٥. طرق العد
Counting Techinques

(٥-١) مقدمة:

في كثير من التطبيقات نكون مهتمين بمعرفة عدد العناصر المنتمية إلى مجموعة ما. ونستخدم طرق العد لإيجاد عدد عناصر مجموعة ما دون الحاجة إلى سرد عناصرها. وهذه الطرق تساعدنا أيضًا في إيجاد عدد الطرق المختلفة والممكنة لإجراء أي تجربة وهذا بدوره يفيدنا كثيرًا في دراسة علم الاحتمال.

(٥-٢) القواعد الأساسية لطرق العد:

هناك قاعدتان أساسيتان لطرق العد هما قاعدة الضرب وقاعدة الجمع ونذكرهما فيما يلي:

أولاً: قاعدة الضرب:

نتيجة:

إذا كان هناك عملية (أو تجربة) مكونة من عدد مقداره r من المراحل بحيث:

- المرحلة رقم 1 تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة
- المرحلة رقم 2 تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة
- وهكذا ...
- المرحلة رقم r تتم بعدد قدره n_r من الطرق المختلفة

فإن العملية ككل يمكن أجراؤها بعدد من الطرق المختلفة وقدره:

$$\boxed{n = n_1 \times n_2 \times \ldots \times n_r}$$

ملاحظة:

في طريقة الضرب يتم إجراء جميع المراحل معًا لإتمام العملية.

مثال (٥-١):

بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب ثلاثة مقررات: الأول في الإحصاء والثاني في الرياضيات والثالث في الفيزياء إذا علم أن هناك 3 مقررات مختلفة للإحصاء و 2 مقررين مختلفين للرياضيات و 2 مقررين مختلفين للفيزياء.

الحل:

العملية هي اختيار 3 مقررات وهي مكونه من ثلاث مراحل:

المرحلة الأول = اختيار مقرر الإحصاء وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_1 = 3$

المرحلة الثانية = اختيار مقرر الرياضيات وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_2 = 2$

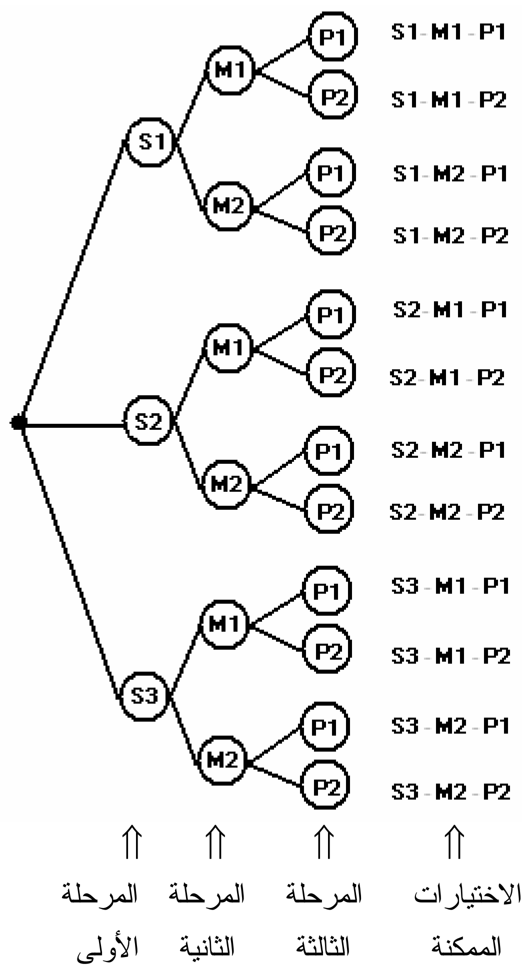
المرحلة الثالثة = اختيار مقرر الفيزياء وعدد طرق هذه المرحلة يساوي $n_3 = 2$

وباستخدام قاعدة الضرب فإن عدد الطريق المختلفة لاختيار المقررات الثلاثة يساوي:

$n = n_1 \times n_2 \times n_3$

$= 3 \times 2 \times 2 = 12$ (طريقة مختلفة)

ويمكن توضيح الحل للمثال السابق باستخدام ما يسمى بشكل الشجرة البيانية كما يلي:



ثانياً: قاعدة الجمع:

نتيجة:

إذا كان هناك عدد مقداره r من العمليات بحيث:

- العملية رقم 1 تتم بعدد قدره n_1 من الطرق المختلفة
- العملية رقم 2 تتم بعدد قدره n_2 من الطرق المختلفة
- وهكذا ...

- العملية رقم r تتم بعدد قدره n_r من الطرق المختلفة

فإن عدد الطرق المختلفة لإجراء عملية واحدة فقط من هذه العمليات (العمليات متنافية) يساوي:

$$\boxed{n = n_1 + n_2 + \ldots + n_r}$$

ملاحظة:

في طريقة الجمع تكون العمليات متنافية، أي أن إجراء إحدى العمليات ينفي (أو يمنع) إجراء العمليات الأخرى.

مثال (٥-٢):

بكم طريقة مختلفة يمكن أن يختار أحد الطلاب مقررًا واحدًا فقط من الإحصاء **أو** الرياضيات **أو** الفيزياء إذا علم أن هناك 3 مقررات مختلفة للإحصاء و 2 مقررين مختلفين للرياضيات و 2 مقررين مختلفين للفيزياء.

الحل:

العملية الأول = اختيار مقرر الإحصاء وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_1 = 3$

العملية الثانية = اختيار مقرر الرياضيات وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_2 = 2$

العملية الثالثة = اختيار مقرر الفيزياء وعدد طرق إجراء هذه العملية يساوي $n_3 = 2$

وحيث أن العمليات متنافية وباستخدام قاعدة الجمع فإن عدد الطريق المختلفة لاختيار المقرر يساوي:

$$n = n_1 + n_2 + n_3$$

$$= 3 + 2 + 2 = 7 \quad \text{(طريق مختلفة)}$$

(٥-٣) التباديل Permutations:

التبديلة هي ترتيبة لعدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها في كل مرة مع مراعاة الترتيب. فعدد التباديل لمجموعة مكونة من n من الأشياء مأخوذًا r منها في كل مرة يساوي عدد الترتيبات المختلفة التي يمكن تكوينها من n من الأشياء بحيث تحوي كل ترتيبة على r من هذه الأشياء مع مراعاة الترتيب.

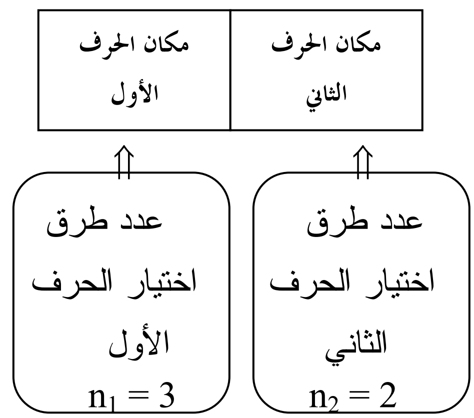
مثال (٥-٣):

١. كم عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحوي كل ترتيبة على حرفين؟ أو بعبارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C؟

٢. أوجد التباديل (التراتيب) المختلفة لحرفين من الحروف A, B, C.

الحل:

(١) عدد تباديل الحروف A, B, C بحيث تحوي كل ترتيبة على حرفين يمكن إيجاده بالتوضيح التالي:

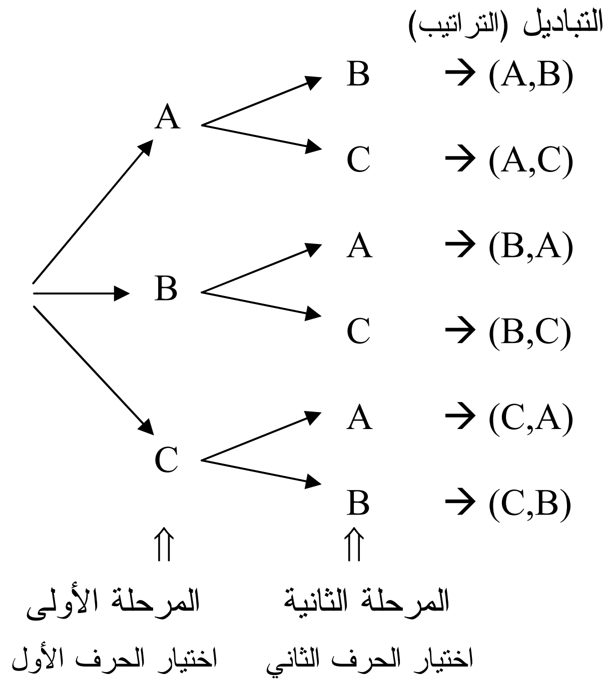


العملية مكونة من مرحلتين وبناءً على قاعدة الضرب فإن عدد طريق ترتيب حرفين من الحروف A,B,C يساوي:

$n = n_1 \times n_2 = 3 \times 2 = 6$

وعليه فإن عدد التباديل للحروف A,B,C مأخوذاً حرفين في كل مرة يساوي 6 تباديل.

(٢) يمكن إيجاد التباديل (أو التراتيب) باستخدام شكل الشجرة التالي:



لاحظ أن التبديلة أو الترتيبة (A,B) تختلف عن التبديلة (B,A)

نتيجة:

عدد تباديل n من الأشياء المختلفة مأخوذة r في كل مرة يرمز له بالرمز ${}_nP_r$ ويعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{{}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)}$$

ملاحظات:

- $n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 2 \times 1$ (يسمى مضروب العدد)
- $0! = 1$
- ${}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)$

$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\ldots.(n-r+1)\;(n-r)!}{(n-r)!} = \frac{n\,!}{(n-r)!}$$

$$\boxed{{}_{n}P_{r} = \frac{n\,!}{(n-r)!}}$$

- ${}_{n}P_{n} = n!$ (r=n)
- ${}_{n}P_{1} = n$ (r=1)

مثال (٥–٤):

$5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$

${}_{5}P_{5} = 5! = 120$

${}_{5}P_{1} = 5$

$${}_{7}P_{3} = \frac{7\,!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{4\times3\times2\times1} = \frac{5040}{24} = 210$$

$${}_{7}P_{3} = \frac{7\,!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\times6\times5\times4!}{4!} = 7\times6\times5 = 210$$

مثال (٥–٥):

باستخدام قانون التباديل أوجد عدد التباديل المختلفة لحرفين من الحـــروف A, B, C. أو بعبـــارة أخرى بكم طريقة يمكن ترتيب حرفين من الحروف A, B, C؟

الحل:

لدينا n=3 و r=2 وعليه فإن عدد طرق ترتيب حرفين من الحروف A, B, C يساوي:

$${}_{n}P_{r} = {}_{3}P_{2} = \frac{3\,!}{(3-2)!} = \frac{3\,!}{1!} = \frac{3\times2\times1}{1} = 6$$

مثال (٥–٦):

١. بكم طريقة يمكن أن نجلس 5 طلاب على 5 مقاعد في صف واحد؟

٢. بكم طريقة يمكن أن نجلس 5 طلاب على 3 مقاعد في صف واحد؟

الحل:

١. $n = 5,\; r = 5$

${}_{n}P_{r} = {}_{5}P_{5} = 5! = 120$

المقعد رقم 1	المقعد رقم 2	المقعد رقم 3	المقعد رقم 4	المقعد رقم 5
⇑	⇑	⇑	⇑	⇑
5	4	3	2	1

٢. $n = 5,\; r = 3$

$${}_{n}P_{r} = {}_{5}P_{3} = \frac{5\,!}{(5-3)!} = \frac{5\,!}{2!} = \frac{5\times4\times3\times2!}{2!} = 60$$

(٥-٤) تطبيقات على التباديل:

هناك تطبيقات كثيرة للتباديل نذكر بعضًا منها لأهميتها في دراسة علم الاحتمالات. وعلى سبيل التحديد فقد نكون مهتمين بإيجاد عدد طرق اختيار عنصر ما من مجموعة من العناصر والأمثلة على ذلك كثيرة. فقد نكون مهتمين بعدد الطرق المختلفة لسحب عينة من إنتاج أحد المصانع لفحصها. ويمكن تمثيل هذه العملية بعملية سحب r كرة من صندوق يحوي n كرة. كما تجدر الإشارة إلى أن عملية السحب تتم بطريقتين مختلفتين: الأولى تسمى السحب بإرجاع (بإحلال أو بإعادة) والثانية تسمى السحب بدون إرجاع (بدون إحلال أو بدون إعادة).

أولاً: السحب بإرجاع:

نتيجة:

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة وأردنا سحب r عنصر من هذه المجموعة بإرجاع (أي أن العنصر المسحوب يعاد مرة أخرى للمجموعة قبل سحب العنصر التالي) فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم بها هذا السحب هو:

$$\boxed{\underbrace{n \times n \times \ \dots \times n}_{r \text{ من المرات}} = n^r}$$

سحب العنصر رقم r	. . .	سحب العنصر رقم 2	سحب العنصر رقم 1
$\Uparrow$ n	. . .	$\Uparrow$ n	$\Uparrow$ n

مثال (٥-٧):

بكم طريقة يمكن سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة؟

الحل:

لدينا $n=15$ و $r=2$ وعليه فإن عدد سحب كرتين بإرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة يساوي:

$$n^r = 15^2 = 15 \times 15 = 225$$

ثانياً: السحب بدون إرجاع:

نتيجة:

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة وأردنا سحب r عنصر من هذه المجموعة بدون إرجاع (أي أن العنصر المسحوب لا يعاد مرة أخرى للمجموعة قبل سحب العنصر التالي) فإن عدد الطرق المختلفة التي يتم بها هذا السحب هو:

$$\boxed{{}_nP_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-r+1)}$$

سحب العنصر رقم r	. . .	سحب العنصر رقم 2	سحب العنصر رقم 1
$\Uparrow$ $n-r+1$	. . .	$\Uparrow$ $n-1$	$\Uparrow$ n

<u>مثال (٥-٥):</u>

بكم طريقة يمكن سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة؟

<u>الحل:</u>

لدينا $n=15$ و $r=2$ وعليه فإن عدد سحب كرتين بدون إرجاع من صندوق يحتوي على 15 كرة مختلفة يساوي:

$${}_nP_r = {}_{15}P_2 = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{15!}{13!} = \frac{15 \times 14 \times 13!}{13!} = 15 \times 14 = 210$$

<u>(٥-٣) التوافيق (أو التواليف) Combinations:</u>

التوفيقة (أو التوليفة) هي كل مجموعة يمكن اختيارها من مجموعة من عدة أشياء بأخذها كلها أو بعضها دون مراعاة الترتيب.

<u>نتيجة:</u>

إذا كان لدينا مجموعة مكونة من n من العناصر المختلفة فإن عدد التوافيق التي يمكن تكوينها بحيث تحوي كل توفيقة على r عنصر يرمز له بالرمز $\binom{n}{r}$ أو بالرمز ${}_nC_r$ ويعطى بالصيغة التالية:

$$\boxed{\binom{n}{r} = {}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} \quad ; \quad r = 0, 1, \ldots, n}$$

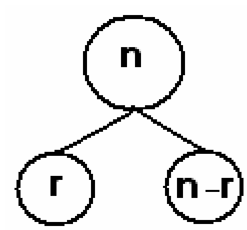
<u>ملاحظة:</u>

يمكن النظر إلى العدد $\binom{n}{r}$ على أنه:

$\binom{n}{r}$ = عدد التوافيق التي يمكن تكوينها من n عنصر مختلف بحيث تحتوي كل توفيقة على r عنصر.

= عدد طرق اختيار r عنصر من مجموعة مكونة من n عنصر مختلف.

= عدد طرق تقسيم مجموعة مكونة من n عنصر مختلف إلى مجموعتين الأولى تحوي r عنصرًا والأخرى تحوي (n–r) عنصرًا لباقية.



مثال (٥–٩):

$$\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!\,(5-3)!} = \frac{5!}{3!\times 2!} = \frac{5\times 4\times 3!}{3!\times 2!} = 10$$

$$\binom{4}{0} = \frac{4!}{0!\,(4-0)!} = \frac{4!}{1\times 4!} = \frac{4!}{4!} = 1$$

$$\binom{7}{7} = \frac{7!}{7!\,(7-7)!} = \frac{7!}{7!\times 0!} = \frac{7!}{7!\times 1} = 1$$

$$\binom{7}{1} = \frac{7!}{1!\,(7-1)!} = \frac{7!}{1\times 6!} = \frac{7!}{6!} = \frac{7\times 6!}{6!} = 7$$

ملاحظات:

١. $\binom{n}{0} = 1 \quad , \binom{n}{n} = 1 \quad , \binom{n}{1} = n$

٢. $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \binom{n}{n-r}$

مثال (٥–١٠):

بكم طريقة يمكن اختيار حرفين (بدون مراعاة الترتيب) من مجموعة الحروف A, B, C؟

الحل:

لدينا $n=3$ و $r=2$ وعليه فإن عدد طريقة اختيار حرفين (بدون مراعاة الترتيب) من مجموعة الحروف A, B, C يساوي:

$$\binom{n}{r} = \binom{3}{2} = \frac{3!}{2!\,(3-2)!} = \frac{3!}{2! \times 1!} = 3$$

- نلاحظ أن الاختيارات (التوافيق أو التواليف) الممكنة هي: $\{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}$.
- كما تجدر الإشارة إلى أن التوفيقة أو التوليفة $\{A,B\}$ هي نفس التوفيقة $\{B,A\}$.

(٥-٦) التباديل داخل أشياء متشابهة (متساوية):

نتيجة:

إذا كان هناك n من الأشياء مكونة من r مجموعة بحيث:

- المجموعة رقم 1 مكونة من n_1 من العناصر والمتشابهة
- المجموعة رقم 2 مكونة من n_2 من العناصر والمتشابهة
- وهكذا ...
- المجموعة رقم r مكونة من n_r من العناصر والمتشابهة

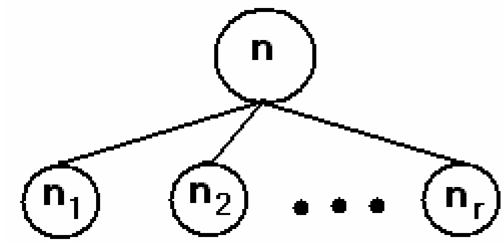
وكان $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$ فإن عدد التباديل المختلفة الممكنة لهذه الأشياء يساوي:

$$\boxed{\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r} = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \cdots n_r!}}$$

ملاحظة:

يمكن النظر إلى العدد $\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$ على أنه:

$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_r}$ = عدد طرق تقسيم مجموعة مكونة من n عنصر مختلف إلى r مجموعة بحيث أن المجموعة رقم 1 تحتوي على n_1 عنصر و المجموعة رقم 2 تحتوي على n_2 عنصر وهكذا... والمجموعة رقم r تحتوي على n_r عنصر بحيث أن $n = n_1 + n_2 + \dots + n_r$.



مثال (٥-١١):

بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY؟

الحل:

P, R, O, B, B, A, I, I, L, T, Y

عدد تباديل أوعدد طرق ترتيب أحرف كلمة PROBABILITY يساوي:

$$\binom{11}{1,1,1,2,1,2,1,1,1} = \frac{11!}{2!\ 2!} = 9979200$$

مثال (٥-١٢):

بكم طريقة يمكن ترتيب أحرف كلمة STATISTICS؟

الحل:

S, S, S, T, T, T, A, I, I, C

عدد تباديل أوعدد طرق ترتيب أحرف كلمة STATISTICS يساوي:

$$\binom{10}{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!\ 3!\ 2!} = 50400$$

مثال (٥-١٣):

بكم طريقة يمكن توزيع 8 طلاب على النحو التالي: 4 طلاب لتخصص الإحصاء و 3 طلاب لتخصص الرياضيات و طالب واحد لتخصص الفيزياء.

الحل:

عدد الطرق لتوزيع الطلاب وفق الطريقة المذكورة يساوي:

$$\binom{8}{4,3,1} = \frac{8!}{4!\ 3!\ 1!} = 280$$