إختبارات الإستقلال

$$H_0 : R_i \quad \text{distributed independently}$$
$$H_1 : R_i \quad \text{is not distributed independently}$$

الجري لأعلى والجري لأسفل Runs Up and Runs Down:

1- من متتابعة الأرقام العشوائية (حجمها N) حدد لكل رقم هل هو اآبر من الرقم الذي يليه (+) ام اصغر منه (-)
2- نحسب عدد الجري من اعلى لأسفل أو العكس وليكن a
3- نحسب متوسط a من العلاقة 3/(2N-1)
4- نحسب تباين a من العلاقة 90/(16N-29)
5- إذا آان N>20 فإن توزيع a يتبع تقريبا التوزيع الطبيعي بمتوسط μ_a وتباين σ^2_a

هذا التقريب يمكن أن يستخدم لاختبار الإستقلال , في هذه الحالة تكون الإحصاءة المستخدمة هي

$$Z_0 = \frac{a - \mu_a}{\sigma_a}$$

نقارنها بالقيم الجدولية فإذا كانت $-z_{\alpha/2} \le Z_0 \le z_{\alpha/2}$ فإننا لانرفض الفرضية الصفرية.

الجري لأعلى والجري لأسفل بإستخدام Excel :

أدخل البيانات التالية في صفحة Excel

R

0.41	0.68	0.89	0.94	0.74	0.91	0.55	0.62	0.36	0.27
0.19	0.72	0.75	0.08	0.54	0.02	0.01	0.36	0.16	0.28
0.18	0.01	0.95	0.69	0.18	0.47	0.23	0.32	0.82	0.53
0.31	0.42	0.73	0.04	0.83	0.45	0.13	0.57	0.63	0.29

الجرى فوق وتحت المتوسط Runs above and below the mean :

إذا نظرنا بتمعن للأرقام العشوائية في المثال السابق وقارنا كل مشاهدة بمتوسط المشاهدات نجد ان نصف المشاهدات الأول (الـ 20 مشاهدة الأولى) كلها أعلى من المتوسط وجميع المشاهدات في النصف الآخر أقل من المتوسط وحدوث مثل هذا النمط في مشاهدات عشوائية تماما غير محتمل لهذا يقترح إجراء إختبار للجري فوق وتحت المتوسط للتأكد من إستقلالية الأرقام العشوائية المولدة.

إختبار الجري فوق وتحت المتوسط يجرى بنفس طريقة الإختبار السابق وذلك بمقارنة كل مشاهدة بمتوسط المشاهدات فإذا كانت فوق المتوسط نضع + أما إذا كانت تحت المتوسط فنضع - ثم نحسب عدد الجري الكلي. ونجري الإختبار كالتالي:

إذا كانت n_1 عدد المشاهدات التي هي فوق المتوسط و n_2 عدد المشاهدات التي هي تحت المتوسط و b عدد الجري الكلي (لاحظ أن $1 \leq b \leq n_1 + n_2 = N$) فإن متوسط وتباين b تعطى بالعلاقات:

$$\mu_b = \frac{2n_1 n_2}{N} + \frac{1}{2}$$

$$\sigma_b^2 = \frac{2n_1 n_2 \left(2n_1 n_2 - N\right)}{N^2 \left(N-1\right)}$$

فإذا كانت اي من n_1 و n_2 أكبر من 20 فإن b تحت الفرضية الصفرية يكون لها تقريبا توزيع طبيعي ولإجراء الإختبار نكون الإحصائة $Z_0 = \dfrac{b - \mu_b}{\sigma_b}$ وعند مستوى معنوية α نقارنها بالقيم الجدولية فإذا كانت $-z_{\alpha/2} \leq Z_0 \leq z_{\alpha/2}$ فإننا لانرفض الفرضية الصفرية.

مثال: الجرى فوق وتحت المتوسط Runs above and below the mean

بإستخدام Excel:

سوف نوجد إختبار الجري فوق وتحت المتوسط للأرقام العشوائية في المثال السابق. أدخل المشاهدات السابقة في صفحة جديدة من Excel كالتالي:

الفصل الخامس
توليد متغيرات عشوائية

لكي نولد مشاهدات $x_1, x_2, \ldots$ لمتغيرعشوائي X يتبع التوزيع

$$F_X(x) = P(X \le x), \quad -\infty < x < \infty$$

فإننا نستخدم متتابعة من الأرقام العشوائية $R_1, R_2, \ldots$ حيث كل R_i لها دالة كثافة إحتمالية

$$f_R(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & otherwise \end{cases}$$

ودالة توزيع تراكمي

$$F_R(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$

ويقال أن $R_i \sim U(0,1)$ لجميع قيم i.

Random-Variate Generation

- Generation of random variables with other distribution than the uniform one
  - Generate continuous and discrete r.v. s with an arbitrary distribution

Generate Uniform random numbers → **Apply transform to obtain desired distribution** → Random numbers with desired arbitrary distribution

What transform techniques?

- Inverse transform
- Convolution Method
- Acceptance-Rejection

Inverse Transform Technique طريقة التحويل العكسي

- يمكن إستخدامها للتوزيعات الإحتمالية التي يمكن إيجاد $F_X^{-1}(x)$ لها وآذلك للتوزيعات التجريبية Empirical Distributions
- وتقوم على التطابق $F_X(x) = R$

توليد مشاهدات من متغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي

- المتغير العشوائي X يتبع التوزيع الأسي إذا آانت دالة الكثافة الإحتمالية له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & ow \end{cases}$$

- ودالة التوزيع التراآمية هي:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = 1 - e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0$$

- المعلمة λ تفسر على انها متوسط عدد الحوادث في وحدة زمنية. فمثلا لو آان لأزمنة مابين الوصول ... $x_{1,}\ x_{2,}$ توزيع اسي بمعدل λ فإن λ تفسر على إنها متوسط عدد الوصول لوحدة زمنية أو معدل الوصول.

- ملحوظة: القيمة النظرية لمتوسط زمن ما بين الوصول هو $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

سوف نولد مشاهدات من المتغيرات العشوائية $X_1, X_2, ...$ والتي لها توزيع أسي بإستخدام طريقة التحويل العكسي بالخوارزم التالي:

خطوة (1): أوجد دالة التوزيع التراكمي للمتغبر العشوائي X.

للتوزيع الأسي دالة التوزيع التراكمي هي $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, x \geq 0$

خطوة (2): على مجال X ضع $F(X) = R$

للتوزيع الأسي $1 - e^{-\lambda X} = R$ على المجال $x \geq 0$.

خطوة (3): حل المعادلة $F(X) = R$ بالنسبة للمتغير X بدلالة R.

للتوزيع الأسي نحل المعادلة $1 - e^{-\lambda X} = R$ للمتغير X بدلالة R كالتالي:

$$1 - e^{-\lambda X} = R$$
$$e^{-\lambda X} = 1 - R$$
$$-\lambda X = \ell n(1 - R)$$
$$X = \frac{-1}{\lambda} \ell n(1 - R)$$

المعادلة $X = \frac{-1}{\lambda} \ell n(1-R)$ تسمى مولد متغير عشوائي للتوزيع الأسي و هي على الشكل $X = F^{-1}(R)$.

خطوة (4): ولد العدد المطلوب من الأرقام العشوائية $R_1, R_2, ...$ ومن ثم احسب المشاهدات من المتغير العشوائي X حسب الصيغة $X_i = F^{-1}(R_i)$.

للتوزيع الأسي معطى الأرقام العشوائية $R_1, R_2, ...$ نحسب $X_1, X_2, ...$ كالتالي

$$X_i = \frac{-1}{\lambda} \ell n(1-R_i), \quad i = 1, 2, 3, ...$$

ملاحظة: يمكن تبسيط هذه الصيغة إلى $X_i = \frac{-1}{\lambda} \ell n R_i, \quad i = 1, 2, 3, ...$ (لماذا؟)

مثال:

1) اشتق مولد المتغير العشوائي للتوزيع الأسي مستخدما طريقة التحويل العكسي

2) مستخدما طريقة التحويل العكسي والاعداد العشوائية التالية :

0.488	0.226	0.221	0.043	0.055	0.743	0.081	0.685	0.364	0.012

ولد عشرة قيم لمتغير عشوائي يتبع التوزيع الأسي بدالة الكثافة الإحتمالية التالية:

$$f(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

احسب متوسط العينة العشوائية المولدة وقارنها بالقيمة النظرية.

$$X_i = -\frac{1}{2}\ln(1-R_i)$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.488) = 0.335, \quad x_2 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.226) = 0.128$$

$$x_3 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.221) = 0.125, \quad x_4 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.043) = 0.022$$

$$x_5 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.055) = 0.028, \quad x_6 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.743) = 0.680$$

$$x_7 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.081) = 0.042, \quad x_8 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.685) = 0.578$$

$$x_9 = -\frac{1}{2}\ln(1-0.364) = 0.226, \quad x_{10} = -\frac{1}{2}\ln(1-0.012) = 0.006$$

$$E(X) = (x_1 + x_2 + \ldots + x_{10})/10 = 0.217$$

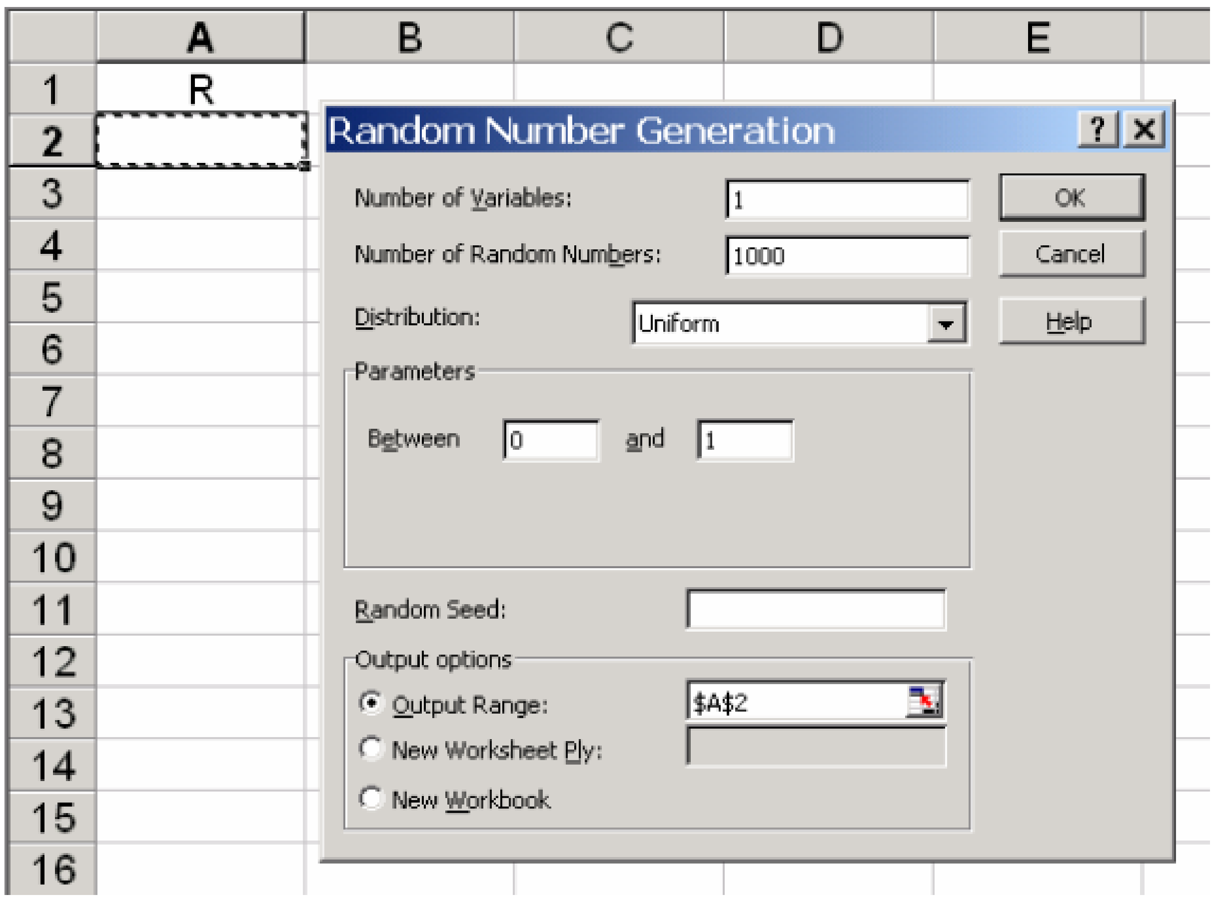
القيمة النظرية للمتوسط هي :

$$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{2} = 0.5$$

مثال (1) توليد مشاهدات من التوزيع الأسي بإستخدام Excel:

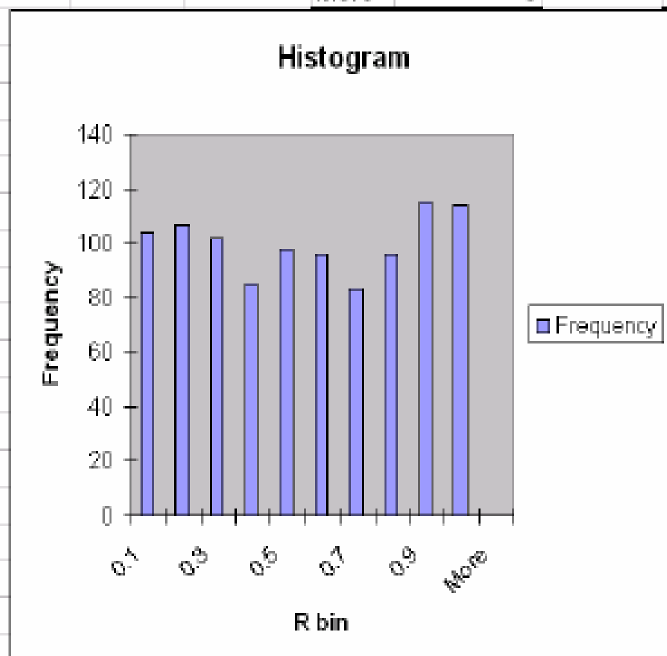
ولد 1000 مشاهدة من المتغير العشوائي X الذي يتبع التوزيع الأسي $\lambda = 1$.

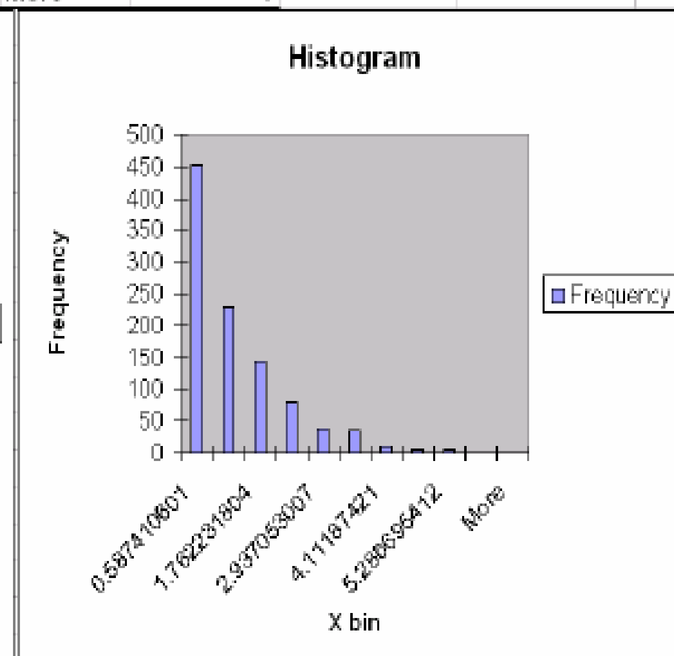
أفتح صفحة جديدة في Excel وأدخل البيانات كما هو موضح



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	R	X	R bin	X bin		*R bin*	*Frequency*		*X bin*	*Frequency*	=MIN(B:B)	=K2-K1
2	0.382000183	=-LN(A2)	0.1	=L2		0.1	104		0.587410	451	=MAX(B:B)	=L1/10
3	0.100680562	=-LN(A3)	0.2	=D2+$L$2		0.2	107		1.174821	228		
4	0.596484267	=-LN(A4)	0.3	=D3+$L$2		0.3	102		1.762231	144		
5	0.899105807	=-LN(A5)	0.4	=D4+$L$2		0.4	85		2.349642	80		
6	0.884609515	=-LN(A6)	0.5	=D5+$L$2		0.5	98		2.937053	39		
7	0.958464308	=-LN(A7)	0.6	=D6+$L$2		0.6	96		3.524463	36		
8	0.014496292	=-LN(A8)	0.7	=D7+$L$2		0.7	83		4.111874	10		
9	0.407422101	=-LN(A9)	0.8	=D8+$L$2		0.8	96		4.699284	6		
10	0.863246559	=-LN(A10)	0.9	=D9+$L$2		0.9	115		5.286695	4		
11	0.138584551	=-LN(A11)	1	=D10+$L$2		1	114		5.874106	1		

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	R	X	R bin	X bin		*R bin*	*Frequency*		*X bin*	*Frequency*	0.0012826	5.874106014	
2	0.382	0.96233	0.1	0.58741		0.1	104		0.587411	451	5.875388613	0.587410601	
3	0.100681	2.2958	0.2	1.17482		0.2	107		1.174821	228			
4	0.596484	0.5167	0.3	1.76223		0.3	102		1.762232	144			
5	0.899106	0.10635	0.4	2.34964		0.4	85		2.349642	80			
6	0.88461	0.12261	0.5	2.93705		0.5	98		2.937053	39			
7	0.958464	0.04242	0.6	3.52446		0.6	96		3.524464	36			
8	0.014496	4.23386	0.7	4.11187		0.7	83		4.111874	10			
9	0.407422	0.89791	0.8	4.69928		0.8	96		4.699285	6			
10	0.863247	0.14705	0.9	5.2867		0.9	115		5.286695	4			
11	0.138585	1.97627	1	5.87411		1	114		5.874106	1			
12	0.245033	1.40636				More	0		More	1			
13	0.045473	3.09065											
14	0.03238	3.43021											
15	0.164129	1.80711											
16	0.219611	1.5159											
17	0.01709	4.06924											
18	0.285043	1.25512											
19	0.343089	1.06977											
20	0.553636	0.59125											
21	0.357372	1.02898											
22	0.371838	0.9893											
23	0.355602	1.03394											
24	0.910306	0.09397											
25	0.466018	0.76353											
26	0.42616	0.85294											
27	0.303903	1.19105											
28	0.975707	0.02459											
29	0.806665	0.21485											
30	0.991241	0.0088											





مثال (2) توليد مشاهدات من التوزيع المتساوي بين (a,b) :

إذا كان $X \sim U(a,b)$ فإن دالة الكثافة الإحتمالية لها تعطى بالعلاقة

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

لكي نشتق مولد للمتغير العشوائي $X \sim U(a,b)$ نتبع خطوات الخوارزم التالي:

الخطوة (1): نوجد دالة التوزيع التراكمي

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \le x \le b\\ 1, & x>b\end{cases}$$

الخطوة (2): نضع $F(X)=(X-a)/(b-a)=R$ على المجال $a \le x \le b$.

الخطوة (3): نحل العلاقة $F(X)=(X-a)/(b-a)=R$ بالنسبة للمتغير X بدلالة R فينتج

$X=a+(b-a)R$.

ملحوظة: معالم التوزيع هي a و b ، التوقع والتباين هما $E(X)=\frac{a+b}{2}, \quad V(X)=\frac{(b-a)^2}{12}$.

مثال: ولد خمسة قيم عشوائية لمتغير عشوائي يتبع التوزيع المتساوي بين (1,2)

$$X=a+(b-a)R=1+R$$

$$X_1=1+0.488=1.488, \quad X_2=1+0.226=1.226$$
$$X_3=1+0.221=1.221, \quad X_4=1+0.043=1.043$$
$$X_5=1+0.055=1.055$$

- **توليد مشاهدات من التوزيع المتساوي (a,b) بإستخدام Excel:**

مثال: ولد 1000 مشاهدة من المتغير العشوائي الذي يتبع التوزيع المتساوي (0,10)

توليد مشاهدات من توزيع ويبل Weibull

المتغير العشوائي X يتبع توزيع ويبل إذا كانت دالة الكثافة الإحتمالية له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}\left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{\beta-1}e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, & x\geq 0\\ 0, & otherwise\end{cases}$$

حيث $\alpha>0$ و $\beta>0$ هي معالم الحجم والشكل للتوزيع (معلم الموقع $\nu=0$ في هذه الصيغة).

$$F(x)=1-e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad x\geq 0$$

لتوليد مشاهدات من توزيع ويبل نتبع الخطوات التالية:

الخطوة (1): من دالة الكثافة الإحتمالية نجد ان دالة التوزيع التراكمي هي

$$F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}}, \quad x \geq 0$$

الخطوة (2): ضع $F(x) = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{\beta}} = R$

الخطوة (3): أوجد X بدلالة R فينتج $X = \alpha\left[-\ell n(1-R)\right]^{1/\beta}$

توليد مشاهدات من توزيع ويبل Weibull بإستخدام Excel :

سوف نولد 1000 مشاهدة من توزيع ويبل لقيم $\alpha = \frac{1}{2}$ و $\beta = 2$ بإستخدام Excel كالتالي:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	R	X	R Bin	X Bin		*R Bin*	*Frequency*		*X Bin*	*Frequency*			=MIN(B:B)	=M2-M1
2	0.3820001	=0.5*(-LN(A2))^0.5	0.1	=N2		0.1	104		0.119405	67			=MAX(B:B)	=N1/10
3	0.1006805	=0.5*(-LN(A3))^0.5	0.2	=D2+$N$2		0.2	107		0.238810	166				
4	0.5964842	=0.5*(-LN(A4))^0.5	0.3	=D3+$N$2		0.3	102		0.358216	176				
5	0.8991058	=0.5*(-LN(A5))^0.5	0.4	=D4+$N$2		0.4	85		0.477621	192				
6	0.8846095	=0.5*(-LN(A6))^0.5	0.5	=D5+$N$2		0.5	98		0.597026	146				
7	0.9584643	=0.5*(-LN(A7))^0.5	0.6	=D6+$N$2		0.6	96		0.716432	120				
8	0.0144962	=0.5*(-LN(A8))^0.5	0.7	=D7+$N$2		0.7	83		0.835837	67				
9	0.4074221	=0.5*(-LN(A9))^0.5	0.8	=D8+$N$2		0.8	96		0.955242	46				
10	0.8632465	=0.5*(-LN(A10))^0.5	0.9	=D9+$N$2		0.9	115		1.074648	14				
11	0.1385845	=0.5*(-LN(A11))^0.5	1	=D10+$N$2		1	114		1.194053	5				

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	R	X	R Bin	X Bin		*R Bin*	*Frequency*		*X Bin*	*Frequency*			0.017907	1.194053
2	0.382	0.490493	0.1	0.119405		0.1	104		0.119405	67			1.21196	0.119405
3	0.100681	0.757595	0.2	0.238811		0.2	107		0.238811	166				
4	0.596484	0.35941	0.3	0.358216		0.3	102		0.358216	176				
5	0.899106	0.16306	0.4	0.477621		0.4	85		0.477621	192				
6	0.88461	0.175078	0.5	0.597027		0.5	98		0.597027	146				
7	0.958464	0.102984	0.6	0.716432		0.6	96		0.716432	120				
8	0.014496	1.028818	0.7	0.835837		0.7	83		0.835837	67				
9	0.407422	0.473789	0.8	0.955243		0.8	96		0.955243	46				
10	0.863247	0.191739	0.9	1.074648		0.9	115		1.074648	14				
11	0.138585	0.7029	1	1.194053		1	114		1.194053	5				
12	0.245033	0.592951				More	0		More	1				
13	0.045473	0.879012												
14	0.03238	0.926041												
15	0.164129	0.672143												
16	0.219611	0.615609												
17	0.01709	1.008618												
18	0.285043	0.56016												
19	0.343089	0.517147												
20	0.553636	0.384463												
21	0.357372	0.507193												
22	0.371838	0.497317												
23	0.355602	0.506415												
24	0.910306	0.153276												
25	0.466018	0.436902												
26	0.42616	0.461774												
27	0.303903	0.545675												
28	0.975707	0.07841												
29	0.806665	0.231758												
30	0.991241	0.046897												
31	0.256264	0.583427