

المقرر: ٣١٦ رياض
الفصل الدراسي الثاني
الاختبار النهائي ١٤٢٨ - ١٤٢٩ هـ

جامعة الملك سعود
كلية العلوم - قسم الرياضيات

الزمن : ثلاث ساعات

السؤال الأول (١٠ درجات) :

أ - أوجد القيم والدوال الذاتية لمسألة الشروط الحدية

$$y'' + y' + \lambda y = 0, \quad y(1) = y(5) = 0$$

ب - أستنتج صيغة التعامد بين الدوال الذاتية في الفقرة (أ) .

السؤال الثاني (١٠ درجات) :

أ - أوجد منشور فوريير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 0 & -\pi < x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < \pi \end{cases}$$

ب - باستخدام نتيجة الفقرة (أ) أستنتج العلاقة

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^2}$$

السؤال الثالث (١٠ درجات) :

أ - باستخدام الدالة المولدة لكثيرات حدود هيرمت $e^{2xt-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(x)}{n!} t^n$ ،

أثبت أن:

$$H_{n+1}(x) = 2x H_n(x) - 2n H_{n-1}(x)$$

ب - أوجد

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_2(x) H_3(x) dx$$

$$(2) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_2(x)]^2 dx$$

السؤال الرابع (١٠ درجات) :

أ - أثبت أن

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\beta x) dx = \frac{\beta J_n(\lambda) J_n'(\beta) - \lambda J_n(\beta) J_n'(\lambda)}{\lambda^2 - \beta^2}, \quad \lambda \neq \beta$$

ب - باستخدام الفقرة (أ)، أثبت أن

$$\int_0^1 x J_n^2(\lambda x) dx = \frac{1}{2} \left[J_n'^2(\lambda) + \left(1 - \frac{n^2}{\lambda^2}\right) J_n^2(\lambda) \right]$$

ج - إذا كان λ و β جذران مختلفان للمعادلة $R J_n(x) + S x J_n'(x) = 0$ حيث R و S ثوابت. باستخدام الفقرة (أ)، اثبت أن

$$\int_0^1 x J_n(\lambda x) J_n(\beta x) dx = 0$$

السؤال الخامس (١٠ درجات) :

أ - أوجد تكامل فوريير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} -2 & -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & 0 < x \leq 1, \\ 0 & 1 < |x|, \end{cases}$$

ثم أدرس تقارب التكامل عند $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$.

ب - أثبت أن

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha = \frac{\pi}{2}$$