①

نموذج الاجابة للاختبار
النهائي للمقرر ٣٢١ إحص
للفصل الدراسي الاول ١٤٢٨-١٤٢٩هـ

السؤال الاول

(أ)

* الاختبار الاول: حساب α, β

$$\alpha_1 = P(2\bar{X} > 2.58 \mid \theta = 0)$$

$$= P\left(\frac{\bar{X} - \theta}{\sigma / \sqrt{n}} > \frac{(2.58)/2 - 0}{1/\sqrt{4}}\right)$$

$$= P(Z > 2.58) = \underline{0.005}$$

$$\beta_1 = 1 - P\left(Z > \frac{2.58/2 - \theta}{1/2} \,\middle|\, \theta = 1\right)$$

$$= 1 - P(Z > 2.58 - 2)$$

$$= 1 - P(Z > 0.58) = P(Z < 0.58)$$
$$= \underline{0.719}$$

* الاختبار الثاني:

$$\alpha = P\left(\frac{1}{\sqrt{30}} \sum_{i=1}^{4} i x_i > 2.58 \,\middle|\, \theta = 0\right)$$

$$= P\left(\sum_{i=1}^{4} i x_i > \sqrt{30}\,(2.58)\right)$$

(2)

لحساب توزيع $\sum_{i=1}^{4} i x_i$

$$x_i \sim N(\theta, 1) \Rightarrow X_1 \sim N(\theta, 1)$$
$$2X_2 \sim N(2\theta, 4)$$
$$3X_3 \sim N(3\theta, 9)$$
$$4X_4 \sim N(4\theta, 16)$$

$$\sum_{i=1}^{4} i x_i \sim N(10\theta, 30)$$

$$\alpha_2 = P\left(\frac{\sum_{i=1}^{4} i x_i - 10\theta}{\sqrt{30}} > \frac{\sqrt{30}(2.58) - 10\theta}{\sqrt{30}} \right)$$

$$= P(Z > 2.58) = \underline{0.005}$$

$$\beta_2 = 1 - P\left(\sum_{i=1}^{4} i x_i > \sqrt{30}(2.58) \mid \theta = 1 \right)$$

$$= 1 - P\left(Z > 2.58 - \frac{10}{\sqrt{30}} \right)$$

$$= P(Z \leq .754) = \underline{\underline{0.775}}$$

(ب): من قيم α_1, β_1 ، α_2, β_2 نجد أن

$$\alpha_1 = \alpha_2$$
$$\beta_1 < \beta_2$$

لذلك فإن الاختبار الأول أفضل من الاختبار الثاني

السـؤال الثاني

$$f(x) = p^{x}(1-p)^{1-x}, \quad x = 0,1, \quad 0 < p < 1$$

$$H_0: P = P_0 = \tfrac{1}{4}, \quad H_1: P = P_1 = \tfrac{1}{2}, \quad P_1 > P_0$$

(P) شـرط رفض Ho هـو

$$\frac{L(P_0)}{L(P_1)} \le \frac{\alpha}{1-\beta} = 0.028$$

$$\frac{P_0^{\sum x}(1-P_0)^{n-\sum x}}{P_1^{\sum x}(1-P_1)^{n-\sum x_i}} \le 0.028$$

$$\Rightarrow \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{\sum x}\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)^{n}\left(\frac{1-P_1}{1-P_0}\right)^{\sum x_i} \le 0.028$$

$$\Rightarrow \sum x_i\left[\ln\frac{P_0}{P_1} + \ln\frac{1-P_1}{1-P_0}\right] \le \ln(0.028) - n\ln\left(\frac{1-P_0}{1-P_1}\right)$$

$$\Rightarrow \sum x_i\left[\ln(0.5) + \ln\frac{1/2}{3/4}\right] \le \ln(0.028) - n\ln\frac{3/4}{1/2}$$

$$\Rightarrow \sum x_i\left[\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3}\right] \le -3.58 - n(0.41)$$

$$\Rightarrow \sum x_i[-1.1] \le -3.58 - 0.4n$$

$$\Rightarrow \sum x_i \geq \frac{(0.4n + 3.58)}{1.1} = R_n$$

ب) شرط قبول H_0 هو

$$\frac{L(p_0)}{L(p_1)} \geqslant \frac{1-\alpha}{\beta} = 9.75$$

$$\Rightarrow \sum x_i \leqslant \frac{0.4n - 2.28}{1.1} = A_n$$

حجم العينة	1	2	3	4
A_n	-1.71	-1.35	-0.98	-0.62
$\sum x_i$	1	2	3	3
R_n	3.62	3.98	4.35	4.71

هذه العينة لا تمكن من اتخاذ قرار ، لابد من مشاهدات جديدة

⑤

السؤال الثالث

$$f(x|\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x-\theta)^2}$$

$$g(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\theta^2/2}$$

$$h(\theta|x_1 \dots x_n) \propto \prod_{i=1}^{n} f(x_i|\theta)\, g(\theta)$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}\sum(x_i-\theta)^2 - \frac{1}{2}\theta^2}$$

$$h(\theta|x_1 \dots x_n) \sim N\left(\frac{n\bar{x}}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$$

المنطقة الحرج للإختبار هي

$$\left\{ P(\theta < \theta_0 | x) > \tfrac{1}{2} \right\}$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{\theta - \frac{n\bar{x}}{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}}} < \frac{\theta_0 - n\bar{x}/_{n+1}}{\sqrt{\frac{1}{n+1}}} \right) > \frac{1}{2}$$

$$= P\left(Z < \frac{\theta_0 - n\bar{x}/(n+1)}{\sqrt{\frac{1}{n+1}}} \right) > \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \theta_0 - \frac{n\bar{x}}{n+1} > 0$$

$$\Rightarrow \theta_0 > \frac{n\bar{x}}{n+1} \Rightarrow \left(\frac{n+1}{n}\right)\theta_0 > \bar{x}$$

$$\left\{ x_1 \dots x_n \mid \bar{x} < \theta_0 \left(\frac{n+1}{n}\right) \right\}$$

(6)

السؤال الرابع

$$f(x,\theta) = \theta e^{-\theta x} \quad , x \geq 0 \ , \theta > 0$$

$$L(\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum x_i} \quad , \theta > \theta_0$$

$$\text{MLE of } \hat{\theta} = \frac{1}{\bar{x}}$$

$$W = \{ \theta : \theta = \theta_0 \}$$

$$\Omega = \{ \theta : \theta \in (0, \infty) \}$$

$$L(\theta) = \theta^n e^{-\theta \sum x_i}$$

$$L(\hat{\omega}) = L(\theta_0) = \theta_0^n e^{-\theta_0 \sum x_i}$$

$$L(\hat{\Omega}) = L(\hat{\theta}) = \left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^n e^{-\frac{1}{\bar{x}} \sum x_i} \quad , \hat{\theta} > \theta_0$$

$$\frac{L(\hat{\omega})}{L(\hat{\Omega})} \leq \lambda_0 \Rightarrow \frac{\theta_0^n e^{-\theta_0 \sum x_i}}{\left(\frac{1}{\bar{x}}\right)^n e^{-\frac{1}{\bar{x}} \sum x_i}} \leq \lambda_0 \ ; \ 0 < \lambda_0 < 1$$

$$\Rightarrow (\theta_0 \bar{x})^n e^{-n\theta_0 \bar{x} + n} \leq \lambda_0 \quad , \bar{x} < \frac{1}{\theta_0}$$

وهذه دالة متزايدة تتحقق عندما تكون $0 < \lambda_0 < 1$

عندما

$$\bar{x} < \frac{1}{\theta_0}$$

$$\Rightarrow \sum x_i < \frac{n}{\theta_0}$$

وبالتالي فإن المنطقة الحرجة هي

$$\left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum x_i < \frac{n}{\theta_0} \right\}$$

$$= \left\{ (x_1, \ldots, x_n) : \sum x_i \le c \right\}$$

حيث c مقدار ثابت يمكن تحديده بالعلاقة

$$\alpha = p\left(\sum x_i \le c\right)$$

$$= p(y \le c \mid \theta = \theta_0)$$

$$y \sim \text{gamma}\left(n, \frac{1}{\theta_0}\right)$$

$$\text{Let } t = 2\theta_0 y \Rightarrow t \sim \chi^2_{\alpha, n}$$

$$= \left\{ (x_1, \ldots x_n) : \bar{x} \le \frac{1}{2\theta_0 n} \chi^2_{\alpha, n} \right\}$$

$$\alpha = 0.01, n = 10 \Rightarrow \chi^2_{0.01, 10} = 23.21 \text{ (ل)}$$

$$\frac{1}{2\theta_0 n} \chi^2_{\alpha, n} = \frac{1}{20}(23.32)$$

$$\Rightarrow \bar{x} \ \frac{1}{2\theta_0 n} \chi^2_{\alpha, n} \Rightarrow \text{Accept } H_0.$$

لا نستطيع رفض H_0

(8)

السؤال الخامس

(P) $f(x;\lambda)=\dfrac{\lambda^{x} e^{-\lambda}}{x!}\ , \ x=0,1,2,\dots \ , \ \lambda>0$

$$L(\lambda)=\frac{\lambda^{\sum x_i}\, e^{-n\lambda}}{\prod x_i!}$$

Let $\lambda_2>\lambda_1$

$$\Rightarrow \frac{L(\lambda_1)}{L(\lambda_2)}=\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^{\sum x_i} e^{-n(\lambda_1-\lambda_2)}$$

وهذه دالة غير تزايدية حيث أن $\lambda_2>\lambda_1$ في الإحصاءة $\sum x_i$

لذلك لها نسبة امكان رتيبة

وبالتالي فإن المنطقة للإختبار $H_0:\lambda\le\lambda_0$ vs $H_1:\lambda>\lambda_0$ هي

$$\{(x_1,\dots,x_n): \sum x_i > k\}$$

حيث k يمكن حسابها بالعلاقة

$$\alpha = P\left(\sum x_i > k \mid \lambda=\lambda_0\right)$$
$$= P(Y>k)\ , \quad Y\sim \text{Poisson}(n\lambda_0)$$

(ب)

9

(ب)

$$f(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda}}{x!} e^{x \ln \lambda}$$

$$= a(\lambda)\, b(x)\, e^{c(\lambda)\, d(x)}$$

$$a(\lambda) = e^{-\lambda} \quad , \quad b(x) = \frac{1}{x!}$$

$$c(\lambda) = \ln \lambda \quad , \quad d(x) = x$$

حيث أن $c(\lambda)$ هي دالة تزايدية في λ فإن

المنطقة الحرجة للاختبار $H_0: \theta \le \theta_0$ vs $H_1: \theta > \theta_0$ هي

$$\{(x_1, \ldots, x_n) \mid \sum x_i > k\}$$

حيث k ثابت يمكن تحديده من العلاقة

$$\alpha = P(Y > k) \, , \quad Y \sim Poisson(n\lambda_0)$$

ت) الاختبارات في (أ) ، (ب) متساويان.