 w(y) = 0$$

بعد حل المعادلتين يمكن كتابة الحل على الشكل التالي

$$u_2(x,y) = \left(C\cos(\lambda y) + D\sin(\lambda y)\right)\left(A\cosh(\lambda y) + B\sinh(\lambda y)\right)$$

باستخدام الشرط الأول و الثاني نحصل على $n \in \mathbb{N}_0$,$\lambda = \frac{n\pi}{b}$,$C = 0$ و يأخذ الحل الصورة

$$u_2(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh(\frac{n\pi}{b}y) + C_n\sinh(\frac{n\pi}{b}y)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)$$

من الشرط غير المتجانس الأول نحصل على

$$g_1(y) = \sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad 0 < y < b$$

حيث

$$A_n = \frac{2}{b}\int_0^b g_1(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy.$$

من الشرط غير المتجانس الثاني نحصل على

$$g_2(y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) + C_n\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\right]\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right), \quad 0 < y < b$$

حيث

$$\left[A_n\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right) + C_n\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)\right] = B_n = \frac{2}{b}\int_0^b g_1(y)\sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right)dy$$

أي أن

$$C_n = \frac{B_n - A_n\cosh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi a}{b}\right)}$$

بالتعويض عن قيمة C_n نحصل على الشكل النهائي للحل

مثـــــال 4.3.4

باستخدام فصل المتغيرات أوجد حل مسألة الشروط الحدية المختلطة الآتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, \quad (x,y)\in(0,a)\times(0,b) \tag{4.3.38}$$

$$\begin{aligned} u_x(0,y)&=0, \quad 0\le y\le b,\\ u_x(a,y)&=0, \quad 0\le y\le b, \end{aligned} \tag{4.3.39}$$

$$u(x,b)=0, \quad 0\le x\le a \tag{4.3.40}$$

$$u(x,0)=f(x), \quad 0\le x\le a \tag{4.3.41}$$

الحـــــل:

أفرض أن الحل يعطى كما يلي:

$$u(x,y)=v(x)w(y)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية ثم عمل فصل للمتغيرات نحصل على

$$\frac{v''(x)}{v(x)}=-\frac{w''(y)}{w(y)}=-\lambda^2 \tag{4.3.42}$$

أي أن

$$v''(x)+\lambda^2 v(x)=0, \quad w''(y)-\lambda^2 w(y)=0$$

بحل المعادلتين نحصل على

$$v(x)=A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x),$$

$$w(y)=C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y).$$

يمكن كتابة الحل على الشكل التالي

$$u(x,y)=\big(A\cos(\lambda x)+B\sin(\lambda x)\big)\big(C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y)\big)$$

حيث

$$u_x(x,y)=\big(-\lambda A\sin(\lambda x)+\lambda B\cos(\lambda x)\big)\big(C\cosh(\lambda y)+D\sinh(\lambda y)\big)$$

باستخدام الشرطين (4.3.39) نحصل على

$$u_x(0,y)=0\Rightarrow B=0, \quad u_x(a,y)=0\Rightarrow \lambda=\frac{n\pi}{a}, \quad n\in\mathbb{N}_0$$

و يكون

$$u(x,y)=\cos(\lambda x)\big(AC\cosh(\lambda y)+AD\sinh(\lambda y)\big)$$

باستخدام الشرط (4.3.40) نحصل على

$$u(x,b)=0 \Rightarrow C=-D\tanh(\lambda b)$$

يمكن كتابة الحل على الصورة

$$u_n(x,y)=E_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

أي أن

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(y-b)\right)$$

حيث $E_n=\dfrac{BD}{\cosh(n\pi/a)},\quad n=1,2,\cdots,$.

باستخدام الشرط الأخير نجد

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}E_n\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(-b)\right)$$

حيث

$$E_n\sinh\left(\frac{n\pi}{a}(-b)\right)=\frac{2}{a}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx$$

ويكون الحل على الصورة

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{-2}{a\sinh\left(\dfrac{n\pi b}{a}\right)}\int_0^a f(x)\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)dx\right]\cos\left(\frac{n\pi}{a}x\right)\right\}$$

4.4 (مسألة ديريشلية في الدائرة) The Dirichlet problem for a circle

معادلة لابلاس في الإحداثيات القطبية هي:

$$\nabla^2 u(r,\theta)=u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0 \tag{4.4.1}$$

لحل المعادلة بفصل المتغيرات، نفرض أن

$$u(r,\theta)=v(r)w(\theta)$$

بالتعويض في المعادلة (4.4.1) نجد أن

$$r^2v''w+rv'w+vw''=0\Rightarrow \frac{r^2v''+rv'}{v}=-\frac{w''}{w}=\lambda^2$$

ثم نحصل على المعادلتين:

$$w''+\lambda^2 w=0\Rightarrow w(\theta)=\begin{cases} a\cos(\lambda\theta)+b\sin(\lambda\theta) & \lambda\neq 0\\ a+b\theta & \lambda=0\end{cases},$$

و معادلة كوشى أويلر (راجع Zill)

$$r^2v'' + rv' - \lambda^2 v = 0 \Rightarrow v(r) = \begin{cases} cr^{\lambda} + dr^{-\lambda} & \lambda \neq 0 \\ c + d\ln r & \lambda = 0 \end{cases}$$

و بذلك يكون حل المعادلة (4.4.1) في المستوى على الصورة

$$u_{\lambda}(r,\theta) = \begin{cases} (a+b\theta)(c+d\ln r) & \lambda = 0 \\ (cr^{\lambda} + dr^{-\lambda})(a\cos\lambda\theta + b\sin\lambda\theta) & \lambda \neq 0 \end{cases} \tag{4.4.2}$$

بما أن $\theta \in [-\pi,\pi]$,$\forall\ r > 0$ $\quad u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)$ فانه من المعادلة (4.4.2) نجد:

عندما $\lambda = 0$:

$$\begin{aligned} &(c+d\ln r)(a+b\theta) = (c+d\ln r)(a+b(\theta+2\pi)) \\ &\Rightarrow (a+b\theta) = (a+b(\theta+2\pi)) \Rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

عندما $\lambda \neq 0$:

$$\begin{aligned} &a\cos(\lambda\theta) + b\sin(\lambda\theta) = a\cos(\lambda(\theta+2\pi)) + b\sin(\lambda(\theta+2\pi)) \\ &\Rightarrow \begin{cases} a\cos(2\lambda\pi) + b\sin(2\lambda\pi) = a, \\ -a\sin(2\lambda\pi) + b\cos(2\lambda\pi) = b. \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} \cos(2\lambda\pi) = 1 \\ \sin(2\lambda\pi) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda = n,\ \ n \in \mathbb{N}_0 \end{aligned}$$

و تكون متتالية الحلول لمعادلة لابلاس في الإحداثيات القطبية هي:

$$u_n(r,\theta) = \begin{cases} a_0 + d_0 \ln r & n = 0 \\ (r^n + d_n r^{-n})(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) & n \neq 0 \end{cases},\ \ n \in \mathbb{N} \tag{4.4.3}$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$u(r,\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,\theta) = a_0 + d_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r^n + d_n r^{-n}\right)\left(a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta\right) \tag{4.4.4}$$

<u>مسالة ديريشلية لمعادلة لابلاس في الدائرة هي:</u>

$$\begin{cases} \nabla^2 u(r,\theta) = 0 & 0 \leq r < R \\ u(R,\theta) = f(\theta) & -\pi \leq \theta \leq \pi \end{cases} \tag{4.4.5}$$

أي أن المطلوب إيجاد دالة توافقية في القرص المفتوح $D(0,R)$ الذي يأخذ القيم $f(\theta)$ على المحيط $\partial D(0,R)=C(0,R)$.

بما أن الدالة توافقية في القرص $D(0,R)$ لابد أن تكون متصلة عند $r=0$ (لأنها من رتبة C^2) فان معاملات $\ln r,\ r^n$ في المتتالية (4.4.3) لابد أن تكون صفر، أي أن $d_n=0$ لكل $n\in\mathbb{N}_0$. أذن من المعادلة (4.4.4) الحل العام المطلوب لمعادلة لابلاس هو:

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right) \tag{4.4.6}$$

و بتطبيق الشرط الحدي عند $r=R$

$$u(R,\theta)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}R^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right)$$

أي أن

$$\begin{aligned} f(\theta)&=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(R^na_n\right)\cos n\theta+\left(R^nb_n\right)\sin n\theta\right]\\ &=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right]\end{aligned}$$

حيث $A_n=\left(R^na_n\right),\ B_n=\left(R^nb_n\right)$ هي معاملات فوريير في مفكوك $f(\theta)$، على افتراض إن $f(\theta)$ تحقق الشروط اللازمة لتمثيلها بسلسلة فوريير، أي أنها ملساء قطعيا على $[-\pi,\pi]$. و في هذه الحالة يكون:

$$\begin{aligned} A_0&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta=a_0,\\ A_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos n\theta d\theta, \qquad n\in\mathbb{N}_0\\ B_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin n\theta d\theta, \qquad n\in\mathbb{N}_0.\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

و بذلك يكون حل المسالة (الوحيد) هو

$$u(r,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{r}{R}\right)^n\left[A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right] \tag{4.4.8}$$

حيث $A_n,\ B_n$ هي معاملات فوريير في مفكوك $f(\theta)$.

مثال (4.4.1)

أستخدم فصل المتغيرات لحل مسالة ديريشلية لمعادلة لابلاس في الدائرة

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \qquad 0 \le r < R$$
$$u(R,\theta) = \theta \qquad -\pi \le \theta \le \pi \tag{4.4.9}$$

الحـــــل:

باستخدام المعادلات (4.4.8) و (4.4.9) نجد

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta d\theta = 0,$$
$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta \cos n\theta d\theta = 0, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.4.10}$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \theta \sin n\theta d\theta = -\frac{2}{n}(-1)^n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$u(r,\theta) = -2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{r}{R}\right)^n \frac{\sin n\theta}{n} \tag{4.4.11}$$

مثال (4.4.2)

أستخدم فصل المتغيرات لحل مسالة الشروط الحدية

$$\nabla^2 u(r,\theta) = 0 \qquad 0 \le r < 1, \quad -\pi < \theta \le \pi$$
$$u(1,\theta) = 0 \qquad -\pi < \theta \le 0$$
$$u(1,\theta) = 1 \qquad 0 < \theta \le \pi$$

الحـــــل:

باستخدام المعادلات (4.4.8) و (4.4.9) نجد

$$A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(1,\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} d\theta = \frac{1}{2},$$
$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(1,\theta)\cos n\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos n\theta d\theta = 0, \qquad n \in \mathbb{N} \tag{4.4.12}$$
$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(1,\theta)\sin n\theta d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin n\theta d\theta = \frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n), \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\pi} r^n (1-(-1)^n)\sin n\theta \tag{4.4.13}$$

مثـــــال (4.4.3)

أستخدم فصل المتغيرات لحل مسالة الشروط الحدية

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u(r,\theta)=0, \quad 0<\theta<\pi, \quad 0<r<R,\\
&u(R,\theta)=u_0, \quad 0<\theta<\pi,\\
&u(r,0)=1, \quad 0<r<R,\\
&u(r,\pi)=0, \quad 0<r<R.
\end{aligned}$$

الحـــــل:

أفرض أن $u(x,y)=v(r)w(\theta)$ بالتعويض في معادلة لابلاس و فصل المتغيرات نحصل على

$$\frac{r^2v''(r)+rv'(r)}{v(r)}=-\frac{w''(\theta)}{w(\theta)}=\lambda^2$$

و من ثم نحصل على المعادلتين

$$\begin{aligned}
&r^2v''(r)+rv'(r)-\lambda^2 v(r)=0,\\
&w''(\theta)+\lambda^2 w(\theta)=0.
\end{aligned}$$

و يكون الحل على الصورة

$$u(r,\theta)=\left[A\cos(\lambda\theta)+B\sin(\lambda\theta)\right]\left[Cr^{\lambda}+Dr^{-r}\right]$$

من الشرط الثاني و الثالث نحصل على $A=0$,$\lambda=n,\ n\in\mathbb{N}$ وتأخذ متتالية الحلول الصورة

$$u_n(r,\theta)=\left(A_nr^n+B_nr^{-n}\right)\sin(n\theta)$$

لكي تكون الدالة محدودة عند $r=0$ يجب وضع $B_n=0$ و يأخذ الحل الصورة

$$u(r,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}A_nr^n\sin(n\theta)$$

باستخدام الشرط الأول نجد

$$u_0=\sum_{n=1}^{\infty}A_nR^n\sin(n\theta)$$

حيث

$$A_nR^n=\int_0^{\pi}u_0\sin(n\theta)d\theta$$

بإجراء التكامل نحصل على

$$A_n=\frac{2u_0[1-(-1)^n]}{n\pi R^n}$$

و يكون الحل في الصورة النهائية على الشكل

$$u(r,\theta)=\frac{2u_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{[1-(-1)^n]}{n}\right)\left(\frac{r}{R}\right)^n\sin(n\theta)$$

4.5 مسألة ديريشلية في الفراغ

4.5.1 مسألة ديريشلية في الاحداثيات الاسطوانية:

باستخدام التحويل

$$x=r\cos\theta,\ \ y=r\sin\theta,\ \ z=z$$

يمكن كتابة معادلة لابلاس (4.2.2) على الصورة (4.2.7). أي أن

$$\nabla^2u(r,\theta,z)=\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=0. \tag{4.5.1}$$

لنفرض أن

$$u(r,\theta,z)=v(r,\theta)w(z)$$

$$\frac{\nabla^2u(r,\theta,z)}{u(r,\theta,z)}=\frac{1}{v(r,\theta)}\left[\frac{\partial^2v(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v(r,\theta)}{\partial\theta^2}\right]+\frac{w''(z)}{w(z)}=0$$

$$\frac{1}{v(r,\theta)}\left[\frac{\partial^2v(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v(r,\theta)}{\partial\theta^2}\right]=-\frac{w''(z)}{w(z)}=-\lambda^2 \tag{4.5.2}$$

حيث λ^2 ثابت الفصل الأول. من المعادلة (4.5.2) نحصل على

$$w''(z)-\lambda^2w(z)=0, \tag{4.5.3}$$

$$\frac{\partial^2v(r,\theta)}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v(r,\theta)}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2v(r,\theta)}{\partial\theta^2}+\lambda^2v(r,\theta)=0 \tag{4.5.4}$$

من المعادلة (4.5.3) نحصل على

$$w(z)=ae^{\lambda z}+be^{-\lambda z} \tag{4.5.5}$$

باستخدام فصل المتغيرات في المعادلة (4.5.4) افرض أن $v(r,\theta)=R(r)Q(\theta)$ ثم عوض في المعادلة (4.5.4) نحصل على

$$\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}+\lambda^2r^2=-\frac{Q''(\theta)}{Q(\theta)}=\nu^2 \tag{4.5.6}$$

حيث ν^2 ثابت الفصل الثاني.

من المعادلة (4.5.6) نحصل على المعادلتين

$$Q''(\theta)+\nu^2 Q(\theta)=0, \tag{4.5.7}$$

$$r^2R''(r)+rR'(r)+(\lambda^2 r-\nu^2)R=0 \tag{4.5.8}$$

من المعادلة (4.5.7) نحصل على

$$Q(\theta)=c\cos(\nu\theta)+d\sin(\nu\theta) \tag{4.5.9}$$

بوضع $\lambda = \xi$ في المعادلة (4.5.8) نحصل على

$$\frac{dR}{d\xi}=\frac{dR}{dr}\frac{dr}{d\xi}=\frac{1}{\lambda}\frac{dR}{dr},\quad \frac{d^2R}{d\xi^2}=\frac{1}{\lambda^2}\frac{d^2R}{dr^2}$$

و تأخذ المعادلة (4.5.8) الصورة

$$\xi^2\frac{d^2R}{d\xi^2}+\xi\frac{dR}{d\xi}+(\xi^2-\nu^2)R=0 \tag{4.5.10}$$

و هى معادلة بيسل ذات الحل العام

$$R(\xi)=c_1J_\nu(\xi)+c_2Y_\nu(\xi) \tag{4.5.11}$$

حيث $J_\nu(\xi)$ دالة بيسل من النوع الأول المتصلة عند $\xi=0$ لقيم $\nu\geq 0$، $Y_\nu(\xi)$ دالة بيسل من النوع الثاني الغير المحدودة في جوار $\xi=0$ لقيم $\nu\geq 0$. (أنظر كتاب الطرائق الرياضية للدكتور محمد القويز).

ألان باعتبار u دالة أحادية القيم في اعتمادها على المتغير θ فان

$$\begin{aligned}Q(\theta+2\pi)&=c\cos(\nu(\theta+2\pi))+d\sin(\nu(\theta+2\pi))\\&=c\cos(\nu 2\pi)+d\sin(\nu 2\pi))=Q(\theta)\end{aligned}$$

و نستنتج مرة أخرى أن $\nu=n\in\mathbb{N}_0$.

و من جهة أخرى فان اتصال الدالة u عند $r=0$ (لأنها توافقية) يقتضى أن يكون معامل $Y_n(\lambda r)$ مساويا للصفر. و بذلك نحصل على مجموعة الحلول

$$u_n(r,\theta,z)=J_n(\lambda r)\left[A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta)\right]\left(e^{\lambda z}+C_ne^{-\lambda z}\right) \tag{4.5.12}$$

<u>مثال 4.5.1</u>

أوجد الدالة التوافقية (حل معادلة لابلاس $\nabla^2u(r,\theta,z)=0$) في الحيز الاسطواني

$$\left\{(r,\theta,z):\ 0\leq r<a,\ 0\leq\theta\leq 2\pi,\ \ 0\leq z\leq b\right\}$$

التي تحقق الشروط

$$u(a,\theta,z)=f(\theta,z),\quad -\pi\leq\theta\leq\pi,\quad 0\leq z\leq b, \tag{4.5.13}$$

$$u(r,\theta,0)=u(r,\theta,b)=0,\quad 0\leq r<a,\quad -\pi\leq\theta\leq\pi. \tag{4.5.14}$$

حيث $f(\theta,0) = f(\theta,b) = 0$.

الحـــل

داخل الحيز الاسطواني الدالة $u = u(r,\theta,z)$ تحقق معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0. \tag{4.5.15}$$

أفرض أن الحل يكون على الصورة

$$u(r,\theta,z) = R(r)T(\theta)Z(z). \tag{4.5.16}$$

بالتعويض من (4.5.16) في (4.5.15) و فصل نجد

$$\frac{R''(r) + (1/r)R'(r)}{R(r)} + \frac{1}{r^2}\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = -\frac{Z''(z)}{Z(z)} = \lambda, \tag{4.5.17}$$

حيث λ ثابت الفصل الأول. بالفصل مرة أخرى نحصل على

$$\frac{r^2 R''(r) + rR'(r)}{R(r)} - r^2\lambda = -\frac{T''(\theta)}{T(\theta)} = \mu, \tag{4.5.18}$$

حيث λ ثابت الفصل الثاني. من (4.5.17) و (4.5.18) نحصل على الثلاث معادلات التفاضلية الآتية:

$$r^2 R''(r) + rR'(r) - (r^2\lambda + \mu)R(r) = 0, \tag{4.5.19}$$

$$T''(\theta) + \mu T(\theta) = 0, \tag{4.5.20}$$

$$Z''(z) + \lambda Z(z) = 0. \tag{4.5.21}$$

من المعادلة (4.5.20) نحصل على

$$T(\theta) = A\cos(\mu\theta) + B\sin(\mu\theta)$$

لكي تكون الدالة u متصلة داخل الاسطوانة، يجب أن تكون $T(\theta)$ دالة دورية و دورتها 2π .

$$\begin{aligned} T(\theta + 2\pi) &= A\cos(\mu(\theta + 2\pi)) + B\sin(\mu(\theta + 2\pi)) \\ &= A\cos(\mu\pi) + B\sin(\mu\pi)) = Q(\theta) \end{aligned}$$

و نستنتج أن $\mu = n^2 \in \mathbb{N}$ و يكون الحل على الصورة

$$T_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta) \tag{4.5.22}$$

حيث $A_n,\ B_n$ ثوابت اختيارية.

من الشرط (4.5.14) و الحل (4.5.16) نحصل على $Z(0)=Z(b)=0$ و يكون حل المعادلة (4.5.21) على الصورة

$$Z_m(z)=C_m\sin\left(\lambda\right),\ \ \lambda=\left(\frac{\mathrm{m}\pi}{\mathrm{b}}\right)^2,\quad m=1,2,3,\cdots \tag{4.5.23}$$

حيث C_m ثوابت اختيارية.

بالتعويض عن $\lambda,\ \mu$ في المعادلة (4.5.19) نجد

$$r^2R''(r)+rR'(r)-\left(r^2\left(\frac{m\pi}{b}\right)^2+n^2\right)R(r)=0,\quad 0\le r<a. \tag{4.5.24}$$

باستخدام التعويض $s=(m\pi r/b)$ المعادلة (4.5.24) تتحول إلى معادلة بيسل المعدلة من الرتبة n

$$s^2R''(s)+sR'(s)-(s^2+n^2)R(s)=0,\qquad 0\le s<\frac{m\pi a}{b}. \tag{4.5.25}$$

و هذه معادلة لها حلان مستقلان، دالة بيسل المعدلة من النوع الأول (هذه الدالة تكون محدودة بالقرب من الصفر) وهى

$$J_n(s)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(s/2)^{2k+n}}{k!\,\Gamma(k+n+1)},$$

و دالة بيسل المعدلة من النوع الثاني (هذه الدالة تصبح غير محدودة عندما $s\to 0$) و هي

$$Y_n(s)=\lim_{\nu\to n}\frac{\cos(\nu\pi)J_\nu(s)-J_\nu(s)}{2\sin(\nu\pi)},$$

و يكون الحل العام للمعادلة (4.5.25) هو CY_n+DJ_n حيث $C,\ D$ ثوابت. لكي يكون الحل محدود بالقرب من الصفر يجب أخذ $C=0$.

إذا يكون حل المعادلة (4.5.24) على الصورة

$$R_{mn}(s)=D_{mn}J_n\left(\frac{m\pi r}{b}\right),\ \ n\in\mathbb{N},\ m\in\mathbb{N}_0 \tag{4.5.26}$$

حيث D_{mn} ثوابت اختيارية.

نحصل على حل المعادلة (4.5.15) الذي يحقق الشروط (4.5.14) و ذلك بضرب الحلول (4.5.26)، (4.5.22) و (4.5.23) و التجميع على $m,\ n$:

$$\begin{aligned} u(r,\theta,z) &= \sum_{m=1}^{\infty}a_{m0}J_0\left(\frac{m\pi r}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\\ &+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}(a_{mn}\cos n\theta+b_{mn}\sin n\theta)J_n\left(\frac{m\pi r}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\end{aligned} \tag{4.5.27}$$

حيث $a_{mn},\ b_{mn}$ ثوابت اختياريه يتم تحديدها باستخدام الشرط (4.5.13) . بوضع $r=a$ في (4.5.27) نجد

$$f(\theta,z)=\sum_{m=1}^{\infty}a_{m0}J_0\left(\frac{m\pi a}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}a_{mn}J_n\left(\frac{m\pi a}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\right]\cos(n\theta)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sum_{m=1}^{\infty}b_{mn}J_n\left(\frac{m\pi a}{b}\right)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\right]\sin(n\theta).$$
(4.5.28)

حيث معاملات فوريية المزدوجة تكون على الصورة

$$a_{m0}=\left(\int_0^b\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta,z)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)d\theta dz\right)/\pi bJ_0\left(\frac{m\pi a}{b}\right),$$
$$a_{mn}=2\left(\int_0^b\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta,z)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\cos n\theta d\theta dz\right)/\pi bJ_n\left(\frac{m\pi a}{b}\right),\quad n\ge 1,$$
$$b_{mn}=2\left(\int_0^b\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta,z)\sin\left(\frac{m\pi z}{b}\right)\sin n\theta d\theta dz\right)/\pi bJ_n\left(\frac{m\pi a}{b}\right),\quad n\ge 1.$$

4.5.2 مسألة ديريشلية في الإحداثيات الكروية:

في الإحداثيات القطبية الكروية (r,θ,φ) تعطى العلاقة بين الإحداثيات الكارتيزيه على الصورة

$$x=r\cos\theta\sin\varphi,$$
$$y=r\sin\theta\sin\varphi,$$
$$z=r\cos\varphi$$

حيث $0\le\varphi\le\pi,\quad -\pi\le\theta\le\pi,\quad 0\le r<\infty$. معادلة لابلاس $\nabla^2u(r,\theta,\varphi)=0$ تأخذ الصورة:

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin^2\varphi}\frac{\partial^2u}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right]=0 \qquad (4.5.24)$$

معادلة لابلاس (4.5.24) عندما $u=u(r,\varphi)$، أي عندما u لا تعتمد على θ، محور z هو محور التماثل، تأخذ الصورة

$$\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)\right]=0 \qquad (4.5.25)$$

لحل المعادلة (4.5.25) بفصل المتغيرات، نفرض أن

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi) \qquad (4.5.26)$$

بالتعويض من (4.5.26) في (4.5.25) نحصل على

$$\frac{r^2R''}{R}+\frac{2rR'}{R}=-\left(\frac{\Phi''}{\Phi}+\cot\varphi\frac{\Phi'}{\Phi}\right)=\lambda \tag{4.5.27}$$

من المعادلة (4.5.27) نحصل على المعادلتين

$$\sin\varphi\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}+\cos\varphi\frac{d\Phi}{d\varphi}+\lambda\sin\varphi\Phi=0 \tag{4.5.28}$$

$$r^2\frac{d^2R}{dr^2}+2r\frac{dR}{dr}-n(n+1)R=0,\quad \lambda=n(n+1) \tag{4.5.29}$$

بالتعويض عن $x=\cos\varphi$ نجد أن

$$\frac{d\Phi}{d\varphi}=\frac{d\Phi}{dx}(-\sin\varphi),\qquad \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2}=\frac{d^2\Phi}{dx^2}\sin^2\varphi-\frac{d\Phi}{dx}\cos\varphi$$

فتتحول المعادلة (4.5.28) إلى

$$(1-x^2)\frac{d^2\Phi}{dx^2}-2x\frac{d\Phi}{dx}+\lambda\Phi=0 \tag{4.5.30}$$

و هي معادلة لوجاندر المعروفة و المعرفة على الفترة $0\le x\le 1$، حيث نأخذ $\lambda=n(n+1)$ بقيم $n=0,1,2,\cdots$. حلول المعادلة (4.5.30) هي $\Phi_n(x)=P_n(x)$ و بدلالة φ نحصل على الحلول

$$\Phi_n(\varphi)=P_n(\mu)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{d\mu^n}\left[(\mu^2-1)^n\right],\quad n\in\mathbb{N} \tag{4.5.31}$$

حيث $\mu=\cos\varphi$ ، $P_n(\mu)$ كثيرات حدود لوجندر من الرتبة n.

المعادلة الثانية (4.5.29) هي معادلة كوشي- أويلر و حلها على شكل $R(r)=r^m$ ، حيث

$$\begin{aligned}&m(m-1)r^m+2mr^m-n(n+1)=0\\ \Rightarrow\quad &(m-n)(m+n+1)=0\\ \Rightarrow\quad &m=n,\quad m=-(n+1)\end{aligned}$$

أي أن

$$R_n(r)=C_nr^n+\frac{d_n}{r^{n+1}} \tag{4.5.32}$$

وبذلك نحصل على متتالية الحلول لمعادلة لابلاس في الإحداثيات الكروية، المتماثلة بالنسبة للدوران حول محور z ،

$$u_n(r,\varphi)=R_n(r)\Phi_n(\varphi)=P_n(\cos\varphi)\left[c_nr^n+\frac{d_n}{r^{n+1}}\right] \tag{4.5.33}$$

ويكون الحل العام على الصورة

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\varphi)\left[c_n r^n+\frac{d_n}{r^{n+1}}\right] \tag{4.5.34}$$

عندما تكون المتسلسلة تقاربية.

<u>لإيجاد حل مسالة ديريشلية في الكرة</u> $0\le r\le a$ المتماثلة بالنسبة لمحور z نبحث عن الدالة $u=u(r,\varphi)$ التي تحقق

$$\begin{aligned}&\nabla^2 u=0,\quad 0\le r\le a,\ \ 0\le\varphi\le\pi\\ &u(a,\varphi)=f(\varphi),\qquad 0\le\varphi\le\pi\end{aligned}$$

نلاحظ أولا أن $d_n=0$ لكل n في الصيغة (4.5.34) لان u توافقية داخل الكرة، فيكون الحل العام لمعادلة لابلاس هو

$$u(r,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n r^n P_n(\cos\varphi) \tag{4.5.35}$$

وبعد تطبيق الشرط الحدي نحصل على

$$f(\varphi)=u(a,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n a^n P_n(\cos\varphi) \tag{4.5.36}$$

و حيث أن

$$\int_{-1}^{1}P_n(x)P_m(x)dx=\begin{cases}0 & n\ne m\\ \dfrac{2}{2n+1} & n=m\end{cases} \tag{4.5.37}$$

باستخدام (4.5.37) و (4.5.36) نحصل على

$$\begin{aligned}C_n a^n&=\frac{1}{\|P_n\|^2}\int_{-1}^{1}f(\varphi)P_n(\cos\varphi)d(\cos\varphi)\\ &=\frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi}f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\\ \Rightarrow C_n&=\frac{2n+1}{2a^n}\int_0^{\pi}f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\end{aligned}$$

<u>مثـــــال (4.5.2)</u>

في حالة $a=1$ ، $f(\varphi)=\begin{cases}1 & 0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}\\ -1 & \dfrac{\pi}{2}\le\varphi\le\pi\end{cases}$ نحصل على

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\int_0^{\pi} f(\varphi)P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi$$
$$= \frac{2n+1}{2}\left[\int_0^{\pi/2} P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi - \int_{\pi/2}^{\pi} P_n(\cos\varphi)\sin\varphi d\varphi\right]$$
$$= \frac{2n+1}{2}\left[\int_0^{1} P_n(x)dx - \int_{-1}^{0} P_n(x)dx\right]$$
$$= \frac{2n+1}{2}\left[\int_0^{1} (P_n(x) - P_n(-x))dx\right]$$

و حيث أن

$$P_n(-x) = \begin{cases} P_n(x) & n \text{ even} \\ -P_n(x) & n \text{ odd} \end{cases}$$

فان $C_n = 0$ لكل n عدد زوجي، كما أن

$$C_n = \frac{2n+1}{2}\left[2\int_0^1 P_n(x)dx\right] = (2n+1)\int_0^1 P_n(x)dx$$

لكل n عدد فردى. باستخدام (4.5.20) نجد

$$n=1 \qquad P_1 = x \qquad C_1 = 3\int_0^1 x dx = 3/2$$
$$n=3 \quad P_2 = \frac{1}{2}(5x^3-3x) \quad C_2 = 7\int_0^1 \frac{1}{2}(5x^3-3x)dx = \frac{35}{8} - \frac{21}{4}$$
$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

مثـــــال (4.5.3)

أوجد حل مسالة الشروط الحدية الآتية

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, \quad 0 < x < a, \; 0 < y < b, \; 0 < z < c \tag{4.5.38}$$
$$u_x(0,y,z) = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \tag{4.5.39}$$
$$u(a,y,z) = 0, \quad 0 < y < b, \quad 0 < z < c, \tag{4.5.40}$$
$$u(x,0,z) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < z < c, \tag{4.5.41}$$
$$u_y(x,b,z) = 0, \quad 0 < x < a, \quad 0 < z < c, \tag{4.5.42}$$
$$u(x,y,0) = f(x,y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b, \tag{4.5.43}$$
$$u(x,y,c) = g(x,y), \quad 0 < x < a, \quad 0 < y < b. \tag{4.5.44}$$

الحــــل

أفرض أن $u(x,y,z)=X(x)Y(y)Z(z)$ ثم عوض في المعادلة (4.5.38)، بعد فصل المتغيرات نحصل على

$$-\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{Y''(y)}{Y(y)}+\frac{Z''(z)}{Z(z)}=\lambda^2=\text{ constant independent of } x, y, \text{ and } z$$

المعادلة التفاضلية العادية الأولى هي: $X''(x)+\lambda^2 X(x)=0, \quad 0<x<a,$ وباستخدام الشرطين (4.5.39) و (4.5.40) نجد $X'(0)=X(a)=0$. و بذلك نكون حصلنا على مسالة شتورم ليوفيل و يكون الحل على الصورة

$$X_n(x)=\sqrt{\frac{2}{a}}\cos(\lambda_n x), \quad \lambda_{\text{n}}=\frac{(2n-1)\pi}{2a}.$$

أيضا

$$-\frac{Y''(y)}{Y(y)}=\frac{Z''(z)}{Z(z)}-\lambda_n^2=\mu^2=\text{constant independent of } y \text{ and } z.$$

باستخدام الشرطين (4.5.41) و (4.5.42) نجد $Y(0)=Y'(b)=0$. و بذلك نكون حصلنا على مسالة شتورم ليوفيل و يكون الحل على الصورة

$$Y_m(y)=\sqrt{\frac{2}{b}}\sin(\mu_m y), \quad \mu_{\text{m}}=\frac{(2m-1)\pi}{2b}.$$

أخيرا، المعادلة التفاضلية العادية الثالثة $Z''(z)-(\lambda_n^2+\mu_m^2)Z(z)=0$ ، لها الحل العام

$$Z(z)=A\cosh\left(\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,z\right)+B\sinh\left(\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,z\right).$$

و يكون

$$u(x,y,z)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_m(y)\left[A_{mn}\cosh\left(\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,z\right)+B_{mn}\sinh\left(\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,z\right)\right], \tag{4.5.45}$$

باستخدام الشرطين (4.5.43) و (4.5.44) نجد

$$f(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}A_{mn}X_n(x)Y_m(y)\cosh\left(\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,z\right), \quad 0<x<a, \quad 0<y<b$$

$$g(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)Y_m(y)\left[A_{mn}\cosh\left(\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,c\right)+B_{mn}\sinh\left(\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,c\right)\right],$$

حيث

$$A_{mn}=\int_0^b\int_0^a f(x,y)X_n(x)Y_m(y)\,dx\,dy,$$

$$B_{mn}=\frac{1}{\sinh\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,c}\left[\int_0^b\int_0^a g(x,y)X_n(x)Y_m(y)\,dx\,dy-A_{mn}\cosh\sqrt{\lambda_n^2+\mu_m^2}\,c\right].$$

<u>تمرين</u>

أوجد حل مسالة الشروط الحدية الآتية

(4.5.38) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, \quad 0<x<a,\ \ 0<y<b,\ \ 0<z<c$$

(4.5.39) $$u_x(0,y,z)=0, \quad 0<y<b, \quad 0<z<c,$$

(4.5.40) $$u(a,y,z)=0, \quad 0<y<b, \quad 0<z<c,$$

(4.5.41) $$u(x,0,z)=0, \quad 0<x<a, \quad 0<z<c,$$

(4.5.42) $$u_y(x,b,z)=0, \quad 0<x<a, \quad 0<z<c,$$

(4.5.43) $$u(x,y,0)=f(x,y), \quad 0<x<a, \quad 0<y<b,$$

(4.5.44) $$u(x,y,c)=0, \quad 0<x<a, \quad 0<y<b.$$